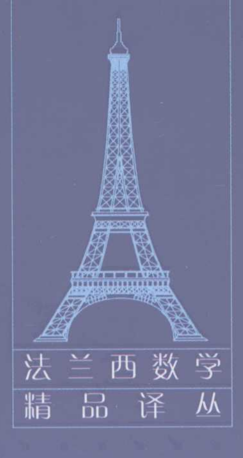


微分几何

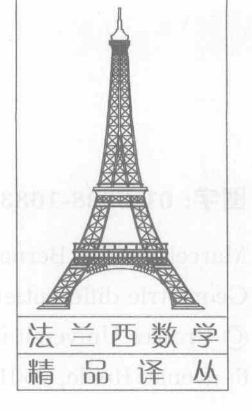
——流形、曲线和曲面

（第二版修订本）

M. 贝尔热　B. 戈斯丢　著
王耀东　译



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS



数学天元基金资助项目

微分几何

——流形、曲线和曲面

（第二版修订本）

[法] M. 贝尔热 B. 戈斯丢 著

译



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

图字: 01-2008-1633 号

Marcel Berger, Bernard Gostiaux

Géométrie différentielle: variétés, courbes et surfaces, 2 édition corrigée

6, avenue Reille, 75014 Paris

图书在版编目 (CIP) 数据

微分几何: 流形、曲线和曲面: 第 2 版 (修订本) / (法) 贝尔热, (法) 戈斯丢著; 王耀东译. — 北京: 高等教育出版社, 2009. 7

(法兰西数学精品译丛 / 李大潜主编)

ISBN 978-7-04-025801-1

I. 微··· II. ①贝··· ②戈··· ③王··· III. 微分几何 – 研究生 – 教材 IV. O186.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2009) 第 047548 号

策划编辑	王丽萍	**责任编辑**	王丽萍	**封面设计**	张 楠
版式设计	陆瑞红	**责任校对**	金 辉	**责任印制**	韩 刚

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	**免费咨询**	400-810-0598
邮政编码	100120	**网 址**	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司	**网上订购**	http://www.landraco.com
			http://www.landraco.com.cn
印 刷	中原出版传媒投资控股集团 北京汇林印务有限公司	**畅想教育**	http://www.widedu.com
开 本	787×1092 1/16	**版 次**	2009 年 7 月第 1 版
印 张	30.5	**印 次**	2009 年 7 月第 1 次印刷
字 数	620 000	**定 价**	68.00 元

物料号 25801–00

《法兰西数学精品译丛》序

随着解析几何及微积分的发明而兴起的现代数学, 在其发展过程中, 一批卓越的法国数学家发挥了杰出的作用, 作出了奠基性的贡献. 他们像灿烂的星斗发射着耀眼的光辉, 在现代数学史上占据着不可替代的地位, 在大学教科书、各种专著及种种数学史著作中都频繁地出现着他们的英名. 在他们当中, 包括笛卡儿、费尔马、巴斯卡、达朗贝尔、拉格朗日、蒙日、拉普拉斯、勒让德、傅里叶、泊松、柯西、刘维尔、伽罗华、庞加莱、嘉当、勒贝格、魏伊、勒雷、施瓦尔茨及里翁斯等等这些耳熟能详的名字, 也包括一些现今仍然健在并继续作出重要贡献的著名数学家. 由于他们的出色成就和深远影响, 法国的数学不仅具有深厚的根基和领先的水平, 而且具有优秀的传统和独特的风格, 一直在国际数学界享有盛誉.

我国的现代数学, 在 20 世纪初通过学习西方及日本才开始起步, 并在艰难曲折中发展与成长, 终能在 2002 年成功地在北京举办了国际数学家大会, 在一个世纪的时间中基本上跟上了西方历经四个多世纪的现代数学发展的步伐, 实现了跨越式的发展. 这一巨大的成功, 源于好几代数学家持续不断的艰苦奋斗, 源于我们国家综合国力的提高所给予的有力支撑, 源于改革开放国策所带来的强大推动, 也源于很多国际数学界同仁的长期鼓励、支持与帮助. 在这当中, 法兰西数学精品长期以来对我国数学界所起的积极影响, 法兰西数学的深厚根基、无比活力和优秀传统对我国数学家所起的不可低估的潜移默化作用, 无疑也是一个不容忽视的因素. 足以证明这一点的是: 在我国的数学家中, 有不少就曾经留学法国, 直接受到法国数学家的栽培和法兰西数学传统和风格的薰陶与感召, 而更多的人也或多或少地通过汲取法国数学精品的营养而逐步走向了自己的成熟与辉煌.

由于语言方面的障碍, 用法文出版的优秀数学著作在我国的传播受到了较大的限制. 根据一些数学工作者的建议, 并取得了部分法国著名数学家的热情支持, 高等

教育出版社决定出版《法兰西数学精品译丛》, 将法国的一些享有盛誉并有着重要作用与影响的数学经典以及颇具特色的大学与研究生数学教材及教学参考书, 有选择地从法文原文分批翻译出版. 这一工作得到了国家自然科学基金委员会数学天元基金的支持和赞助, 对帮助并推动我国读者更好地学习和了解法国的优秀数学传统和杰出数学成就, 进一步提升我国数学 (包括纯粹数学与应用数学) 的教学与研究工作的水平, 将是意义重大并影响深远的, 特为之序.

李大潜

2008 年 5月 26日

1987 年版重印说明

作者感谢法国大学出版社愿意增印 1987 年发行而今业已售罄的本书. 如果说前七章更像是基础, 那么, 关于曲线的两章和关于曲面的两章则具有十分不同的性质. 正如 1987 年版的引言中所说, 这里大部分是知识的陈述, 是阅读指南, 也就是说, 许多结果只叙述而不证明, 以便这两个主题跟得上当代研究的形势, 又不致使书的篇幅过大.

在过去的近二十年中, 无论是曲线, 抑或曲面, 都是众多崭新的和重要的结果的目标所在, 考虑到这两个概念的自然且相似的简单性, 这实在令人惊讶. 但是基于种种理由, 我们不大可能更新这四章, 以便涵盖这些结果和相应文献. 于是为了最大限度的简单化, 作为补偿, 我们选择推荐读者参考第一作者的两部著作:《生动的几何: 几何的雅可比尺度》, Cassini 出版社,《黎曼几何概观》, Springer 出版社. 这两部著作与本书 1987 版本的后四章一样, 也是知识介绍性质的, 即是阅读指南.

在第一部著作里, 第 V 章完全给了曲线, 而第 VI 章则完全给了曲面, 这两章的内容就我们所知在当时是最跟得上形势的. 而在第二部著作里, 其第 1 章和第 3 章, 则对应的是同样的内容.

1987 年版引言

出版于 1972 年本书的前一版, 倍受读者青睐, 三年前即告售罄, 法国大学出版社欣然答应出版其新版, 我们不胜感激.

不过, 许多读者批评原书的明显遗漏, 最引起诟病的是关于三维空间的曲面只字未提. 而这一对象, 不仅在数学里, 而且在力学、在物理学里, 人们都屡见其身影.

于是我们体会到在新版里不得不包含曲面理论. 但是深入谈论些许曲面而不明确区分以下两个特征: 内蕴几何 (即 2 维黎曼几何) 和形状 (外在几何), 是相当困难的. 谈论任意维的黎曼几何, 以及当今蓬勃发展着的主题都会令人心动不已. 但是我们抵挡了这些诱惑, 仅满足于添加两章: 关于曲面的局部理论的第 10 章, 和关于整体理论的第 11 章.

而如果这两章的风格跟前九章一样, 就将大大增加篇幅. 由于关于曲面不乏优秀的著作 —— 特别是同一丛书中的 Lehmann 和 Sacré 的以及 Gramain 的著作 —— 我们满足于其风格是对于所论主题是引导性的, 宛如《阅读指南》或《旅游向导》. 这不是详尽的教程, 处处离不开证明. 如此看来, 本书具有混合特征. 恳请读者谅解.

向所有在后两章编辑中通过建设性的批评帮助我们的各位, 特别是向 D. Bacry, J.-P. Bourguignon, J. Lafontaine 和 J. Ferrand 致谢.

M. 贝尔热

Bures-sur-Yvette, 1986

第一版前言

这部著作是由在巴黎于 1969~1970 年和 1970~1971 年讲授的《微分几何》课程内容编纂而成. 在确定这个课程的内容时, 与 S. Lang 的谈话让我受益匪浅. 确定课程的内容和风格的指导思想如下所述: 首先避免它成为微分法课程, 到达顶峰斯托克斯公式, 却再没有时间给出这个公式的应用. 其次, 在引进概念时, 尽可能提供新定义的对象的非平凡的例子. 最后, 关于流形, 对于分析, 要领会其几何实质, 而对于几何, 要洞悉其分析精髓.

为了达到这一目标, 又要限制在一个合理的篇幅之内, 就必须不能在微分法基础上多做停留, 而宁肯承认它们. 于是就假定读者熟悉大学第二周期的第一年的微分法, 或者对于第一周期第二年的大纲内容有深入的理解. 比如 [2] 的 37 章和 47 到 51 章 (方括号里的数字是书末的文献中的编号). 同样非常希望具备积分论的某些知识. 为了读者的方便, 第 0 章包含了后面用到的外代数、微积分学的必要概念和结果.

这就是说, 本书内容虽说有些局限, 但非常接近, [10] 的内容和 [21] 的第 1 章, 后一著作出版于本书草案制定以后. 这种巧合似乎昭示这里陈述的材料构成了 1970 年的微分几何的核心. 此外我不隐瞒, 无论结果的选取, 还是陈述的风格, 我都试图给读者以审美享受, 并且尽力以陈述起来既简单又自然的整体的几何定理吸引读者, 而不打算给他们提供一个关于流形的基础的、详尽无遗的展示.

不求仔细介绍内容, 只是指出几个特点:

—— $\mathbf{R}^n$ 的子流形, 虽然是微分法的大纲内容, 即使是第一周期的第二年的大纲的组成部分, 本书还是做了详尽叙述, 以此作为定义抽象流形的发轫和动机.

—— 接着定义抽象 (微分) 流形; 它是微分几何的基础材料, 本书所作的一切都是针对流形的.

—— 随之给出流形的五个例子, 它们起着导线的作用, 意思是后面会多次遇到它们. 它们是: 球面, 实射影空间, 环面, 法丛和依附在欧几里得空间的一个子流形上的管形以及曲线, 即维数为一的流形. 特别要指出法丛构成一个相当微妙和非凡的例子, 它见证了微分几何的多种技术的运用, 人们在 2, 6, 7, 9 章初遇而后重逢它.

—— 许多知识性的说明, 这是只叙述但未证明后面会用到的基本结果, 尤其要提到的是莫尔斯理论.

—— 对曲线给予特别的关注 (3, 8, 9 章). 这样做的合理性在于曲线是最简单的流形, 并且对于它已经获得了十分完备的结果.

—— 常微分方程的相当充分的阐述: 除了因为它在本书某些部分有应用, 另一个理由是在学分教育体制下, 讲授它的学时越来越少.

—— 对于许多整体结果的重视超过局部性质的详尽证明.

—— 一个重大的缺失: 黎曼几何, 即使在 $\mathbf{R}^3$ 的曲面这一简单情形它也没有露面. 坚持这样做的理由是: 为了能够表述并证明黎曼几何的整体的和有趣的结果, 就不得不营造相当冗长又鲜有启发性的基础. 与此形成对照, 通过嵌入流形, 读者会发现高斯 - 博内公式的证明 (参考 7.5.4)

本著作可以用作多种教学类型的基础: 或者是相当完备的第二周期第二年的微分几何课程, 或者是第二周期第一年第二学期的课程, 但要求听课的学生勤奋工作并且要及时补充微分法的知识, 最后或者是一个初等课程, 除了特别要包含关于曲线的最后两章, 再包含一些他们个人所需的章节, 条件是 §7.6 要直接论述.

对于习题, 除一部分简单地要求证明正文中留下的、容易证明的一些断语之外, 大部分是相当具体的例子, 从十分容易的到十分困难的. 如果不考虑非法语著作, 它们尽可能是原始的. 更多的习题, 请读者参照 [10] 和 [14].

对于希望拓广或补充本书内容的读者, 着重推荐下列著作: [14], [10], [21], [19], [12], [16], [11], [33], [35] 以及参考文献非常完备的由 [32] 和 [18] 组成的著作.

这部著作的编纂得益于下列贡献, 我对其提供者表示感谢:S.Lang 参与了内容的拟订; 两年课程的听课者、助教和助理讲师对讲课给予的批评、订正和建议; F. Jabœf 编写 7.7 节和 9.8 节; J. Lafontaine 编写许多习题和引理 9.5.5 的证明.

M. 贝尔热

巴黎, 1972

目　　录

第零章　复习和补充

本章一部分内容是外代数基本定理、微分法和积分法, 这些在后面将会用到, 另一部分内容是一些补充. 集中叙述基本结果, 以免读者在其他著作中四处寻找. 大部分结果不给出证明; 对于证明, 建议读者系统参考 [1], [2] 和 [6] 这三部著作之一. 这些定理基本上构成大学第一周期第二年的微分法部分或 C1 证书要求的大部分内容, 或 "微分法" 的学分所要求的内容; 再加上积分法的某些结果. 补充内容基本是: 外代数上的内积 (0.1.18) 和向量空间上的密度概念 (0.1.24).

0.0　记号. 复习

0.0.1　记号

0.0.2　设 X 是一个拓扑空间, 引进记号:

$O(X)$: X的开集的集合;

$O_x(X)$: 含 X 的元素 x 的 X 的开集的集合;

$O_A(X)$: 含 X 的子集 A 的 X 的开集的集合.

0.0.3 设 X 是一个度量空间, 引进记号:

$B(a,r)$: 中心为 a 半径为 r 的开球, 而当 $X=\mathbf{R}^d$ 时, 记做 $B_d(a,r)$ 或 $B_{\mathbf{R}^d}(a,r)$;

$\bar{B}(a,r)$: 中心为 a 半径为 r 的闭球.

0.0.4 设 E 和 F 是两个 (同一个数域上的) 向量空间, 引进记号:

$L(E;F)$: 从 E 到 F 内的连续线性映射的向量空间 (如果两空间是有限维的, 所有线性映射都是连续的).

0.0.5 设 X 和 Y 是两个拓扑空间, $C^0(X;Y)$ 是从 X 到 Y 内的连续映射的集合.

0.0.6 用 $C^0(X)$ 表示从 X 到 $\mathbf{R}$ 内的连续函数的代数.

0.0.7　复习

0.0.8 设 X 是一个紧致拓扑空间, 引进记号: $C^0(X)$, 配备一致收敛范数的 $C^0(X)$ 是完备的. 参见 [1], 13 页.

0.0.9 如果一个向量 (或仿射) 空间在 $\mathbf{R}$ 上是有限维的, 则它有一个由一个范数给定的典范拓扑, 诸范数都是等价的. 欧几里得范数是它的一个特殊的范数 (参见 [1], 19 页).

0.0.10　例子

设 E 和 F 是两个有限维向量空间, 则 $L(E;F)$ 是维数等于 $\dim E\times\dim F$ 的有限维向量空间.

如果 E 和 F 都是赋范的, 则可以为 $L(E;F)$ 配备一个典范范数, 其定义是

$$\|f\|=\sup\{\|f(x)\|:\|x\|=1\}.$$

熟知 $\|f\circ g\|\leqslant\|f\|\cdot\|g\|$ (参见 [1], 1.4.1 和 1.5.1). 如果 F 是一个巴拿赫空间, 则 $L(E;F)$ 也是巴拿赫空间 (参考 [1], 1.4.2.).

0.0.11　练习

对于两个同构的向量空间 E 和 F, 把从 E 到 F 上的同构映射记做

0.0.12
$$\operatorname{Isom}(E;F).$$

那么从 $\operatorname{Isom}(E;F)$ 到 $\operatorname{Isom}(F;E)$ 上的映射 $\varphi:f\mapsto f^{-1}$ 对于 0.0.10 定义的范数是连续的 (参见 [1], 1.1.7.3).

0.0.13 拓扑复习. 压缩映射定理 (参考 [1], 1.4.4.1)

0.0.13.1　定义

设 X 和 Y 是两个度量空间. 称一个映射 $f:X\to Y$ 是 **k-利普希茨的** (或**比例 k 利普希茨的**, 或**利普希茨的**), 如果存在 $k\in\mathbf{R}$ 使得

$$d(f(x),f(y))\leqslant k\cdot d(x,y)\qquad \text{对于所有}\quad x,y\in X.$$

称映射 $f:X\to Y$ 是局部利普希茨的, 如果 $\forall x\in X,\exists V\in O_x(X)$, 使得限制 $f|_V$ 是利普希茨的.

称一个映射 $f: X \to Y$ 是压缩的, 如果它是 k- 利普希茨的, 并且 $k < 1$.

0.0.13.2 定理

设 X 是一个完备度量空间, $t: X \to X$ 是一个压缩映射. 则 t 有一个不动点, 并且只有一个, 即存在唯一的 z, 使得 $t(z) = z$. 此外对于所有 $x \in X$, 有

$$z = \lim_{n \to \infty} t^n(x).$$

0.1 外 代 数

设 E 是一个向量空间, 而 E^* 是它的对偶空间, 即 E 上的连续线性型的向量空间, 如果 E 是有限维的, 这就是 $L(E; \mathbf{R})$.

把 E 上的交错 r 重线性型的向量空间记做

0.1.1 $$\Lambda^r E^*.$$

如果 E 的维数是 n, 并且 $r \leqslant n$, 则这是一个 $\binom{n}{r}$ 维的向量空间; 如果 $r > n$, 则 $\Lambda^r E^* = \{0\}$ (参见 [2], 37.1.11).

我们有 $\Lambda^1 E^* = E^*$, 并且约定 $\Lambda^0 E^* = \mathbf{R}$. 我们提醒: 如果 $f_1, \cdots, f_r$ 是 r 个 E 上的线性型, 定义

0.1.2 $$(f_1 \wedge \cdots \wedge f_r)(x_1, \cdots, x_r) = \sum_{\sigma \in \mathscr{S}_r} \varepsilon_\sigma f_1(x_{\sigma(1)}) \cdots f_r(x_{\sigma(r)})$$

其中 $\mathscr{S}_r$ 是 r 阶对称群.

0.1.3 $\Lambda^r E^*$ 的基底

设 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 是 E 的一个基 (假定维数是 n), 而$\{e_1^*, \cdots, e_n^*\}$是 E^* 中的对偶基. 又设 $I = \{i_1, \cdots, i_r\}$ 是一个 r 元组, 其中,

$$1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leqslant n.$$

则形式 $e_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_r}^*$ 组成 $\Lambda^r E^*$ 的一个基 (参见 [2],37.1.9)

0.1.4 交错型的向量积

设 $\alpha \in \Lambda^p E^*$, 而 $\beta \in \Lambda^q E^*$, 以下列方式定义 $\alpha \wedge \beta$ 为交错 $(p+q)$ 重线性型. 设 $\mathscr{S}_{p+q}$ 是 $p+q$ 阶对称群, 而 A 是 $\mathscr{S}_{p+q}$ 的子集, 使得对于 $\sigma \in A$ 有

$$\sigma(1) < \sigma(2) < \cdots < \sigma(p)$$

及

$$\sigma(p+1) < \sigma(p+2) < \cdots < \sigma(p+q).$$

0.1.5　令

$$(\alpha \wedge \beta)(x_1, \cdots, x_{p+q}) = \sum_{\sigma \in A} \varepsilon_\sigma \alpha(x_{\sigma(1)}, \cdots, x_{\sigma(p)}) \beta(x_{\sigma(p+1)}, \cdots, x_{\sigma(p+q)}),$$

参见 [2], 37.2.5 到 37.2.11.

对于所有 α, β, γ, $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$.

0.1.6　如果 $\alpha \in \Lambda^r E^*$, 则称 r 为 α 的阶, 并记做 $\deg \alpha$.

如果

$$\alpha \in \Lambda^r E^* \text{ 且 } \beta \in \Lambda^s E^*,$$

则

0.1.7
$$\beta \wedge \alpha = (-1)^{\deg \alpha \deg \beta} \alpha \wedge \beta.$$

于是向量积给向量空间 (设 E 为 n 维的)

$$\Lambda E^* = \bigoplus_{r=0}^{n} (\Lambda^r E^*)$$

配备了一个结合的和反交换的代数结构.

0.1.8　拉回像

设 $f \in L(E; F)$, 定义 $f^* \in L(\Lambda^r F^*, \Lambda^r E^*)$:

0.1.9
$$f^*(\beta)(u_1, \cdots, u_r) = \beta(f(u_1), \cdots, f(u_r)), \beta \in \Lambda^r F^*, \forall u_1, \cdots, u_r \in E.$$

直接验证即得

0.1.10
$$f^*(\alpha \wedge \beta) = f^*(\alpha) \wedge f^*(\beta).$$

0.1.11　若 $f \in L(E; F)$ 且 $g \in L(F; G)$, 则 $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.

0.1.12　如果 $f \in L(E; E)$, E 有有限维数 n, 而 $\beta \in \Lambda^n E^*$, 则

0.1.12.1
$$\boxed{f^*\beta = (\det f)\beta}.$$

事实上, $\Lambda^n E^*$ 的维数为 1, f^* 是 $\Lambda^n E^*$ 上的相似变换. 设 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 是 E 的一个基底, β 是型 $e_1^* \wedge \cdots \wedge e_n^*$, 即与此基底关联的行列式形式, 则

$$(f^*\beta)(e_1, \cdots, e_n) = \beta(f(e_1), \cdots, f(e_n)) = \det f.$$

但由于 $f^*\beta = k\beta$, 比例因子 k 等于 $\det f$.

0.1.13　定向

如果 E 的维数是 n, 实向量空间 $\Lambda^n E^*$ 是 1 维的, 于是 $\Lambda^n E^* - \{0\}$ 有两个连通分支. 向量空间 E 的一个定向就是给定这两个连通分支中的一个.

还可以在 $\Lambda^n E^* - \{0\}$ 中考虑等价关系 $\mathscr{R}$, 其定义是: 如果存在一个严格正数 k, 使得 $\alpha = k\beta$, 则 $\alpha\mathscr{R}\beta$.

集合 $\mathrm{Orient}(E) = (\Lambda^n E^* - \{0\})/\mathscr{R}$ 有两个元素, E 的一个定向的选择就是这两个元素之一的选择.

0.1.14 定义

称 $\Lambda^n E^* - \{0\}$ 的一个 n 形式是**正的**, 如果它属于定义 E 的定向时所选择的 $\mathrm{Orient}(E)$ 的那个元素.

称一个基底 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 是**正的**, 如果对于属于 $\Lambda^n E^* - \{0\}$ 的正的 α, 有 $\alpha(e_1, \cdots, e_n) > 0$.

设 E 和 F 是两个维数为 n 的向量空间, 而 $f \in \mathrm{Isom}\,(E; F)$. 我们称 f 是保持两定向的, 如果对于一个 $\beta \in \Lambda^n F^* - \{0\}$, 并且 $\beta > 0$, 有 $f^*(\beta) > 0$. 当 $E = F$ 时, 将称 f 是保持定向的. 这些定义自然不依赖 β 的选取.

如果 $E = F$, 则 f 保持定向等价于 $\det f > 0$. 这由 0.1.12.1 和 0.1.13 得到.

0.1.15 欧几里得空间上的外代数

0.1.15.1 设 E 是一个欧几里得空间, 其标量积记做 $(\cdot|\cdot)$, 而范数记做 $\|\cdot\|$. 我们知道 E 的对偶空间 E^* 典范地同构于 E, 这是通过 "降号" 映射实现的, $\flat$: $x \mapsto \{y \mapsto (x|y)\} \in E^*$ (参考 [2], 35.4.6); 设 $\#$ 是其逆同构 ("升号"). 由 E 上的欧几里得结构, 通过 $\flat$ 得到 E^* 上的, 随之在每个 $\Lambda^p E^*$ 上的, 一个典范结构. 我们不需要一般情形 (感兴趣的可以参考 [3], §8, 定理 1), 只考虑 $p = 2$ 和 $p = d = \dim E$. 这种情形下得到以下欧几里得结构.

0.1.15.2 对于 $\Lambda^2 E^*$, 由

$$\|\alpha \wedge \beta\|^2 = \|\alpha\|^2 \|\beta\|^2 - (\alpha|\beta)^2$$

在 $\alpha \wedge \beta (\alpha, \beta \in E^*)$ 上定义欧几里得结构就足够了.

设 $\{e_i\}$ 是 E 的一个标准正交基底, 则 E^* 的对偶基底 $\{e_i^*\}$ 也是标准正交基底, 对于

$$\alpha = \sum_i \alpha_i e_i^*, \beta = \sum_i \beta_i e_i^*,$$

有

$$\|\alpha \wedge \beta\|^2 = \sum_{i<j} (\alpha_i \beta_j - \alpha_j \beta_i)^2.$$

0.1.15.3 对于 $\Lambda^d E^*$, 设 $\{e_i\}$ 是 E 的一个标准正交基底, 所有 $\alpha \in \Lambda^d E^*$ 都可以写成 $\alpha = k \cdot e_1^* \wedge \cdots \wedge e_d^*$. 令

$$\|\alpha\| = |k|.$$

为使这个定义是良定的, 应当验证 $|k|$ 不依赖标准正交基底的选取. 而这由 0.1.12 和正交变换的行列式等于 ± 1 得到.

0.1.15.4　由前面的叙述得知 d 维定向欧几里得空间 E 具有一个典范元素 $\lambda_E \in \Lambda^d E^* - \{0\}$, 其范数等于 1, 并且属于 $\Lambda^d E^* - \{0\}$ 的选定的连通分支.

0.1.15.5　定义

λ_E 称为定向欧几里得空间 E 的典范体积形式 .

注意 λ_E 还可以由下述条件定义:

$$\lambda_E(e_1, \cdots, e_d) = 1, \quad \forall \text{ 正的标准正交基底 } \{e_1, \cdots, e_d\}.$$

0.1.15.6　引理

设 $\{a_i\}_{i=1,\cdots,d}$ 是 E 的任意正的基底, 则

$$\lambda_E(a_1, \cdots, a_d) = \sqrt{\det(a_i|a_j)}.$$

事实上, 设 $\{e_i\}_{i=1,\cdots,d}$ 是 E 的一个正的标准正交基底 , 而 A 是 $\{a_i\}_{i=1,\cdots,d}$ 对于基底 $\{e_i\}_{i=1,\cdots,d}$ 的列向量的矩阵. 如果 ${}^tA$ 表示 A 的转置矩阵, 那么矩阵乘积的定义表明, ${}^tA \cdot A$ 正是标量积 $(a_i|a_j)$ 的矩阵. 于是

$$\det(a_i|a_j) = \det({}^tA \cdot A) = \det {}^tA \det A = (\det A)^2.$$

而

$$\lambda_E(a_1, \cdots, a_d) = \lambda_E(A \cdot e_1, \cdots, A \cdot e_d) = \det A \cdot \lambda_E(e_1, \cdots, e_d) = \det A.$$

这就完成了证明.

0.1.15.7　与 $\Lambda^p E^*$ 一样, 可以定义 $\Lambda^p E$ (一个向量空间的外代数, 参考 [3], §5). 我们只需要知道对于一个欧几里得向量空间 E, 定义一个反对称的映射 $\Lambda : E \times E \to \mathbf{R}$; 这只要对于 $x, y \in E$, 定义 $x \wedge y = x^\flat \wedge y^\flat \in \Lambda^2 E^*$. 根据 0.1.15.2, 可以谈论 $\|x \wedge y\|$. 比如, 如果 $\{x, y\}$ 是一个标准正交对, 则 $\|x \wedge y\| = 1$; 一般的公式是

$$\|x \wedge y\|^2 = \|x\|^2 \|y\|^2 - (x|y)^2$$

和在一个标准正交基底下的计算公式

$$\|x \wedge y\|^2 = \sum_{i<j} (x_i y_j - x_j y_i)^2.$$

0.1.16　现在假设 E 是 3 维定向欧几里得空间. 那么 λ_E 通常称为混合积 , 并且简单地记做 $\lambda_E(x, y, z) = (x, y, z)$. 根据引理 0.1.23, λ_E 确定 $\Lambda^2 E^*$ 和 E 之间的一个同构 σ. 沿用 0.1.15.7 的记号, 由此得到一个由

0.1.17　　$$(x, y) \mapsto \sigma(x^\flat \wedge y^\flat)$$

定义的映射 $E \times E \to E\sigma\ (x^\flat \wedge y^\flat)$, 通常称为 E 的两个向量 x, y 的向量积.

0.1.18 内积

设 E 是一个向量空间, 而 ξ 是 E 的一个元素. 对于所有 $r \geqslant 1$, 存在一个从 $\Lambda^r E^*$ 到 $\Lambda^{r-1}E^*$ 的线性映射 $\operatorname{int}(\xi)$, 称为内积, 其定义是: 对于 $\alpha \in \Lambda^r E^*$ 及 $\xi_1, \cdots, \xi_{r-1} \in E$,

0.1.19
$$(\operatorname{int}(\xi)(\alpha))(\xi_1, \cdots, \xi_{r-1}) = \alpha(\xi, \xi_1, \cdots, \xi_{r-1}).$$

可以验证 $\operatorname{int}(\xi)$ 是 ΛE^* 的一个 -1 阶的反导子, 即对于 ΛE^* 中的 α 和 β, 有

0.1.20
$$\boxed{\operatorname{int}(\xi)(\alpha \wedge \beta) = (\operatorname{int}(\xi)(\alpha)) \wedge \beta + (-1)^{\deg \alpha} \alpha \wedge (\operatorname{int}(\xi)(\beta))}\,.$$

0.1.21 用坐标计算

假定 E 是 d 维的, 而 $\{e_1, \cdots, e_d\}$ 是 E 的一个基底. 设 $\alpha \in \Lambda^d E^*$, 而 $\xi = \sum_{j=1}^{d} x_j e_j$ 是 E 的一个元素. 则

$$\begin{aligned}(\operatorname{int}(\xi)\alpha)(e_1, \cdots, \hat{e}_i, \cdots, e_d) &= \alpha\left(\sum_{j=1}^{d} x_j e_j, e_1, \cdots, \hat{e}_i, \cdots, e_d\right) \\ &= \sum_{i=1}^{d} (-1)^{i-1} x_i \alpha(e_1, \cdots, e_i, \cdots, e_d).\end{aligned}$$

(其中 $\hat{e}_i$ 表示 e_i 不出现).

由于 $\alpha \in \Lambda^d E^*$, 存在数 a 使得 $\alpha = a(e_1^* \wedge \cdots \wedge e_d^*)$, 于是

0.1.22
$$\boxed{\operatorname{int}\left(\sum_{i=1}^{d} x_i e_i\right)(\alpha) = \sum_{i=1}^{d} (-1)^{i-1} a x_i e_1^* \wedge \cdots \wedge \widehat{e_i^*} \wedge \cdots \wedge e_d^*}\,,$$

如果

$$\alpha = a \cdot e_1^* \wedge \cdots \wedge e_d^*.$$

由于 $e_1^* \wedge \cdots \wedge \widehat{e_i^*} \wedge \cdots \wedge e_d^* (i = 1, \cdots, d)$ 组成 $\Lambda^{d-1}E^*$ 的基底 (参见 0.1.3), 由此得到:

0.1.23 引理

如果 $\alpha \in \Lambda^d E^*$, $\alpha \neq 0$, 则映射 $\xi \mapsto \operatorname{int}(\xi)\alpha$ 是从 E 到 $\Lambda^{d-1}E^*$ 上的一个同构.

0.1.24 密度

0.1.25 定义

如果从 d 维实向量空间 E 到 $\mathbf{R}$ 内的一个映射 δ, 使得存在 $\alpha \in \Lambda^d E^* - \{0\}$ 满足 $\delta = |\alpha|$, 则称 δ 为E 上的一个密度.

0.1.26 例子

如果 $E = \mathbf{R}^d$, 密度 $\delta_0 = |\lambda_E| = |\det(\cdot)|$ 称为 $\mathbf{R}^d$ 的典范密度. 在一般情形, 所有欧几里得空间 E 有一个典范密度, 记做 μ_E, 其定义是 $\mu_E = |\lambda_E|$, 这里 λ_E 是 E 的

一个任意定向的典范体积形式. 根据 0.1.15.6, 对于 E 的任意基底 $\{a_1,\cdots,a_d\}$, 我们有:

0.1.27 $$\mu_E(a_1,\cdots,a_d)=\sqrt{\det(a_i|a_j)}.$$

0.1.28 把 E 的密度的集合记做 $\mathrm{Dens}\,(E)$.

0.1.29 密度的初等性质

0.1.29.1 如果 δ 和 δ' 是 E 的密度, 则存在一个常数 $k>0$, 使得 $\delta'=k\delta$.

0.1.29.2 如果 δ 和 δ' 是 E 的密度, 而 k 和 k' 是不全为零的常数, 则 $k\delta+k'\delta'$ 也是 E 的密度.

0.1.29.3 设 E 和 F 是有同样维数 d 的向量空间, 而 $\delta\in\mathrm{Dens}\,(F)$, $f\in\mathrm{Isom}\,(E,F)$, 则由

$$(f^*\delta)(x_1,\cdots,x_d)=\delta(f(x_1),\cdots,f(x_d)),\quad \forall\, x_1,\cdots,x_d\in E$$

定义的映射 $f^*\delta: E^d\to\mathbf{R}$ 是 E 上的一个密度.

事实上, 如果 $\alpha\in\Lambda^dE^*-\{0\}$ 使得 $|\alpha|=\delta$, 则

$$\begin{aligned}(f^*\delta)(x_1,\cdots,x_d)&=\delta(f(x_1),\cdots,f(x_d))\\&=|\alpha(f(x_1),\cdots,f(x_d))|=|(f^*\alpha)(x_1,\cdots,x_d)|,\end{aligned}$$

于是 $f^*\delta$ 是关联到 $f^*\alpha\in\Lambda^dE^*-\{0\}$ 的密度.

0.1.29.4 设 E,F,G 是有同样维数 d 的向量空间, f 和 g 分别是从 E 到 F 上和从 F 到 G 上的同构. 则对于 G 的密度 δ 有

$$(g\circ f)^*(\delta)=(f^*\circ g^*)(\delta),$$

其验证是直接的. 从 0.1.12.1 得到:

0.1.29.5 如果 $f\in\mathrm{Isom}\,(E,E)$, 而 $\delta\in\mathrm{Dens}\,(E)$, 则 $f^*(\delta)=|\det(f)|\delta$.

0.1.29.6 如果 $\dim(E)=1$, E 的一个密度是一个范数, 反之亦真.

事实上, 这是从 E 到 $\mathbf{R}$ 的一个映射 δ, 使得存在 $\alpha\in\Lambda^1E^*=E^*$, $\alpha\neq 0$, 满足 $\delta=|\alpha|$. 于是

$\delta(x)\geqslant 0$, 并且 $\delta(x)=0\Leftrightarrow x=0$ ($\alpha\neq 0\Rightarrow\alpha$ 是 1 维同构);

$\delta(\lambda x)=|\alpha(\lambda x)|=|\lambda||\alpha(x)|=|\lambda|\delta(x)$;

$\delta(x+y)=|\alpha(x+y)|=|\alpha(x)+\alpha(y)|\leqslant|\alpha(x)|+|\alpha(y)|=\delta(x)+\delta(y)$.

0.2 微 分 法

0.2.1 定义

设 E 和 F 是两个巴拿赫空间, U 是 E 的一个开集. 称一个从 U 到 F 的映射 f 在 $x\in U$ 是可微的, 如果存在 $f'\in L(E;F)$ 使得 $\|f(x+h)-f(x)-f'(x)\cdot(h)\|=o(\|h\|)$. 如果 f 在每个点 $x\in U$ 是可微的, 则说 f 在 U 是可微的.

0.2.2 $f'(x)$ 称为 f 在 x 的导数.

0.2.3 从 U 到 $L(E;F)$ 的映射 $x \mapsto f'(x)$ 称为 f 的导数.

0.2.4 注释

对于实变量函数就重新回到通常的导数概念. 事实上 $L(\mathbf{R};F)$ 典范同构于 F (通过从 $L(\mathbf{R};F)$ 到 F 上的映射 $\varphi : \theta \mapsto \theta(1)$). 如果 $f'(x)$ 是现在定义的 f 在 x 的导数, 那么 $f'(x)(1)$ 是通常的导数.

0.2.5 定义

设 E 和 F 是两个巴拿赫空间, U 是 E 的一个开集. 称一个从 U 到 F 的映射 f 是连续可微的, 如果它是可微的, 并且 f' 属于 $C^0(U;L(E;F))$.

这时还可称 f 是 C^1 类的, 或 f 是 C^1.U 上的 C^1 类的函数的集合记做 $C^1(U;F)$. 把 $C^1(U;\mathbf{R})$ 简记为 $C^1(U)$.

0.2.6 有限增量定理

U 是巴拿赫空间 E 的一个凸开集, 而 $f : U \to F$ 是一个可微映射, 满足条件: 对于所有 $x \in U$, $\|f'(x)\| \leqslant k$. 则 f 是 k-利普希茨的. (参见定义 0.0.13.1, 而对于证明, 参见 [1], 3.4.1 或 [4], 351 页).

0.2.7 推论

如果 $f \in C^1(U;F)$, 则 f 是局部利普希茨的.

事实上, U 是局部凸的, 而 f' 既然是连续的, 就是局部有界的.

0.2.8 C^1 类的稳定性公式

0.2.8.1 复合函数定理

设 E,F,G 是三个巴拿赫空间, U 和 V 分别是 E 和 F 的开集, $f \in C^1(U;F)$, 而 $g \in C^1(V;G)$, 并且 $f(U) \subset V$, 则 $g \circ f \in C^1(U;G)$, 并且对于 U 的 x,

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \circ f'(x)$$

(参见 [2], 47.3.1 或 [1], 1.2.2.1).

0.2.8.2 *设 f 和 g 是 C^1 类的, $\lambda \in \mathbf{R}$, 则 $f+g$ 和 λf 是 C^1 类的, 如果 F 上有乘法, 则 fg 是 C^1 类的.*

比如, 多项式数值函数是 C^1 类的.

0.2.8.3 我们有 $L(E;F) \subset C^1(E;F)$, 并且实际上对于所有 $x \in E$, $f'(x) = f$. 如果用 $L(E,F;G)$ 表示定义在 $E \times F$ 上且在 G 取值的双线性映射, 那么 $L(E,F;G) \subset C^1(E \times F;G)$, 并且对于 $x,u \in E$; $y,v \in F$, $f'(x,y)(u,v) = f(x,v) + f(u,y)$(参见 [1], 1.2.4.3).

0.2.8.4 设 $F_1,\cdots,F_n$ 是巴拿赫空间, 而 p_i 是从 $F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_n$ 到 F_i 上的投影, 则有 $f \in C^1(U;F_1 \times \cdots \times F_n) \Leftrightarrow \forall i, p_i \circ f \in C^1(U;F_i)$. 此外, 对于任意 i, $(p_i \circ f)'(x) = p_i \circ (f'(x))$(参见 [1],2.5.1).

0.2.8.5 设 $E_1,\cdots,E_m,F$ 是巴拿赫空间, $U \in O(E_1 \times \cdots \times E_m)$, 而 $f : U \to F$. $\{x_1\} \times \cdots \times \{x_{i-1}\} \times E_i \times \{x_{i+1}\} \times \cdots \times \{x_m\} \bigcap U$ 是 U 的平行于 E_i 的截断. 把 f 在这个截断上的限制等同于定义在 E_i 的子集上的函数 (仅第 i 个变量变化). 如果

这个限制对于 x_i 的导数存在, 则把它记做

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \quad 或 \quad f'_{E_i} \quad 或 \quad f'_{x_i} \quad 或 \quad \mathrm{D}_i f.$$

于是有

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \in L(E_i; F),$$

并且可以证明

0.2.8.6 $f \in C^1(U;F) \Leftrightarrow \forall i = 1, \cdots, m : \exists \frac{\partial f}{\partial x_i}$ 并且 $\frac{\partial f}{\partial x_i} \in C^0(U; L(E_i; F))$,

进而有

0.2.8.7
$$f'(a)(h_1, \cdots, h_m) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(h_i)$$

(参见 [1], 1.2.6.1).

特殊情形

设 $E = \mathbf{R}^m$, 而 $F = \mathbf{R}^n$, $U \in O(E)$, $f \in C^1(U;F)$, 其分量为 $f_1, \cdots, f_n$, f_i 是 m 个变量 $x_1, \cdots, x_m$ 的函数.

0.2.8.8 如果用 $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ 表示通常意义下的偏导数, 则称矩阵

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(a) \end{pmatrix}$$

为 f 在 a 的雅可比矩阵. 把这个矩阵记做 $f'(a)$.

在这一特殊情形下, 我们有

$$f \in C^1(U;F) \Leftrightarrow \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \in C^0(U;\mathbf{R}) \quad \forall i, \forall j.$$

0.2.8.9 定义, 记号

设 $f \in C^1(U;E), U \in O(E)$. 称映射

$$U \ni x \mapsto J(f)(x) = \det(f'(x)) \in \mathbf{R}$$

为 f 的雅可比行列式, 并且记做 $J(f)$.

如果 $E = \mathbf{R}^m$, 那么 $J(f)(a)$ 正是 f 在 a 的雅可比矩阵的行列式: 0.2.8.8.

0.2.9 例子

0.2.9.1 用曲线速度计算 f'

定义 开集 $U \in O(E)$ 的一条曲线指的是由 $\mathbf{R}$ 的一个区间 I 和 $\varphi \in C^1(I;U)$ 组成的配对 (I, φ). 这条曲线在 $t \in I$ 的速度是向量 $\varphi'(t) \in E$ (参见 0.2.4).

设 $U \in O(E)$, $f \in C^1(U;F)$, $x \in U$, $y \in E$. 我们希望计算 $f'(x)(y)$. 为此, 设 (I,φ) 是 U 的一条曲线, 使得 $0 \in I, \varphi(0) = x$, 并且 $\varphi'(0) = y$. 那么, 根据 0.2.8.1, 我们有

$$(f \circ \varphi)'(0) = f'(\varphi(0)) \circ \varphi'(0) = f'(x)(y),$$

即 $f'(x)(y)$ 等于曲线 $(I, f \circ \varphi)$ 在 0 的速度.

注意, 严格地说, 应该写成

$$\varphi'(0)(1) = y \quad \text{和} \quad (f \circ \varphi)'(0)(1) = (f'(\varphi(0)) \circ \varphi'(0))(1) = f'(x)(y).$$

0.2.9.2 设 E 和 F 是同构的巴拿赫空间, 并且 φ 是从 $\mathrm{Isom}\,(E;F)$ 到 $\mathrm{Isom}\,(F;E)$ 的映射, 其定义是 $\varphi(f) = f^{-1}$. 则

$$\varphi \in C^1(\mathrm{Isom}\,(E;F); \mathrm{Isom}\,(F;E)),$$

并且

$$\varphi'(f)(u) = -f^{-1} \circ u \circ f^{-1}.$$

首先必须证明 $\mathrm{Isom}\,(E;F) \in O(L(E;F))$. 在有限维时, 这是显然的, 因为 $\mathrm{Isom}\,(E;F) = \det^{-1}(\mathbf{R}-\{0\})$, 而映射 $f \mapsto \det(f)$ 是连续的 (E 的一个基底和 F 的一个基底业已选定).

在无穷维情形, 为了证明 $\mathrm{Isom}\,(E;F)$ 是一个开集, 就必须确认对于 $u_0 \in \mathrm{Isom}\,(E;F)$, 和充分接近于 u_0 的 $u \in L(E;F)$, 有 $u \in \mathrm{Isom}\,(E;F)$. 而这等价于 $u_0^{-1}u \in \mathrm{Isom}\,(E;E)$.

对于 $f \in L(E;E)$, 如果 $\|f\| < 1$, 那么 $1 - f \in \mathrm{Isom}\,(E;E)\left(\sum_{n=0}^{\infty} f^n \text{ 是其逆}\right)$.

令 $u_0^{-1}u = 1 - f$, 则 $f = u_0^{-1}u_0 - u_0^{-1}u$, 故 $\|f\| \leqslant \|u_0^{-1}\|\,\|u_0 - u\|$, 于是当 $\|u_0 - u\| < 1/\|u_0^{-1}\|$ 时, $1 - f = u_0^{-1}u$ 可逆, 从而 u 也可逆 (参见 [1], 1.7.3).

对于可微性, 在有限维时, 一个矩阵的逆矩阵的明晰计算证明该映射是 C^1 类的 (参见 0.2.8.2).

在任意维情形, 直接有

$$\begin{aligned}
&\varphi(f+u) - \varphi(f) + f^{-1} \circ u \circ f^{-1} = (f+u)^{-1} - f^{-1} + f^{-1} \circ u \circ f^{-1} \\
&= (f+u)^{-1}(f+u)[(f+u)^{-1} - f^{-1} + f^{-1} \circ u \circ f^{-1}] \\
&= (f+u)^{-1}[1 - 1 - u \circ f^{-1} + u \circ f^{-1} + u \circ f^{-1} \circ u \circ f^{-1}] \\
&= (f+u)^{-1}(u \circ f^{-1} \circ u \circ f^{-1}),
\end{aligned}$$

由此得到

$$\|\varphi(f+u) - \varphi(f) + f^{-1} \circ u \circ f^{-1}\| \leqslant \|(f+u)^{-1}\|\,\|u\|^2\,\|f^{-1}\|^2 \text{ (参见 0.0.10)}.$$

而 $\left\|(f+u)^{-1}\right\|\left\|f^{-1}\right\|^2$ 是有界的 (对于充分小的 $\|u\|$), 终于得到 (由于 $\|u\|^2$ 的出现)

$$\left\|\varphi(f+u)-\varphi(f)+f^{-1}\circ u\circ f^{-1}\right\|=\|u\|\cdot o(\|u\|).$$

这就完成了证明.

0.2.10　C^2 类, C^p 类, $p\geqslant 2$

如果 f 在 E 的开集 U 上是 C^1 类的, 则其导映射 $f':U\to L(E;F)$, $L(E;F)$ 是巴拿赫空间 (参见 0.0.10). 可以探讨 f' 是否可微.

0.2.11　如果对于 U 的所有 x, $(f')'(x)\in L(E;L(E;F))$ 存在, 则说 f 在 U 上是二次可微的, 并且把导数 $(f')'(x)$ 记做 $f''(x)$.

如果 $f''\in C^0(U;L(E;L(E;F)))$, 则说映射 f 是 C^2 类的. 我们知道

0.2.12　设 E,F 和 G 是三个巴拿赫空间, 而 $L(E,F;G)$ 是从 $E\times F$ 到 G 内的双线性映射的空间, 则 $L(E,F;G)$ 同构于 $L(E;L(F;G))$. (参见 [1], 1.1.9).

基于这一事实, 就可以叙述施瓦尔茨定理 (参见 [4], 356 页, 或 [1], 定理 1.5.1.1):

0.2.13

0.2.13.1　如果 $f:U\to F$ 在 a 是二次可微的, 则二阶导数 $f''(a)\in L(E,E;F)$ 是一个对称双线性映射, 即对于 E 的所有 h,k,

$$(f''(a)\cdot h)\cdot k=(f''(a)\cdot k)\cdot h.$$

0.2.13.2　复合函数的二阶导数

对于一个复合映射 $h\circ g$, 从 0.2.8.1 和 0.2.8.3 得到

$$(h\circ g)''(z)=h''(g(z))\circ(g'(z),g'(z))+h'(g(z))\circ g''(z).$$

0.2.14　同样定义 $C^p(U;F)$ 为 p 次连续可微映射的集合. 将说这些映射是 C^p 类的. 最后令

$$C^\infty(U;F)=\bigcap_{p=1}^{\infty}C^p(U;F)$$

(C^∞ 类的或无穷次可微的函数的集合).

0.2.15　C^p $(p=1,\cdots,\infty)$ **类函数的性质**

这里简短重提 0.2.8 中的相应的稳定性质.

0.2.15.1　C^p 类函数的复合仍是 C^p 类的.

0.2.15.2　设 f 和 $g\in C^p(U;F)$, $\lambda\in\mathbf{R}$, 则 $f+g$, λf 和 fg (如果乘积有意义) 是 C^p 类的.

比如, 多项式数值函数是 C^p 类的 (参见 [1], 1.1.6).

0.2.15.3　连续 n 重线性函数空间 $L(E_1,\cdots,E_n;F)$ 含于 $C^\infty(E_1,\cdots,E_n;F)$

0.2.15.4　设 $F_1,\cdots,F_n$ 是巴拿赫空间, 而 p_i 是从 $F_1\times F_2\times\cdots\times F_n$ 到 F_i 上的投影, 则有 $f\in C^p(U;F_1\times\cdots\times F_n)\Leftrightarrow\forall i, f_i=p_i\circ f\in C^p(U;F_i)$. (参见 [1], 2.5.1).

0.2.15.5 $U \in O(E_1 \times \cdots \times E_m)$, 则 $f \in C^p(U;F) \Leftrightarrow$ 所有 p 阶偏导数存在并且连续.

0.2.15.6 由 $u \mapsto u^{-1}$ 定义 $\varphi : \mathrm{Isom}\,(E;F) \to \mathrm{Isom}\,(F;E)$, 则

$$\varphi \in C^\infty(\mathrm{Isom}\,(E;F); \mathrm{Isom}\,(F;E)).$$

在本教程的后续部分, 所考虑的概念涉及的都是 $C^p(p \geqslant 1)$ 类的, 但是往往不明确指定 p 的值.

0.2.16 C^∞ 类函数的例子: 普拉托函数

定理 对于所有整数 n, 所有严格正数 δ, 存在 $C^\infty(\mathbf{R}^n;\mathbf{R})$ 中的函数 ψ, 满足条件: ψ 在 $B(0,1)$ 的限制等于 1, 而在 $\mathbf{R}^n - B(0,1+\delta)$ 的限制等于零.

(i) 考虑定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 φ, 其定义是

$$\varphi(t) = \begin{cases} \exp\left(\dfrac{-1}{(t-a)(b-t)}\right), & t \in (a,b), \\ 0, & t \in \mathbf{R} - (a,b). \end{cases}$$

$\varphi \in C^\infty(\mathbf{R}^n;\mathbf{R})$ 这个事实是经典的 (其验证留给读者作为习题).

(ii) 定义函数

$$\theta(t) = \frac{1}{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(s)\,\mathrm{d}\,s} \int_{-\infty}^{t} \varphi(s)\,\mathrm{d}\,s,$$

它满足条件

$$\theta(t) = \begin{cases} 0, & \text{若 } t \leqslant a; \\ 1, & \text{若 } t \geqslant b. \end{cases}$$

并且

$$\theta \in C^\infty(\mathbf{R}).$$

(iii) 取 $a = 1, b = (1+\delta)^2$, 则 $\eta(t) = 1 - \theta(t)$ 是 C^∞ 类的, 当 $t \geqslant (1+\delta)^2$ 时等于零, 当 $t \leqslant 1$ 时等于 1.

(iv) 函数 $x \mapsto \psi(x) = \eta(\|x\|^2)$ 是 C^∞ 类的 (因为 $x \mapsto \|x\|^2$ 是这样的), 并且满足定理的要求.

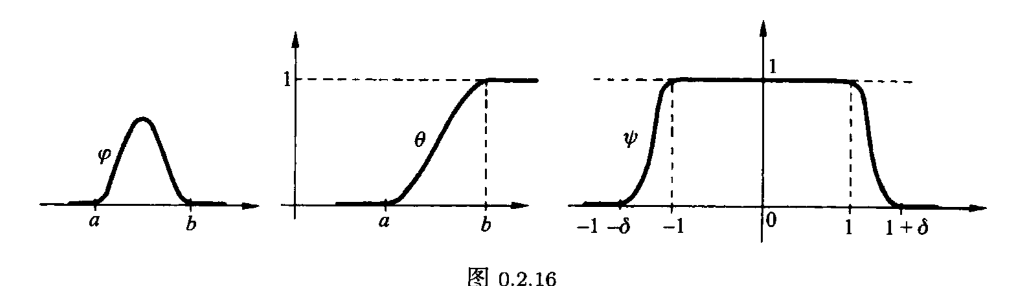


图 0.2.16

0.2.17　微分同胚. 局部逆映射定理

现在要引用的结果的证明可以在 [2], §47.4 和 47.5 中找到, 0.2.22 的结果是例外, 它的证明可以在 [1] 的 56 页找到.

0.2.18　定义

设 E 和 F 是两个巴拿赫空间, U 是 E 的一个开集, 而 V 是 F 的一个开集. 称从 U 到 V 内的一个映射 f 是一个 $C^p(p \geqslant 1)$ 微分同胚, 如果

1) $f \in C^p(U;F)$;

2) f 是双射;

3) $f^{-1} \in C^p(V;E)$.

0.2.19　注释

如果 f 是从 U 到 V 上的一个 C^p 微分同胚, 则对于 U 的所有 x, $f'(x) \in \mathrm{Isom}\,(E;F)$, 并且 $(f'(x))^{-1} = (f^{-1})'(f(x))$.

事实上, 对于 $f^{-1}\circ f = \mathrm{Id}_E$ 和 $f\circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F$ 微分得

$$(f^{-1})'(f(x))\circ f'(x) = \mathrm{Id}_E \quad \text{及} \quad f'(x)\circ (f^{-1})'(f(x)) = \mathrm{Id}_F.$$

0.2.20　定义

如果 $f'(x) \in \mathrm{Isom}\,(E;F)$, 则称一个从 U 到 V 的 ($C^p(p \geqslant 1)$ 类的) 映射 f 在 x 是平展的, 称它在 U 上是平展的, 如果它在 U 的所有点是平展的.

0.2.21　例子

映射 $f: \mathbf{R}^* \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$, 其定义是

$$f(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \quad (\text{极坐标}),$$

是平展的. 其雅可比矩阵

$$f'(\rho,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix}$$

的行列式是 $\rho \neq 0$.

这个映射不是一个微分同胚 (关于 θ 是周期的), 但是当把它限制在 $\mathbf{R}^* \times (0, 2\pi)$ 时, 将是微分同胚.

在一般情形下, 如果 f 是一个微分同胚, 则 f 是平展的, 而如果它是平展的, 则它局部地是一个微分同胚.

0.2.22　定理 (局部逆映射定理, 参见 [1], 1.4.2.1)

设 U 和 V 分别是巴拿赫空间 E 和 F 的开集, $f \in C^p(U;V)$ 是在 $x_0 \in U$ 平展的一个映射. 则存在 U 的含 x_0 的一个开集 U', 使得 f 在 U' 上的限制是一个从 U' 到 $f(U')$ 上的微分同胚 (即 f 局部地是一个微分同胚).

0.2.22.1　提醒一下, 即使 f 处处是平展的, 它也未必是一个单射; 比如从 $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}^2 - \{0\}$ 的映射 $(\rho,\theta) \mapsto (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$.

0.2.23 定义

设 E 和 F 是巴拿赫空间, U 是 E 的一个开集, f 是从 U 到 F 内的一个 C^p 类的映射. 如果 $f'(x)$ 是单射 (满射), 则说 f 在 x 是一个浸入 (浸没).

下面的两个基本定理 ([2] 中的定理) 表明, 如果 f 是一个浸入或一个浸没, 那么除了一个 (在前或在后复合的) 微分同胚外, f 局部地是一个满射的或单射的线性映射 (即映射的局部性状跟其导数的一致).

0.2.24 定理 ([2], 47.5.3)

设 U 是 $\mathbf{R}^m$ 的一个开集, f 是从 U 到 $\mathbf{R}^n$ 的一个 C^p 类的映射, 它在 x 是一个浸入. 则存在 $V \in O_{f(x)}(\mathbf{R}^n)$ 和 $U' \in O_x(\mathbf{R}^m)$, 使得 $f(U') \subset V$, 又存在一个从 V 到 $\mathbf{R}^n$ 的一个开集 $g(V)$ 上的 C^p 微分同胚 g, 使得 $g \circ f$ 在 U' 上的限制是从 $\mathbf{R}^m \times \{0\}^{n-m}$ 到 $\mathbf{R}^n$ 内的典范单射在 U' 上的限制.

0.2.25 例子

$m = 1, n = 2$: 考虑 "曲线弧":

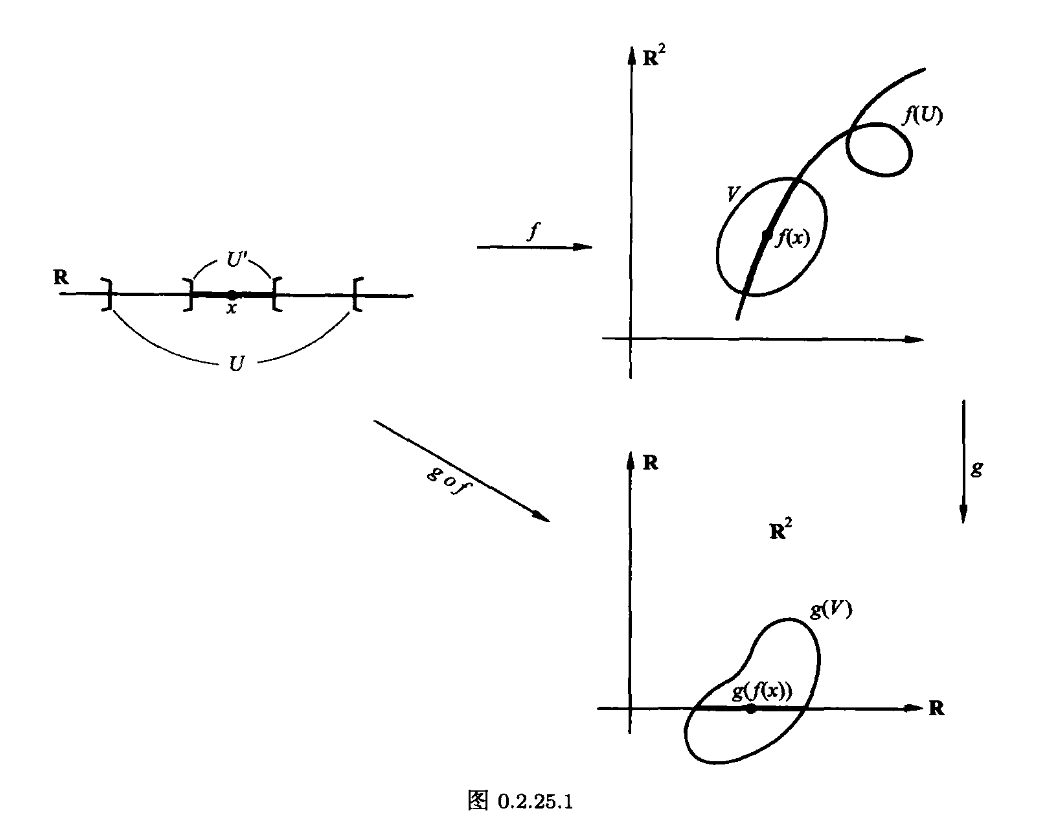


图 0.2.25.1

"局部的" 这一限制的必要性从重点的出现可以看出: 对于太大的一个开集 U', 没有双射性.

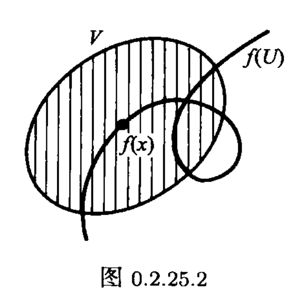


图 0.2.25.2

0.2.26　定理 ([2], 47.5.4)

设 U 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个开集，f 是从 U 到 $\mathbf{R}^m$ 的一个 C^p 类的映射，它在 x 是一个浸没. 则存在 $U' \in O_x(\mathbf{R}^n)$，使得 $f(U') \subset V$，和一个从 U' 到 $g(U') \in O(\mathbf{R}^n)$ 的微分同胚 g，使得如果 π 是从 $\mathbf{R}^n$ 到 $\mathbf{R}^m$ 的典范投影，则 f 在 U' 上的限制等于 $\pi \circ g$.

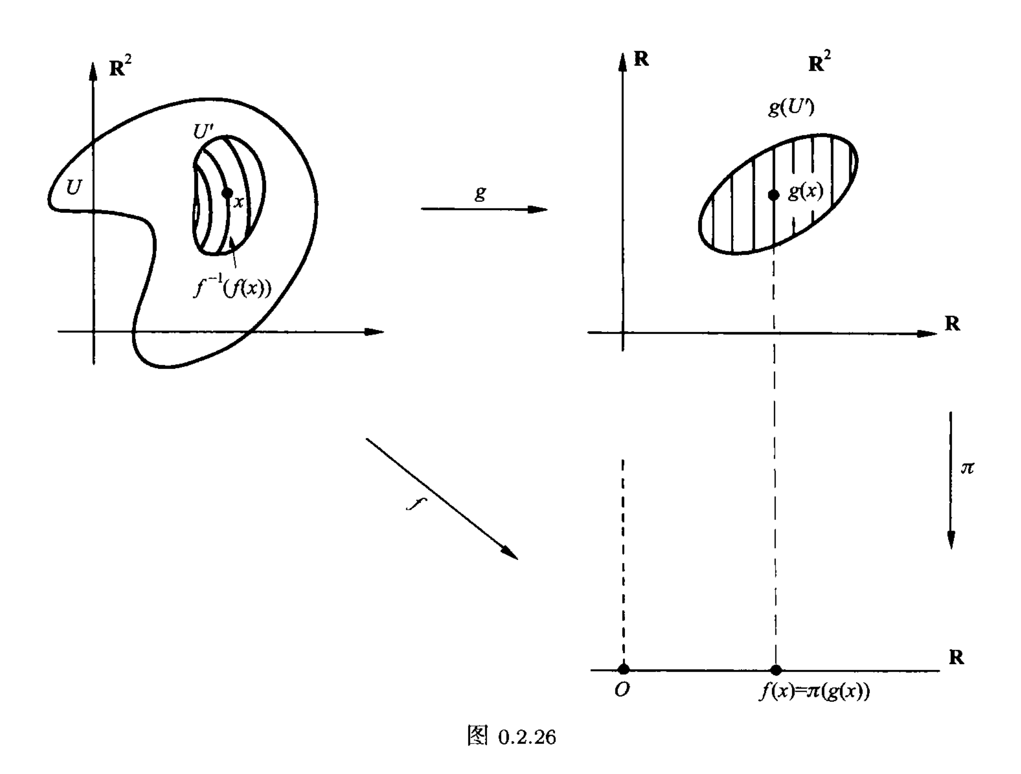


图 0.2.26

定理 0.2.26 可以用来在 U' 内解方程 $f(z)=f(x)$. 这是因为解 $z \in g^{-1}(\pi^{-1}(f(x)))$，而 $\pi^{-1}(f(x))$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个 $n-m$ 维仿射子空间同 $g(U')$ 的交，该子空间容易用参数表示，而 $g^{-1}(\pi^{-1}(f(x)))$ 是这个 (被 $g(U')$ 截断的) 子空间在 g 的逆 g^{-1} 这个微分同胚下的像. 这正是"隐函数"定理 ([1], 1.4.7.1)

0.3 向量空间的开集上的微分形式

下面的定义和记号在第 5 章会做稍许修改, 见 5.2.7.

0.3.1 定义

设 E 是 n 维空间, $U \in O(E)$. 从 U 到 $\Lambda^r E^*$ 的一个 C^p 类映射称为 U 上的 r 阶 C^p 微分形式.

U 上的 r 阶 C^p 微分形式的向量空间记做 $\underline{\Omega}_p^r(U) = C^p(U; \Lambda^r E^*)$, 当可微性的阶 p 无须明确时, 就简单地记做 $\underline{\Omega}^r(U)$.

0.3.2 向量空间

$$\underline{\Omega}_p^*(U) = \bigoplus_{r=0}^{n} \underline{\Omega}_p^r(U)$$

是一个结合的和反交换的代数, 其乘法定义为

$$(\alpha \wedge \beta)(x) = \alpha(x) \wedge \beta(x), \quad \forall x \in U.$$

0.3.3 注释

由于 $\Lambda^0 E^* = \mathbf{R}$, 故有 $\underline{\Omega}_p^0(U) = C^p(U) = C^p(U; \mathbf{R})$.

0.3.4 例子

设 U 是 n 维向量空间 E 的一个空间, $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 是 E 的一个基底. 而 $\{e_1^*, \cdots, e_n^*\}$ 是 E^* 的对偶基底.

设 $f \in C^p(U)$, 而 $x = (x_1, \cdots, x_n)$ 是 U 的一个点. 从 U 到 $\Lambda^1 E^*$ 的映射

$$x \mapsto f'(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} e_i^*$$

是 C^{p-1} 类的, 故属于 $\underline{\Omega}_{p-1}^1(U)$.

0.3.5 在基底下的分解

设 $\alpha \in \underline{\Omega}_p^r(U)$, 由于对于 $x \in U$, $\alpha(x) \in \Lambda^r E^*$, 而我们知道 $\Lambda^r E^*$ 的一个基底 (参见 0.1.3), 故存在数 $\alpha_{i_1 \cdots i_r}(x) = \alpha_I(x)$, 使得

$$\alpha(x) = \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_r \leqslant n} \alpha_{i_1 \cdots i_r}(x) e_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_r}^*.$$

0.3.5.1 如果把记号

$$e_I^* = e_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_r}^* \in \underline{\Omega}_\infty^r(\mathbf{R}^n)$$

也看作取常值的映射 $x \mapsto e_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_r}^*$ 的记号, 则有

0.3.6 $$\boxed{\alpha = \sum_I \alpha_I e_I^* = \sum_{i_1 < \cdots < i_r} \alpha_{i_1 \cdots i_r} e_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_r}^*}$$

而 $\alpha \in \underline{\Omega}_p^r(U)$ 当且仅当 $\forall I, \alpha_I \in C^p(U)$.

0.3.7 微分形式的拉回像

命题 设 U 和 V 分别是向量空间 E 和 V 的开集. 若 $f \in C^p(U;V)$, $p \geqslant 1$, 而 $\beta \in \underline{\Omega}^r_{p-1}(V)$. 则由

$$(f^*\beta)(x) = (f'(x))^*(\beta(f(x))), (x \in U)$$

定义的映射 $f^*\beta$ 是 r 阶 $p-1$ 类的微分形式. 映射 f^* 是从 $\underline{\Omega}^r_{p-1}(V)$ 到 $\underline{\Omega}^r_{p-1}(U)$ 的线性映射.

0.3.7.1 证明

把 $f^*\beta$ 表示成适当的复合映射 (细节参见 [5], 34 页), 特别要应用 0.1.8 的结果:

$$L(E;F) \ni f \mapsto f^* \in L(\Lambda^r F^*; \Lambda^r E^*)$$

是 C^∞ 类的, 因为它是多项式映射.

0.3.8 另外一个证明由取坐标系和对 $f^*\beta$ 进行的实际计算组成.

设 $\{f_1, \cdots, f_m\}$ 是 F (m 维的) 的一个基底. 则对于 V 的所有 y,

$$\beta(y) = \sum_I \beta_I(y) f_I^*,$$

其中 $\beta_I(y) \in C^{p-1}(V)$, 于是对于 $x \in U$, 则有

$$(f'(x))^*\beta(f(x)) = \sum_I (\beta_I \circ f)(x)(f'(x))^* f_I^*.$$

设

$$f_I^* = f_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge f_{i_r}^*,$$

则对于 E 的 $u_1, \cdots, u_r$ 有

$$\begin{aligned} &(f'(x))^*(f_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge f_{i_r}^*)(u_1, \cdots, u_r) \\ &= (f_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge f_{i_r}^*)(f'(x)(u_1), \cdots, f'(x)(u_r)) \\ &= ((f_{i_1}^* \circ f')(x) \wedge \cdots \wedge (f_{i_r}^* \circ f')(x))(u_1, \cdots, u_r). \end{aligned}$$

考虑从 U 到 $\mathbf{R}$ 的映射 $f_{i_k}^* \circ f$, 我们有

$$(f_{i_k}^* \circ f)'(x) = f_{i_k}^{*\prime}(f'(x)).$$

而 $f_{i_k}^*$ 是线性的, 其导数就是它自己, 终于得到公式

0.3.8′ $$(f'(x))^*\beta(f)(x) = \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_r} (\beta_{i_1\cdots i_r} \circ f)(x)(f_{i_1}^* \circ f)'(x) \wedge \cdots \wedge (f_{i_r}^* \circ f)'.$$

0.3.9
$$\begin{aligned} &f^*(\alpha + \beta) = f^*(\alpha) + f^*(\beta), \\ &f^*(\alpha \wedge \beta) = f^*(\alpha) \wedge f^*(\beta). \end{aligned}$$

于是 f^* 是一个代数同态映射.

0.3.10 注释

0.3.10.1 如果 $\beta \in \underline{\Omega}^0_{p-1}(V)$, 则 $f^*\beta = \beta \circ f$.

0.3.10.2 如果 $E = F$, 而 $\beta(x) = b(x)e_1^* \wedge \cdots \wedge e_n^*$($E$ 的维数是 n), 则

$$f^*(\beta)(y) = a(y)e_1^* \wedge \cdots \wedge e_n^*, \quad 其中 \quad a = J(f) \cdot (b \circ f).$$

$J(f)$ 是 $f \in C^p(U; E)$ 的雅可比行列式 (参见 0.2.8.9) (这由 0.1.12.1 得到). 换言之, 如果令

0.3.10.3
$$\omega_0 = e_1^* \wedge \cdots \wedge e_n^*,$$

(参见 0.3.5), 则

0.3.10.4
$$\boxed{f^*(b \cdot \omega_0) = (b \circ f) \cdot J(f) \cdot \omega_0}.$$

如果 E, F, G 是三个有限维向量空间,

$$U \in O(E), \quad V \in O(F), \quad W \in O(G), \quad 并且 \quad f \in C^p(U; V), \quad g \in C^p(V; W)$$

则对于 $g \circ f \in C^p(U; W)$, 在整个 $\underline{\Omega}^r_{p-1}(W)$ 上有

0.3.10.5
$$(g \circ f)^* = f^* \circ g^*.$$

0.3.11 E 的开集上的密度

我们注意到, 当 E 是一个有限维向量空间时, Dens(E) 是一条半直线. 事实上, 固定一个 $\delta_0 \in$ Dens(E), 则根据 0.1.29.1, Dens$(E) = \mathbf{R}_+^* \cdot \delta_0$. 于是可以给出

0.3.11.1 定义

$U \in O(E)$ 上的 C^p 类密度是一个 $\delta \in C^p(U; \mathrm{Dens}(E))$. 它们的集合记做 $\underline{\Delta}_p(U)$.

如果固定 $\delta_0 \in$ Dens(E), 这就回到给定

$$f \in C^p(U; \mathbf{R}_+^*): \quad \delta = f \cdot \delta_0.$$

例如, 如果 $U \in O(\mathbf{R}^d)$. 那么映射 $U \ni x \mapsto \delta_0(x) = \delta_0 \in \mathrm{Dens}(\mathbf{R}^d)$ 仍然记做 δ_0, 并且称为典范密度 (参考 0.1.26). 而所有 $\delta \in \underline{\Delta}_p(U)$ 都有形式 $f \cdot \delta_0$, 其中 $f \in C^p(U; \mathbf{R}_+^*)$.

现在, 重复 0.1.29.3, 0.3.7 和 0.3.10.4 的步骤, 对于 $f \in C^p(U; V)$ 和 $\delta \in \underline{\Delta}_{p-1}(V)$, 这里 $U \in O(E), V \in O(F)$, 在 f 是平展的条件下, 定义

0.3.11.2 $f^*\delta \in \underline{\Delta}_{p-1}(U)$.

如果 $E = F = \mathbf{R}^d$, 则有公式

0.3.11.3
$$\boxed{f^*(b \cdot \delta_0) = (b \circ f) \cdot |J(f)|\delta_0}.$$

并且仍然有

$$(g \circ f)^* = f^* \circ g^*.$$

0.3.12 外微分

定理 设 E 是一个 n 维实向量空间, 而 U 是 E 的一个开集. 则对于 $r = 0, 1, \cdots, n-1$, 存在唯一的一个定义在 $\underline{\Omega}_p^r(U)$ 上, 在 $\underline{\Omega}_{p-1}^{r+1}(U)$ 取值的运算 d, 满足条件:

(i) d 是可加的;

(ii) $\mathrm{d}(\alpha \wedge \beta) = \mathrm{d}\,\alpha \wedge \beta + (-1)^{\deg \alpha} \alpha \wedge \mathrm{d}\,\beta$;

(iii) $\mathrm{d}\,(d\alpha) = 0$;

(iv) 如果 $f \in \underline{\Omega}_p^0(U)$, 则 $\mathrm{d}\,f = f'$.

这个运算称为**外微分**.

为了验证定理, 只需利用在 0.3.6 所给的表示:

$$\alpha = \sum_I \alpha_I e_I^*, \quad \text{其中} \quad \alpha_I \in C^p(U).$$

而如果 d 是可加的并且满足 (ii), 那么

$$\mathrm{d}\,\alpha = \sum_I \mathrm{d}\,\alpha_I \wedge e_I^* + \sum_I \alpha_I \wedge \mathrm{d}\,e_I^*.$$

设 $I = (i_1, \cdots, i_r)$, 现在考虑

$$e_I^* = e_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_r}^*.$$

由于 $e_{i_1}^*$ 其实是 E 上的相对于基底 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 的坐标函数, 我们有

$$(e_{i_1}^*)' = e_{i_1}^* \quad (\text{根据例子 } 0.2.8.3).$$

由于 $e_{i_1}^*$ 在 U 上的限制属于 $\underline{\Omega}_p^0(U)$, 于是根据 (iv) 得 $e_{i_1}^* = \mathrm{d}\,(e_{i_1}^*)$. 再根据 (iii) 可得 $\mathrm{d}\,(e_{i_1}^*)=0$, 则留下的是

$$\mathrm{d}\left(\sum_I \alpha_I e_I^*\right) = \sum_I \mathrm{d}\,\alpha_I \wedge e_I^* = \sum_I \alpha_I' \wedge e_I^*. \tag{0.3.12.1}$$

其中 α_I' 像在 0.3.4 中那样定义.

这就证明了映射 d 的唯一性. 可以直接验证 0.3.12.1 满足 (i), (ii) 和 (iii). 还需要验证的是 (iv). 为此只需证明: 如果 $f \in \underline{\Omega}_p^0(U)$, 则 $\mathrm{d}\,(\mathrm{d}\,f) = 0$ (其中 $p \geqslant 2$). 利用 (i), (ii) 和 (iii) 直接计算得到

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} e_i^*\right) &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} e_j^*\right) \wedge e_i^* \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} e_j^* \wedge e_i^*.
\end{aligned}$$

由于

$$e_i^* \wedge e_i^* = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \text{ (施瓦尔茨定理, 0.2.13)},$$

以及

$$e_j^* \wedge e_i^* = -e_i^* \wedge e_j^*,$$

则上式的值是零.

f^* 和 d 这两个运算使得下列图表是交换的

0.3.13

$$\begin{array}{ccc} \Omega_p^r(U) & \xleftarrow{f^*} & \Omega_p^r(V) \\ \downarrow \mathrm{d} & & \downarrow \mathrm{d} \\ \Omega_{p-1}^{r+1}(U) & \xleftarrow{f^*} & \Omega_{p-1}^{r+1}(V) \end{array} \qquad \mathrm{d} \circ f^* = f^* \circ \mathrm{d}.$$

上面给出的外微分表达式用到了 $\Lambda^r E^*$ 的典范基底. 还可以建立下面的内蕴公式 (在 [5] 的 24 页是取作定义的):

设 $\alpha \in \Omega_p^r(U)$, 而 $\xi_0, \cdots, \xi_r$ 是 E 的元素, 对于 $x \in U$ 有

0.3.14

$$\mathrm{d}\,\alpha(x)(\xi_0, \cdots, \xi_r) = \sum_{i=0}^{r} (-1)^i \alpha'(x)(\xi_i)(\xi_0, \cdots, \widehat{\xi_i}, \cdots, \xi_r).$$

(在这个公式里, $\alpha'(x)$ 表示从 U 到 $\Lambda^r E^*$ 内的映射的导数, 而 $(\xi_0, \cdots, \widehat{\xi_i}, \cdots, \xi_r)$ 表示在 $(\xi_0, \cdots, \xi_r)$ 里去掉 ξ_i). 事实上, 设 $\alpha = \sum_I \alpha_I e_I^*$: 从 U 到 $\Lambda^r E^*$ 内的函数的坐标函数是 α_I, α 的导数 $\alpha'(x)$ 是从 E 到 $\Lambda^r E^*$ 内的线性映射, 其坐标函数是

$$x \mapsto \alpha_I'(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \alpha_I}{\partial x_k}(x) e_k^*.$$

如果 $u \in E$, 则

$$\alpha'(x)(u) = \sum_I \alpha_I'(x)(u) e_I^* = \sum_I \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \alpha_I}{\partial x_k}(x) e_k^*(u) \right) e_I^*.$$

由于 $\alpha'(x)(u) \in \Lambda^r E^*$, 我们有

$$\alpha'(x)(\xi_i)(\xi_0, \cdots, \widehat{\xi_i}, \cdots, \xi_r) = \sum_I \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \alpha_I(x)}{\partial x_k} e_k^*(\xi_i) \right) e_I^*(\xi_0, \cdots, \widehat{\xi_i}, \cdots, \xi_r).$$

现在考虑 $\mathrm{d}\,\alpha(x)(\xi_0, \cdots, \xi_r)$. 根据 0.3.12.1, 我们有

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\,\alpha(x)(\xi_0, \cdots, \xi_r) &= \sum_I \alpha_I'(x) \wedge e_I^*(\xi_0, \cdots, \xi_r) \\ &= \sum_I \left(\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \alpha_I(x)}{\partial x_k} e_k^* \right) \wedge e_I^* \right) (\xi_0, \cdots, \xi_r) \\ &= \sum_I \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \alpha_I(x)}{\partial x_k} e_k^* \wedge e_I^* \right) (\xi_0, \cdots, \xi_r). \end{aligned}$$

而如果

$$e_I^* = e_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_r}^*,$$

根据 0.1.2 的公式我们得到

$$(e_k^* \wedge e_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_r}^*)(\xi_0, \cdots, \xi_r) = \sum_{\sigma \in \mathscr{S}_{r+1}} \varepsilon_\sigma e_k^*(\xi_{\sigma(0)}) e_{i_1}^*(\xi_{\sigma(1)}) \cdots e_{i_r}^*(\xi_{\sigma(r)}).$$

在这个和里, 对于固定的 i, 合并 $\sigma(0) = i$ 的项, 则有

$$(e_k^* \wedge e_I^*)(\xi_0, \cdots, \xi_r) = \sum_{i=0}^{r} e_k^*(\xi_i) \left(\sum_{\substack{\sigma \in \mathscr{S}_{r+1} \\ \sigma(0)=i}} \varepsilon_\sigma e_{i_1}^*(\xi_{\sigma(1)}) \cdots e_{i_r}^*(\xi_{\sigma(r)}) \right).$$

由于 $\sigma(0) = i$, σ 把 $\{1, \cdots, r\}$ 映射到 $\{0, \cdots, i-1, i+1, \cdots, r\}$ 上. 考虑 $\tau \in \mathscr{S}_{r+1}$, 其定义是

$$\tau(0) = i, \tau(1) = 0, \cdots, \tau(i) = i-1; \quad \tau(i+1) = i+1, \cdots, \tau(r) = r.$$

我们有 $(\sigma \circ \tau^{-1})(i) = \sigma(0) = i$, 故 $\sigma \circ \tau^{-1} = \sigma'$. 保持 i 固定, 而使 $\{0, \cdots, i-1, i+1, \cdots, r\}$ 中的元素彼此置换, 置换结果是

$$\sigma'(0) = \sigma(1), \cdots, \sigma'(i-1) = \sigma(i), \sigma'(i+1) = \sigma(i+1), \cdots, \sigma'(r) = \sigma(r).$$

因此得

$$e_{i_1}^*(\xi_{\sigma(1)}) \cdots e_{i_r}^*(\xi_{\sigma(r)}) = e_{i_1}^*(\xi_{\sigma'(0)}) \cdots e_{i_r}^*(\xi_{\sigma'(r)})$$

(右端 $\sigma'(i)$ 不出现).

由于 $\varepsilon(\sigma \circ \tau^{-1}) = \varepsilon(\sigma') = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau^{-1})$, 而 $\varepsilon(\tau^{-1}) = (-1)^i$ (有 i 次对换), 故得

$$\sum_{\substack{\sigma \in \mathscr{S}_{r+1} \\ \sigma(0)=i}} \varepsilon_\sigma e_{i_1}^*(\xi_{\sigma(1)}) \cdots e_{i_r}^*(\xi_{\sigma(r)}) = (-1)^i \sum_{\sigma' \in \mathscr{S}_r} \varepsilon_{\sigma'} e_{i_1}^*(\xi_{\sigma'(0)}) \cdots e_{i_r}^*(\xi_{\sigma'(r)}),$$

进而

$$(e_k^* \wedge e_I^*)(\xi_0, \cdots, \xi_r) = \sum_{i=0}^{r} (-1)^i e_k^*(\xi_i) e_I^*(\xi_0, \cdots, \widehat{\xi_i}, \cdots, \xi_r).$$

于是有等式

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\,\alpha(x)(\xi_0, \cdots, \xi_r) &= \sum_{i=0}^{r} (-1)^i \left(\sum_I \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \alpha_I}{\partial x_k} e_k^*(\xi_i) \right) e_I^*(\xi_0, \cdots, \widehat{\xi_i}, \cdots, \xi_r) \right) \\ &= \sum_{i=0}^{r} (-1)^i \alpha'(x)(\xi_i)(\xi_0, \cdots, \widehat{\xi_i}, \cdots, \xi_r). \end{aligned}$$

0.3.15 微分形式的连续族

0.3.15.1 定义

给定一个区间 $J \subset \mathbf{R}$ 和一个映射 $\alpha : J \times U \to \Lambda^r E^*$, 如果 α 满足条件: 对于所有 $t \in J$, 有$\{x \mapsto \alpha(t,x)\} \in C^p(U; \Lambda^r E^*)$, 并且 $x \mapsto \alpha(t,x)$ 的 p 阶导数在 $J \times U$ 上连续, 则称 α 是在 $U \in O(E)$ 上的 r 阶 C^p-微分形式的带一个参数的连续族.

如果 α 是一个这样的族, 则对于 J 的每个 t, α 在 $\{t\} \times U$ 上的限制属于 $\underline{\Omega}_p^r$. 注意 J 不必是开区间.

0.3.15.2 例

如果我们考虑 $\mathbf{R}$ 的一个区间 J 和一个属于 $C^p(J \times U, \Lambda^r E^*)$ 的映射 α, 上述定义的条件是满足的.

设 α 是在 U 上的 r 阶 C^p- 微分形式的与 $\mathbf{R}$ 的一个区间 J 关联的带一个参数的连续族, 而 a 和 b 是 J 的点, 满足 $a < b$, 记 $I = [a, b]$. 由于对于 U 的所有 x, $\alpha|_{I \times \{x\}}$ 是连续的 ($k = 0$ 时定义的条件), 我们可以在一个关于实变量的且在一个有限维向量空间 (这里是 $\Lambda^r E^*$) 取值的函数的通常积分 (参见 0.4.7) 的意义下定义

0.3.15.3
$$\int_a^b \alpha(t,u)\,\mathrm{d}\,t.$$

进而, 我们可以考虑从 U 到 $\Lambda^r E^*$ 的映射

0.3.15.4
$$u \mapsto \int_a^b \alpha(t,u)\,\mathrm{d}\,t,$$

记这个映射为

$$\int_a^b \alpha_t \mathrm{d}\,t.$$

0.3.15.5 命题

U 的点 u 对应于 $\int_a^b \alpha(t,u)\mathrm{d}\,t$ 的映射 $\int_a^b \alpha_t \mathrm{d}\,t$ 属于 $\underline{\Omega}_p^r(u)$.

结果由积分号 $\int$ 下求导数推出: 0.4.8, 0.4.8.1 和 0.4.8.2.

0.3.15.6 引理

如果 α 是在 U 上的 $r(r \leqslant n-1, n$ 是 E 的维数) 阶 C^1- 微分形式的与 $\mathbf{R}$ 的一个区间 J 关联的带一个参数的连续族, 而 U 是 E 的一个开集. 则对于 J 的 a 和 b, 我们有

$$\mathrm{d}\left(\int_a^b \alpha_t \mathrm{d}\,t\right) = \int_a^b \mathrm{d}\,\alpha_t \mathrm{d}\,t.$$

必须注意到这个等式有意义, 这是因为

$$\alpha_t \in \underline{\Omega}_1^r(u), \quad \text{从而存在 } \mathrm{d}\,(\alpha_t) \in \underline{\Omega}_0^{r+1}(u).$$

根据 0.3.15.5, 映射

$$\int_a^b \alpha_t \mathrm{d}\, t \in \underline{\Omega}_1^r(U), \quad 从而 \quad \mathrm{d}\int_a^b \alpha_t \mathrm{d}\, t \in \underline{\Omega}_0^{r+1}(U).$$

设 $\xi_0, \cdots, \xi_r$ 是 E 的元素, 根据 0.3.14, 我们有

$$\begin{aligned} D &= \left(\mathrm{d}\left(\int_a^b \alpha dt\right)\right)(x)(\xi_0, \cdots, \xi_r) \\ &= \sum_{i=0}^{r} (-1)^i \left(\int_a^b \alpha(t,x)\mathrm{d}\, t\right)'_x (\xi_i)(\xi_0, \cdots, \widehat{\xi_i}, \cdots, \xi_r), \end{aligned}$$

其中 $\left(\int_a^b \alpha(t,x)\mathrm{d}\, t\right)'_x$ 是函数

$$x \mapsto \int_a^b \alpha(t,x)\mathrm{d}\, t$$

关于 x 的导数. 根据 0.4.8 和 0.4.7, 即得

$$\begin{aligned} D &= \sum_{i=0}^{r} (-1)^i \left(\int_a^b \frac{\partial \alpha}{\partial x}(t,x)(\xi_i)\mathrm{d}\, t\right)(\xi_0, \cdots, \widehat{\xi_i}, \cdots \xi_r) \\ &= \sum_{i=0}^{r} (-1)^i \left(\int_a^b \frac{\partial \alpha}{\partial x}(t,x)(\xi_i)(\xi_0, \cdots, \widehat{\xi_i}, \cdots \xi_r)\mathrm{d}\, t\right) \\ &= \int_a^b \left(\sum_{i=0}^{r} (-1)^i \frac{\partial \alpha}{\partial x}(t,x)(\xi_i)(\xi_0, \cdots, \widehat{\xi_i}, \cdots \xi_r)\right)\mathrm{d}\, t \end{aligned}$$

再次利用 0.3.14 和 0.4.7, 我们得到

$$D = \int_a^b (\mathrm{d}\, \alpha_t(x)(\xi_0, \cdots, \xi_r))\mathrm{d}\, t = \left(\int_a^b \mathrm{d}\, \alpha_t \mathrm{d}\, t\right)(x)(\xi_0, \cdots, \xi_r).$$

引理得证.

0.4 积 分 法

系统讲述积分的参考文献是 [6].

对于流形我们需要的积分理论是拉东测度理论.这个理论考虑的是局部紧拓扑空间 X, 这是紧集的可数族的并. 事实上, [6] 为了使其 37 页的引理成立, 附加了条件 X 是可度量的, 但是流形自动满足这个引理的条件, 参见 3.3.11.1.

我们用 $K(X)$ 表示有紧支集的函数 $f \in C^0(X)$ 的空间. 一个拉东测度是 $K(X)$ 上的正的线性型 μ, 参见 [6], 1.12.3. 积分理论把这个线性型 μ 延拓到一个包含 $K(X)$

的空间, 后者称为对于 μ 可积函数空间, 记为 $L^1(X)$. 我们将记之为

0.4.1
$$L^1(X) = C_\mu^{\text{int}}(X).$$

对于 $f \in C_\mu^{\text{int}}(X)$, 我们使用记号

0.4.2
$$\mu(f) = \int_X f \cdot \mu.$$

0.4.3

0.4.3.1 在 $\mathbf{R}$ 上存在一个典范测度 μ_0, 叫做勒贝格测度: 见 [6], 10 页的例子. 对于 $f \in K(\mathbf{R}^n)$, $\mu(f)$ 就是称为黎曼积分的普通积分. 在 $U \in O(\mathbf{R}^n)$ 上也有勒贝格的典范积分 μ_0.

0.4.3.2 如果 μ 是 X 上的测度, $a \in C^0(X;\mathbf{R}_+)$, 我们用 $(a\mu)(f) = \mu(a \cdot f)$ 定义一个测度 $a\mu$. 根据 [6], §1.11.1, $f \in C_{a\mu}^{\inf}(X)$ 蕴涵 $af \in C_\mu^{\inf}(X)$, 并且

$$\int_X f(a\mu) = \int_X (af)\mu.$$

0.4.4 对于 X 上的测度 μ, 我们定义零测度 ([6] 中的可忽略) 子集的概念. 对于勒贝格测度, 零测度集是这样的集: 对于任意 $\varepsilon > 0$, 它可以被 $\mathbf{R}^n$ 的立方体的可数族覆盖, 这些立方体的体积之和 (无穷项的) 小于 ε(参见 [6], 10 页的定义).

0.4.4.1 可数个零测度集的并仍是零测度集([6],11 页).

0.4.4.2 对于 $\mathbf{R}^n$ 中的勒贝格测度, 若 $m < n$, 则 $\mathbf{R}^m = \mathbf{R}^m \times \{0\} \subset \mathbf{R}^n$ 是零测度集 (用覆盖准则易证). 随之, 若 $U \in O(\mathbf{R}^n)$, 则 $U \bigcap \mathbf{R}^m$ 是零测度集.

0.4.4.3 设 a 是 X 上的一个正的连续函数, μ 是 X 上的一个测度. 若 A 对于 μ 是零测度集, 则对于 $a \cdot \mu$ 也是零测度集.

把 X 表示成可数个紧集的并, 利用 0.4.4.1 和 [6], 10 页的定义, 并且注意到紧集上的函数是有界的, 即可证明这一事实.

0.4.4.4 我们称一个性质 μ 几乎处处成立 (或几乎处处成立, 如果没有混淆之虞), 如果它除一个零测度集外处处成立. 类似地, 人们还会称一个函数几乎处处定义.

0.4.4.5 设 $U \in O(\mathbf{R}^n), f \in C^1(U;\mathbf{R}^n)$, 而 A 对于 $\mathbf{R}^n$ 的勒贝格测度 μ_0 是零测度集. 则 $f(A)$ 也是零测度集.

事实上, 根据 0.4.4.1, 我们可以假定 A 含于一个集 $U' \subset U$ 内, $\overline{U'}$ 是紧的, 并且 U' 是凸的; 于是可以设 $\|f'\|$ 在 U' 上有一个界 k. 根据 0.2.6, f 是 k- 利普希茨的, 特别说来, $\mathbf{R}^n$ 的体积为 α 的立方体在 f 下的像将含于一个体积为 $k^n \cdot \alpha$ 的立方体内, 由此推出结论.

0.4.4.6 一个特殊情形是: 若 $U \in O(\mathbf{R}^m), f \in C^1(U,\mathbf{R}^n)$, 并且 $n > m$, 则 $f(U)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的零测度集.

为了证明, 只需考虑由 $\hat{f}(x,y)=f(x)$ 定义的映射 $\hat{f}:U\times\mathbf{R}^{n-m}\to\mathbf{R}^n$, 并且注意到 $U\times\{0\}\subset\mathbf{R}^m\times\mathbf{R}^{n-m}$ 是零测度集.

0.4.5 若 X 和 Y 是分别具有测度 μ 和 ν 的空间, 我们在 $X\times Y$ 上定义乘积测度 $\mu\otimes\nu$: 参见 [6], §1.7. 举例来说, 若用 μ_n 表示 $\mathbf{R}^n$ 上的勒贝格测度, 则有 $\mu_{m+n}=\mu_m\otimes\mu_n$, 参见 [6], 19 页的例子. 对于乘积测度, 我们有富比尼定理:

0.4.5.1 设 $f\in C^{\text{int}}_{\mu\otimes\nu}(X\times Y)$, 则对于 ν- 几乎所有的 y, 我们有

$$\{x\mapsto f(x,y)\}\in C^{\text{int}}_{\mu}(X).$$

进而 ν- 几乎处处定义的函数 $y\mapsto\int_X f(x,y)\mu\in C^{\text{int}}_{\nu}(Y)$, 并且

$$\int_{X\times Y} f\mu\otimes\nu=\int_Y\left[\int_X f(x,y)\mu\right]\nu.$$

0.4.6 变量替换公式

给定 $U,V\in O(\mathbf{R}^n)$ 和从 U 到 V 上的微分同构 f (参见 0.2.18). 沿用 0.2.8.9 的记号, 并且设 μ_0 是 $\mathbf{R}^n$ 的勒贝格测度, 我们有下列结果 (参见 [6], 33 页):

$$\text{若 } a\in C^{\text{int}}_{\mu_0}(V),\quad \text{则 } (a\circ f)|J(f)|\in C^{\text{int}}_{\mu_0}(U),$$

并且

$$\int_U (a\circ f)|J(f)|\mu_0=\int_V a\mu_0.$$

0.4.7 向量值函数的积分

前面的所有理论都可以不加修改应用到在有限维向量空间 E 取值的函数. 设 X 是一个空间, 在其中我们在测度 μ 下对于函数进行积分. 设 E^* 是 E 的对偶空间. 对于 $f:X\to E$, 我们规定:

0.4.7.1 $$f\in C^{\text{int}}_{\mu}(X;E)\Leftrightarrow\forall\xi\in E^*:\xi\circ f\in C^{\text{int}}_{\mu}(X).$$

并且我们定义 $\int_X f\cdot u\in E$:

0.4.7.2 $$\xi\left(\int_X f\cdot\mu\right)=\int_X(\xi\circ f)\cdot\mu\quad\forall\xi\in E^*.$$

0.4.7.3 若 $\{e_i\}_{i=1,\cdots,n}$ 是 E 的一个基底, 对于这个基底, $f=(f_1,\cdots,f_n)$, 则

$$\int_X f\cdot\mu=\left(\int_X f_1\cdot\mu,\cdots,\int_X f_n\cdot\mu\right).$$

0.4.8 在积分号下求导数

给定 $U\in O(\mathbf{R}^n)$,$\Lambda\in O(\mathbf{R}^s)$, $f:U\times\Lambda\to E$ (E 是有限维赋范向量空间), μ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的勒贝格测度. 假定 f 满足以下三个条件:

(i) $\forall\lambda : \{x \mapsto f(x,\lambda)\} \in C_\mu^{\text{int}}(U;E)$;

(ii) $\forall x : \lambda \mapsto f(x,\lambda)$ 是可微的, 并且其导数 $\dfrac{\partial f}{\partial\lambda}$ 在 $U \times \Lambda$ 上连续;

(iii) 存在 $h \in C_\mu^{\text{int}}(U)$, 使得对于所有 $\lambda \in \Lambda$ 有

$$\left\|\frac{\partial f}{\partial\lambda}(x,\lambda)\right\| \leqslant h(x).$$

则

(a) $$\left\{x \mapsto \frac{\partial f}{\partial\lambda}(x,\lambda)\right\} \in C_\mu^{\text{int}}(U;L(\mathbf{R}^s;E));$$

(b) $$\lambda \mapsto F(\lambda) = \int_U f(x,\lambda)\mu$$

是可微的;

(c) $$\frac{\partial F}{\partial\lambda} = \int_U \frac{\partial f}{\partial\lambda}(x,\lambda)\mu.$$

0.4.8.1　例如, 当 $x \mapsto f(x,\lambda)$ 在 U 内有与 λ 无关的紧支集时, 条件 (i) 和 (iii) 满足.

0.4.8.2　还应该注意到从这个结果我们可以用归纳法推出一个关于 C^p 类的类似结果. 最后要指出的是在这个结果之前应该先建立一个有关 C^0 的结果.

对于证明, 参见 [6], 26 页, 那里在应用 0.2.8.6 和 0.2.8.7 之后得到上述结果.

0.5 习　　题

0.5.1　设 E 是一个 d 维定向欧几里得向量空间. 证明对于每个 $p(0 \leqslant p \leqslant d)$, 存在一个映射

$$* : \Lambda^p E^* \to \Lambda^{d-p} E^*,$$

其特征是满足条件:

$\forall$ 正标准正交基底 $\{e_i\}_{i=1,\cdots,d}$ 和 $\forall\alpha \in \Lambda^p E^*$: $(*\alpha)(e_{p+1},\cdots,e_d) = \alpha(e_1,\cdots,e_p)$. 通过 d 和 p 计算 $* \circ *$.

0.5.2　给定一个欧几里得向量空间 E, $(.|.)$ 表示 E^* 上的典范标量积. 证明对于所有 $p(0 \leqslant p \leqslant d)$, 公式

$$\|\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_p\|^2 = (\det((\alpha_i|\alpha_j)))^2$$

允许在 $\Lambda^p E^*$ 上定义一个欧几里得结构; 记号 det 表示对于元素为 $(\alpha_i|\alpha_j)$ 的矩阵求行列式.

0.5.3 刘维尔定理

我们考虑在 $\mathbf{R}^n (n \geqslant 3)$ 的开集 U, V 之间的 C^3 类映射 $f: U \to V$, 它是保形的, 这就是说, 对于所有 $x \in U$, 它的导数 $f'(x)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个相似变换 (即一个双射的线性映射, $\dfrac{\|f'(x)y\|}{\|y\|}$ 是常数). 证明 f 是一个相似和一个反演的乘积在 U 上的限制. (需要的话, 参见 [40] 的 9.5 节) 首先要证明数值函数 $u = \|f'(x)\|^{-1}$ 满足两个关系 $\operatorname{grad}^2 u = 2\rho u$ 和 $\operatorname{Hess} u = \rho \|\cdot\|^2$, 其中 ρ 在 U 上是常数. 这里 grad 是函数的梯度, 而 Hess 是其黑塞行列式, 即由其二阶导数定义的二次型. 换句话说, 在典范坐标下, 我们有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = 0 (i \neq j), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \rho, \quad 并且 \sum_i \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 = 2\rho u.$$

由此推出, 或者 u 是常数, 或者 $u = \dfrac{\rho}{2} \sum_i (x_i - a_i)^2$, 其中各个 a_i 是常数.

第一章 微分方程

微分方程除了其本身以及在力学, 物理学中的重要性外, 在微分几何中, 微分方程往往也是一个起本质作用的工具 (例如见 7.2.3 和 8.6.13). 在定义微分方程及这种方程的解的概念之后, 我们把这些概念演变为向量场及这种场的积分曲线的概念. 随后我们证明积分曲线的局部存在性和唯一性定理 (1.2.6).

接下来我们关注如何延拓一条积分曲线为最大积分曲线 (1.3). 进而研究解与初始条件和出现在微分方程中的参数相关的性状 (1.2.7 和 1.4.7). 事实上, 我们把此项研究分为两步: 第一步, 涉及的是一个向量场, 即一个方程 $x' = f(x)$, 其右端不依赖时间 (1.2); 第二步, 我们过渡到情形 $x' = f(x,t)$ (1.4).

在 1.6 节, 前一部分研究线性方程的情形, 这种方程具有非常特殊和基本的性质, 它们的解在定义方程的整个时间区间内存在; 第二部分, 我们叙述若干基本结果, 但不予证明. 虽然这些结果后面不会用到, 不过我们认为对以后不再接受微分方程教育的读者来说应当了解它们.

1.1 概述

给定实数域上的一个巴拿赫空间 E 及从 $\mathbf{R}$ 的一个开区间到 E 内的一个映射 φ. 如果 φ 是可微的, 它对 t 的导数记做 $\varphi'(t)$, 则 $\varphi'(t)$ 是从 $\mathbf{R}$ 到 E 内的一个线性映射, 从而有形式

$$\lambda \mapsto \lambda V,$$

这里 V 是 E 中的一个向量 (即是向量 $\varphi'(t)(1), 1 \in \mathbf{R}$).

在本章, 我们将把 $\varphi'(t)$ 和对应的 V 等同起来, 即认为 $\varphi'(t)$ 属于 E, 而微分映射 φ' 在 E 中取值, 而非在 $L(\mathbf{R}; E)$ 中取值 (参见 0.2.4).

1.1.1 给定 $\mathbf{R} \times E$ 的一个开集 U 及从 U 到 E 的一个连续函数 f. 如果一个从 $\mathbf{R}$ 的一个区间 I 到 E 内的 C^1 类映射 φ 满足条件: 对于 I 的每个 t, $(t, \varphi(t))$ 属于 U, 并且 $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$, 则称 φ 是一阶**微分方程**

$$\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} = f(t, x)$$

的**解**.

事实上, 只需假定 φ 的连续性, φ' 作为连续映射的复合必连续.

在 $E = E_1 \times \cdots \times E_n$ 是实的巴拿赫空间的乘积情形, U 是 $\mathbf{R} \times E_1 \times \cdots \times E_n$ 的一个开集, 而 f 是从 U 到 E 的一个映射, 其分量映射是从 U 到 E_i 内的映射 f_i. 方程 $\dfrac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} = f(t, x)$ 的解由从 $\mathbf{R}$ 的一个区间 I 到 E_i 的 n 个映射 φ_i 确定, 它们满足

(i) $(t, \varphi_1(t), \cdots, \varphi_n(t)) \in U, \quad \forall t \in I,$

(ii) $\varphi_i'(t) = f_i(t, \varphi_1(t), \cdots, \varphi_n(t)), \quad \forall t \in I.$

于是我们得到含 n 个方程的一阶微分方程组 $\dfrac{\mathrm{d}\,x_i}{\mathrm{d}\,t} = f_i(t, x_1, \cdots, x_n)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

1.1.2 n 阶微分方程

仍然是给定一个巴拿赫空间 E, $\mathbf{R} \times E^n$ 的一个开集 U 和一个从 U 到 E 内的连续映射. 我们称形式如

$$\frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}\,t^n} = f\left(t, x, \frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t}, \cdots, \frac{\mathrm{d}^{n-1} x}{\mathrm{d}\,t^{n-1}}\right)$$

的方程称为 n 阶微分方程 .

一个从 $\mathbf{R}$ 的一个区间 I 到 E 内的 C^n 类映射 φ, 满足条件:

(i) $\forall t \in I : (t, \varphi(t), \varphi'(t), \cdots, \varphi^{(n-1)}(t)) \in U,$

(ii) $\forall t \in I : \varphi^{(n)}(t) = f\left(t, \varphi(t), \varphi'(t), \cdots, \varphi^{(n-1)}(t)\right),$

则称 φ 是该 n 阶微分方程的一个解.

必须注意我们把导数和对应的 E 中的向量等同.

1.1.3 命题

n 阶微分方程的研究归结为一阶微分方程的研究.

设 $\dfrac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n} = f\left(t, x, \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \cdots, \dfrac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}}\right)$ 是一个 n 阶微分方程. 我们令

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x_1,\\
&\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = x_2 = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2},\\
&\qquad\vdots\\
&\frac{\mathrm{d}x_{n-2}}{\mathrm{d}t} = x_{n-1} = \frac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}}.
\end{aligned}$$

解 n 阶微分方程归结为确定从 $\mathbf{R}$ 的一个区间 I 到 E 内的 C^1 类映射 $\varphi, \varphi_1, \cdots, \varphi_{n-1}$, 满足

$$\begin{aligned}
&\varphi'(t) = \varphi_1(t)\\
&\varphi_1'(t) = \varphi_2(t)\\
&\qquad\vdots\\
&\varphi_{n-2}'(t) = \varphi_{n-1}(t)\\
&\varphi_{n-1}'(t) = f(t, \varphi(t), \varphi_1(t), \cdots, \varphi_{n-1}(t)).
\end{aligned}$$

设 F 是一个从 U 到 E^n 内的映射, 其坐标函数是

$$\begin{aligned}
&f_1(t, x_1, \cdots, x_n) = x_1,\\
&\qquad\vdots\\
&f_{n-1}(t, x_1, \cdots, x_n) = x_{n-1},\\
&f_n(t, x_1, \cdots, x_n) = f(t, x_1, \cdots, x_n),
\end{aligned}$$

问题就归结为解一阶微分方程

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = F(t, X(t)), \qquad \text{其中 } X(t) = (x_1, \cdots, x_n).$$

于是从理论观点看来, 只需考虑一阶微分方程.

1.2 不依赖时间的微分方程: 局部解的存在性

本节涉及的是 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x)$ 这种类型的方程, 这里 f 是从 E 的一个开集到 E 内的连续映射.

1.2.1 定义

给定向量空间 E 的一个开集 U. 我们称从 U 到 E 的一个映射为 U 上的一个**向量场**.

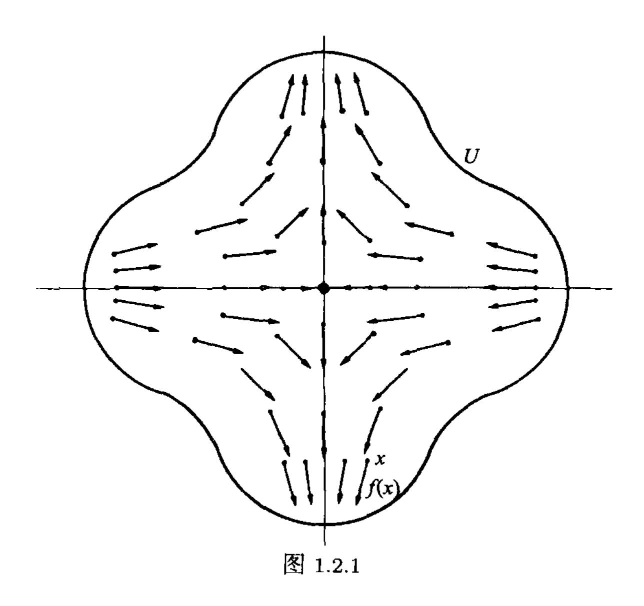


图 1.2.1

今后, 我们将假定 E 是有限维的.

为了更好地适应几何直观和实际应用, 在表示向量场 f 时, 我们把向量 $f(x)$ 放置在点 x, 也就是画出以 x 为起点, $x+f(x)$ 为终点的向量.

如果 f 是连续的 (或同样说成向量场是连续的), 我们可以把向量场和下列方程

$$x' = f(x)$$

紧密联系起来.

1.2.2 定义

如果 U 的 C^p 类曲线 (J,α) (参见 0.2.9.1) 满足条件: $0\in J$, 并且对于所有 $t\in J$ 有 $\alpha'(t)=f(\alpha(t))$, 则 (J,α) 称为向量场 f 的 C^p 类的**积分曲线**. 如果 $\alpha(0)=x_0$, 则

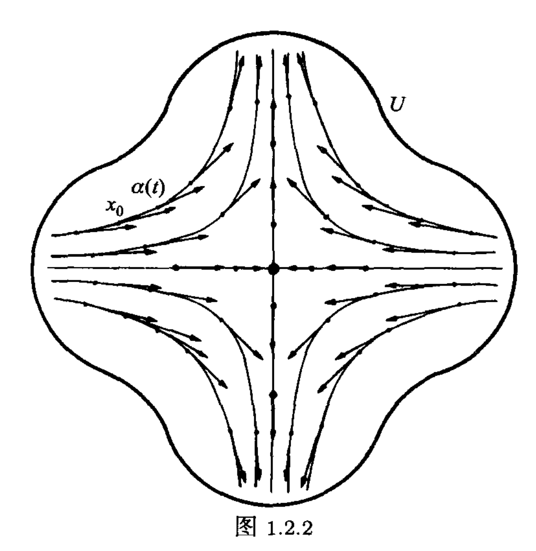


图 1.2.2

称它是**初始条件为** x_0 的积分曲线.

注: 为了方便起见, 在初始条件的表述中要求 $0 \in J$, 这个条件是非本质的. 我们的讨论可以针对任何 J 进行, 而对于 $t_0 \in J$ 和 $x_0 \in U$ 谈论初始条件 $\alpha(t_0) = x_0$.

1.2.3 局部流

定义 设 f 是 U 上的一个向量场. 如果给定了 x_0 的含于 U 的一个邻域 U', 一个含有 0 的开区间 J, 和一个从 $J \times U'$ 到 U 内的映射 α, 满足条件: 对于 U' 的每个 x, α 在 $J \times \{x\}$ 上的限制是初始条件为 x 的积分曲线. 则这三者合起来称为 f 在 x_0 的一个**局部流**.

1.2.4 例

给定 $E = \mathbf{R}^2$, 点 $O(0,0), A(8,0), B(4,4)$. 而 U 表示三角形 OAB 的内部. 我们考虑常值映射 $x \mapsto e_1$ ($x \in E$, e_1 是 $\mathbf{R}^2$ 的规范基底的第一个向量).

积分微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = e_1$ 得到解 $x = te_1 + x_0$(初始值为 x_0), 而 t 的值应当使得向量 $te_1 + x_0$ 留在 U 内.

这样一来, 对于点 $x_0 = (4,2)$, 初始值为 x_0 的积分曲线 (这里是 C^∞ 类的) 的定义区间对应于从 $(-2,2)$ 到 U 内的映射 α, 其定义是 $\alpha(t) = te_1 + x_0$.

以 $x_1 = (2,1)$ 为出发点时, 积分曲线的定义区间将是 $(-1,5)$. 显而易见, 无论从 U 的哪一点出发, 都有一条积分曲线以该点为初始条件.

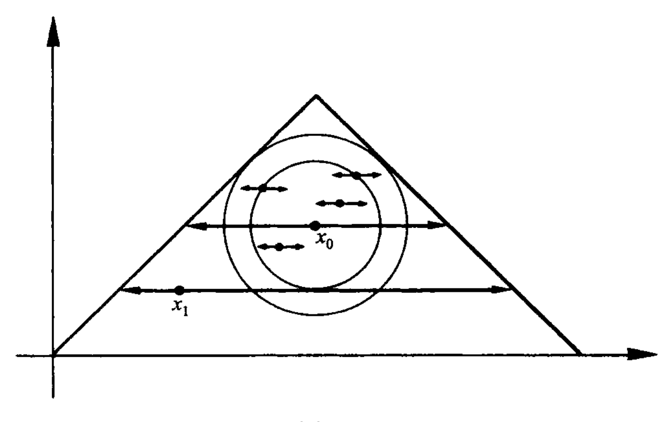


图 1.2.4

再考虑点 $x_0 = (4,2)$. 求在点 x_0 的局部流, 归结为求 x_0 的这样一个邻域 U', 使得不论 y 是 U' 的哪个点, 初始值为 y 的积分曲线都定义在一个与 y 无关的区间 J 上.

比如, 当取 U' 为以 x_0 为中心, 以 1 为半径的开圆 $B(x_0,1)$ 时, 存在一个数 $b > 0$, 使得初始值在 $B(x_0,1)$ 内的所有积分曲线至少定义在 $J = (-b,b)$ 上.

反之, 圆 $U' = B(x_0,\sqrt{2})$ 就不存在这样的区间 J, 因为在 U' 内有任意接近 U 的边界的点, 从这样的点出发的积分曲线的定义区间将有形式 $(-\varepsilon,t_1)$ 或 $(-t_2,\varepsilon)$, 而

ε 可以任意小.

1.2.5 注释

如果我们指出了在点 x_0 的局部流的存在性, 有可能对于 $x \in U'$, 以 x 为初始值的积分曲线定义在比 J 更大的区间上, 这就引发了一个解的延拓问题.

1.2.6 局部流存在定理

给定 U 上的一个 k- 利普希茨的向量场 f, 其中 $k > 0$. 设 x_0 是 U 的一个点, a 是一个正数, 使得

$$\overline{B}(x_0, 2a) \subset U, \quad \text{记} \ \ l = \sup_{x \in \overline{B}(x_0, 2a)} \|f(x)\|.$$

若 $b < \inf\left(\dfrac{a}{l}, \dfrac{1}{k}\right)$, 则存在唯一的在点 x_0 的、定义在 $(-b, b) \times B(x_0, a)$ 上并且在其上连续的局部流 α.

注: 如果 $k = 0$, 结果仍然有效, 关于 b 的条件改为 $b < \dfrac{a}{l}$. 事实上, k- 利普希茨意味 (参见 0.0.13.1) 对于 U 的所有 x 和 x', 有

$$\|f(x) - f(x')\| \leqslant \|x - x'\|;$$

当 $k = 0$ 时, 上述条件变为 $f(x)$ =常量 $= v$. 我们回到了前面的例 1.2.4: 在球 $B(x_0, a)$ 上, 积分曲线由 $t \mapsto tv + x_0$ 给定, 其中的 t 满足

$$\|tv + x_0 - x_0\| < a, \quad \text{即} \ |t| < \frac{a}{\|v\|}.$$

而这里 $\|v\| = l$.

证明:

我们的任务是求一个函数 $\alpha(t, x)$, 满足 $\alpha'_t(t, x) = f(\alpha(t, x))$ 及 $\alpha(0, x) = x$.而这等价于下式成立:

1.2.6.1 $$\alpha(t, x) = \int_0^t f(\alpha(u, x))\mathrm{d}\,u + x.$$

这就引导到考虑映射 S_x, 它使函数 α 对应由

1.2.6.2 $$S_x(\alpha)(t) = x + \int_0^t f(\alpha(u))\mathrm{d}\,u$$

定义的 $S_x(\alpha)$. 1.2.6.1 的解将是 S_x 的不动点 α, 即 α 满足 $S_x(\alpha) = \alpha$. 但这些计算, 只有当 α 在 U 内取值时, $S_x(\alpha)$ 也要在 U 内取值, 才可能进行.

现在考虑点 $x \in B(x_0, a)$ 和定义在 $[-b, b]$ 上的且在 $\overline{B}(x_0, 2a)$ 内取值的连续函数 α 的空间 $\mathscr{M}_x$, α 满足 $\alpha(0) = x$. 我们将要指出, 适当选择 b, 可以使 S_x 映射 $\mathscr{M}_x$ 到 $\mathscr{M}_x$ 内 (于是对于 $\mathscr{M}_x$ 中的 α, $S_x(\alpha)$ 将在 $\overline{B}(x_0, 2a)$ 内取值, 当然更在 U 内取

值). 我们用一致收敛范数使 $\mathscr{M}_x$ 成为赋范空间 (这就解释了引进闭区间 $[-b, b]$ 的必要性, 参见 0.0.8).

由于 $S_x(\alpha)$ 是 $[-b, b]$ 上的连续函数, 只需证明不等式 $\|S_x(\alpha)(t) - x_0\| \leqslant 2a$. 我们有

$$\|S_x(\alpha)(t) - x_0\| \leqslant \|x - x_0\| + \left\|\int_0^t f(\alpha(u))\mathrm{d}\,u\right\| < a + \left|\int_0^t \|f(\alpha(u))\|\,\mathrm{d}\,u\right|.$$

由于 $u \in [-b, b]$ 蕴涵 $\alpha(u) \in \overline{B}(x_0, 2a)$, 进而 $\|f(\alpha(u))\| \leqslant l$, 于是 $\|S_x(\alpha)(t) - x_0\| < a + bl$. 如果取 b 满足

1.2.6.3
$$b \leqslant \frac{a}{l},$$

将有 $\|S_x(\alpha)(t) - x_0\| \leqslant 2a$, 即 $S_x(\alpha) \in \mathscr{M}_x$ (如果 $l = 0$, 显然无需附加任何条件).

现在探讨如何使得 S_x 是压缩的. 为此必须做放大估计

$$\begin{aligned}\|S_x(\alpha) - S_x(\beta)\| &= \sup_{|t|\leqslant b}\left\|\int_0^t (f(\alpha(u)) - f(\beta(u)))\,\mathrm{d}\,u\right\| \\ &\leqslant \sup_{|t|\leqslant b}\left|\int_0^t \|f(\alpha(u)) - f(\beta(u))\|\,\mathrm{d}\,u\right|.\end{aligned}$$

根据假设, f 是 k- 利普希茨的, 这里 $k > 0$, 我们有

$$\|S_x(\alpha) - S_x(\beta)\| \leqslant \sup_{|t|\leqslant b}\left|\int_0^t k\,\|\alpha(u) - \beta(u)\|\,\mathrm{d}\,u\right|.$$

由于 $\|\alpha(u) - \beta(u)\| \leqslant \sup_{|u|\leqslant b}\|\alpha(u) - \beta(u)\| = \|\alpha - \beta\|$, 我们有

$$\|S_x(\alpha) - S_x(\beta)\| \leqslant \sup_{|t|\leqslant b}\left|\int_0^t k\,\|\alpha - \beta\|\,\mathrm{d}\,u\right| = kb\,\|\alpha - \beta\|.$$

映射 S_x 将是压缩的, 如果取 b 满足

1.2.6.4
$$kb < 1.$$

这时就可以对 S_x 应用压缩映射定理 0.0.13.2.

最后同时考虑条件 (1.2.6.3) 和 (1.2.6.4), 当 $b < \inf\left(\dfrac{a}{l}, \dfrac{1}{k}\right)$ 时, 对于每个 $x \in B(x, a)$, 对应的映射 S_x 从 $\mathscr{M}_x$ 到 $\mathscr{M}_x$ 内将是压缩的, 而由于 $[-b, b]$ 是紧的, E 是完备的, 故 $\mathscr{M}_x$ 是一个完备度量空间 (参见 0.0.8). 于是对于每个点 x, 对应映射 S_x 的一个不动点, 即一个从 $[-b, b]$ 到 $\overline{B}(x_0, 2a)$ 内的映射 α_x, 满足条件 $\alpha_x(0) = x$, 并且它在 $(-b, b)$ 的限制满足

$$\frac{\mathrm{d}\,\alpha_x(t)}{\mathrm{d}\,t} = f(\alpha_x(t)).$$

令 $\alpha(t,x)=\alpha_x(t)$, 我们就定义了一个从 $(-b,b)\times B(x_0,a)$ 到 $\overline{B}(x_0,2a)$ 内的映射 α.

α 在 $(-b,b)\times\{x\}$ 的限制就是已经求得的 α_x: 它是初始条件为 x 的积分曲线. 于是我们有了在点 x_0 的一个局部流.

余下的任务是研究这个流的连续性. 尽管对于固定的 x, $\alpha(t,x)$ 作为 t 的函数是连续的, 但是我们应当研究的是对于一对变量 (t,x) 的连续性.

为此目的, 给定属于 $B(x_0,a)$ 的 x 和 y, 以及属于 $[-b,b]$ 的 t 和 s, 我们要指出对于接近 (s,y) 的 (t,x), 量 $\|\alpha(t,x)-\alpha(s,y)\|$ 可以任意小.

我们有

$$\|\alpha(t,x)-\alpha(s,y)\|\leqslant\|\alpha(t,x)-\alpha(s,x)\|+\|\alpha(s,x)-\alpha(s,y)\|,$$
$$\|\alpha_t'(t,x)\|=\|f(\alpha(t,x))\|\leqslant l.$$

根据有限增量定理 (参见 0.2.6)

$$\|\alpha(t,x)-\alpha(s,x)\|\leqslant l|t-s|.$$

至于量 $\|\alpha(s,x)-\alpha(s,y)\|$, 我们有

$$\begin{aligned}\|\alpha(s,x)-\alpha(s,y)\|&=\left\|x+\int_0^s f(\alpha(u,x))\mathrm{d}\,u-y-\int_0^s f(\alpha(u,y))\mathrm{d}\,u\right\|\\&\leqslant\|x-y\|+\left|\int_0^s\|f(\alpha(u,x))-f(\alpha(u,y))\|\mathrm{d}\,u\right|.\end{aligned}$$

由于 f 是 k- 利普希茨连续的, 而且 $|s|\leqslant b$, 令

$$\|\alpha_x-\alpha_y\|=\sup_{|u|\leqslant b}\|\alpha(u,x)-\alpha(u,y)\|,$$

我们得

$$\|\alpha(s,x)-\alpha(s,y)\|\leqslant\|x-y\|+kb\,\|\alpha_x-\alpha_y\|,$$

而这个不等式对于任意 $s\in(-b,b)$ 成立, 对于左端取上确界即得

$$\|\alpha_x-\alpha_y\|\leqslant\|x-y\|+kb\,\|\alpha_x-\alpha_y\|,$$

于是

$$(1-kb)\,\|\alpha_x-\alpha_y\|\leqslant\|x-y\|,$$

注意到 $kb<1$, 我们得

$$\|\alpha_x-\alpha_y\|\leqslant\frac{1}{1-kb}\,\|x-y\|.$$

最终对于任意 $x,y\in B(x_0,a)$ 和 $s,t\in(-b,b)$, 我们有

$$\|\alpha(t,x)-\alpha(s,y)\|\leqslant l|t-s|+\frac{1}{1-kb}\,\|x-y\|,$$

此不等式保证了局部流的连续性.

1.2.7 定理

若 f 是 C^p 类的向量场 $(p \geqslant 1)$, 则存在唯一的 C^p 类的局部流.

事实上, f 既然是 $C^p(p \geqslant 1)$ 类的, 必然是连续可微的, 从而是局部利普希茨的. 前面的讨论可以沿用, 这就指出处处存在连续的局部流. 人们业已证明, 我们也将承认这些局部流是 C^p 类的 (参见 [7], 第 VI 章, §4).

1.3 整体唯一性研究. 整体流

定理 1.2.6 和 1.2.7 让我们断言在某些条件下, 给定初始条件的积分曲线的存在性. 而事实上人们的兴趣还在于同样初始条件的两条积分曲线在它们定义区间的公共部分上是否重合, 以及它们是否可以延拓. 对于延拓问题, 见 1.6.1, 对于重合问题, 我们有

1.3.1 命题

给定定义在 E 的开集 U 上的一个 C^p 类 (或 k- 利普希茨的) 向量场. 若 α_1 和 α_2 是定义在含有 0 的区间 J_1 和 J_2 上的满足同样初始条件的积分曲线. 则它们在 $J_1 \bigcap J_2$ 上重合.

我们可以把这个命题看作非分歧性的肯定: 参见 3.5.5.

事实上, 令 $Q = \{t : t \in J_1 \bigcap J_2$ 并且 $\alpha_1(t) = \alpha_2(t)\}$. 我们有 $Q \subset J_1 \bigcap J_2$, 非空 $(0 \in Q)$. 由于 $Q = (\alpha_1 - \alpha_2)^{-1}(\{0\}) \bigcap (J_1 \bigcap J_2)$, 则 Q 是 $J_1 \bigcap J_2$ 的闭集. 如果我们证明了 Q 是 $J_1 \bigcap J_2$ 的开集, 由于 $J_1 \bigcap J_2$ 是连通的, 我们将得到 $Q = J_1 \bigcap J_2$.

给定 $b \in Q$, 考虑由

$$\beta_1(t) = \alpha_1(t+b) \quad \text{及} \quad \beta_2(t) = \alpha_2(t+b)$$

定义的映射.

今有 $\beta_1'(t) = \alpha_1'(t+b) = f(\alpha_1(t+b)) = f(\beta_1(t))$ 以及同样的 $\beta_2'(t) = f(\beta_2(t))$. 于是对于属于区间 J_1 和 J_2 平移 $-b$ 后的区间的 t, β_1 和 β_2 是积分曲线, 并且

$$\beta_1(0) = \alpha_1(b) = \alpha_2(b) = \beta_2(b) = x_0.$$

根据局部流的唯一性 (定理 1.2.6), 积分曲线 β_1 和 β_2 在具有点 0 的一个区间 J_k 上重合, 从而 α_1 和 α_2 在 J_k 平移 b 后的区间上重合, 即在 b 的一个邻域内重合, 此即所证.

1.3.1.1 设初始条件 x 的积分曲线的集合是 $\{(\alpha_k, J_k)\}_{k \in K}$, 这里 J_k 是积分曲线 α_k 的定义区间, 而 K 是指标集. 令 $J(x) = \bigcup\limits_{k \in K} J_k$, 这是一个区间, 对于 $t \in J(x)$, 存在 $k \in K$, 使得 $t \in J_k$, 令 $\alpha(t) = \alpha_k(t)$. 根据命题 1.3.1, 这个定义不依赖满足 $t \in J_k$

的 k 的选择.$J(x)$是定义初始值为 x 的积分曲线的最大开区间. 把积分曲线 $(J(x), \alpha)$ 记为 α_x, 并且称之为 f 的初始条件 x 的最大积分曲线.

我们对于下列问题颇感兴趣: 给定 $x_0 \in U, t_1 \in J(x_0)$. 若 $t \mapsto \alpha(t, x_0)$ 是初始值为 x_0 的积分曲线, 令 $x_1 = \alpha(t_1, x_0)$, 由于 $x_1 \in U$, 则应当有一条初始值为 x_1 的积分曲线 β 定义在一个最大区间 $J(x_1)$ 上. 试问 α 和 β 之间以及 $J(x_0)$ 和 $J(x_1)$ 之间的关系是什么? 返回例 1.2.4, 这次取点 $x_0 = (3, 2)$, 有一条相应的由 $\alpha(t, x_0) = x_0 + te_1$ 给定的积分曲线, $t \in J(x_0) = (-1, 3)$. 设 $t_1 = 2 \in J(x_0), x_1 = \alpha(2, x_0) = (5, 2)$.

初始值为 x_1 的积分曲线是 $\beta(\tau) = x_1 + \tau e_1, \tau \in (-3, 1)$. 把 x_1 的表达式代入 $\beta(\tau)$ 得

$$\beta(\tau) = x_0 + 2e_1 + \tau e_1 = x_0 + (\tau + 2)e_1.$$

我们看到 $J(x_1)$ 是 $J(x_0)$ 的 $-t_1$ (这里是 -2) 平移, 而对于 $\tau \in J(x_1)$, 我们有 $\beta(\tau) = \alpha(\tau + t_1, x_0)$. 这种状况是普遍的.

1.3.2 定理

在 E 的开集 U 上给定一个 C^p 类向量场 f. 若 $x_0 \in U, t_1 \in J(x_0)$, 则初始值为 $x_1 = \alpha(t_1, x_0)$ 的积分曲线 β 定义在最大区间 $J(x_1) = J(x_0) - t_1$ 上, 而对于 $t \in J(x_0) - t_1$, 我们有 $\beta(t) = \alpha(t + t_1, x_0)$.

事实上, 考虑由 $\beta(t) = \alpha(t + t_1, x_0)$ 定义的 β. 它定义在 $J(x_0) - t_1$ (即 $J(x_0)$ 的 $-t_1$ 平移) 上, 并且

$$\beta'(t) = \alpha'_t(t + t_1, x_0) = f(\alpha(t + t_1, x_0)) = f(\beta(t)), \quad \beta(0) = \alpha(t_1, x_0) = x_1.$$

于是 β 是初始值为 x_1 的定义在 $J(x_0) - t_1$ 上的积分曲线, $J(x_0) - t_1$ 是 β 的最大定义区间, 否则, 初始值为 x_0 的积分曲线将定义在比 $J(x_0)$ 更大的区间上.

1.3.3 定义

给定在 E 的开集 U 上的一个 C^p 类向量场 f. 令 $\mathscr{D}(f) = \{(t, x) \in \mathbf{R} \times U : t \in J(x)\}$, α_x 是初始条件为 x 的积分曲线, 则由 $\alpha(t, x) = \alpha_x(t)$ 定义的映射 $\alpha : \mathscr{D}(f) \to U$ 称为 f 的整体流,
而 $\mathscr{D}(f)$ 称为它的定义域.

$\mathscr{D}(f)$ 还可以表示成

$$\mathscr{D}(f) = \bigcup_{x \in U} (J(x) \times \{x\}).$$

总有 $\{0\} \times U \subset \mathscr{D}(f)$. 不过应当注意到, 一般说来, 不存在开区间 $J \ni 0$, 使得 $J \times U \subset \mathscr{D}(f)$, 参见例 1.2.4. 尽管如此, 我们有定理 1.3.6.

定理 1.3.2 的公式 $\beta(t) = \alpha(t + t_1, x_0)$ 的一种惬意的表达方式如下所述: 对于 $(t, x) \in \mathscr{D}(f)$, 令

1.3.4 $$G_t \cdot x = \alpha(t, x).$$

我们可以称 G_t 是一个从 U 到 U 内的“局部”映射. 如果 $\{t\}\times U\subset\mathscr{D}(f)$, 那么 G_t 是一个 $U\to U$ 的映射. 根据 1.3.2, 如果各个 $G_t\cdot$ 都有意义, 则

1.3.5
$$\boxed{G_t\cdot(G_{t_1}\cdot x_0)=(G_t\circ G_{t_1})\cdot x_0=G_{t+t_1}\cdot x_0}\,.$$

如果 $\mathbf{R}\times U\subset\mathscr{D}(f)$, 公式 1.3.5 就可以写成 $G_t\circ G_s=G_{t+s}$, 其中 $t,s\in\mathbf{R}$, 并且表明 $t\to G_t$ 是从 $\mathbf{R}$ 的加法群到从 U 到 U 内的双射的群的一个同态. 我们把这个事实说成 $G_t, t\in\mathbf{R}$ 形成带一个参数的群. 一般说来, 对于任意 $\mathscr{D}(f)$, G_t 仅仅形成 U 的“局部双射的局部群”.

粗略地说, 1.3.5 断言, 在积分曲线 α 上, 沿着积分曲线 α 走时间 t_1, 再走时间 t, 就相当于走了时间 $t+t_1$!

1.3.6 定理

设 f 是开集 U 上的 C^p 类的向量场, 则

(i) $\mathscr{D}(f)$ 是 $\mathbf{R}\times U$ 的一个开集;

(ii) $\alpha\in C^p(\mathscr{D}(f);U)$.

为了证明定义在 $\mathscr{D}(f)$ 上的 α 是 C^p 类的, 我们必须指出对于 $\mathscr{D}(f)$ 的所有点 (t_0,x_0), 存在它的一个含于 $\mathscr{D}(f)$ 的邻域, 在此邻域上, α 是 C^p 类的. 而由于 f 是 C^p 类的, 故局部流是 C^p 类的, 这就归结为证明存在 (t_0,x_0) 的一个含于 $\mathscr{D}(f)$ 的邻域, 在此邻域上存在局部流. 在点 x_0 的局部流的存在性保证结论对于 $\mathscr{D}(f)$ 的点 $(0,x_0)$ 成立. 问题于是归结为证明局部流的存在性对于 $\mathscr{D}(f)$ 的点 (t_0,x_0) 成立, 由 $\mathscr{D}(f)$ 的定义知道, 事实上有 $t_0\in J(x_0)$. 为证明上述事实, 我们引进下列记号.

我们说 s 具有性质 $(\mathscr{P})$, 如果存在 $\mathbf{R}$ 的一个含有点 s 的区间 J, 以及 U 的一个含有 x_0 的开集 U', 使得

(i) $J\times U'\subset\mathscr{D}(f)$;

(ii) α 在 $J\times U'$ 上的限制是 C^p 类的.

令 $Q_{x_0}=\{t\in J(x_0):\forall s\in[0,t], s\text{ 具有性质}\mathscr{P}\}$. 我们要证明 Q_{x_0} 和 $J(x_0)$ 具有相同的上确界. 类似地证明 $J(x_0)$ 和 $P_{x_0}=\{t\in J(x_0):\forall s\in[t,0], s\text{ 具有性质 }\mathscr{P}\}$ 具有相同的下确界. 二者结合起来得结论 $Q_{x_0}\bigcup P_{x_0}=J(x_0)$. 于是对于任意点 $(t_0,x_0)\in\mathscr{D}(f)$, 都存在此点的一个邻域, 使得 α 在此邻域上的限制是 C^p 类的.

由于 Q_{x_0} 含有 0, 而 Q_{x_0} 在 $J(x_0)$ 内是闭集, 所以在 Q_{x_0} 无上界的情形, $Q_{x_0}=[0,+\infty)$, 更不待说 $J(x_0)\bigcap\mathbf{R}^+=[0,+\infty)$; 此时就没有什么可证的了.

现在设 Q_{x_0} 有上界, 其上确界 $b<+\infty$ 存在. 用反证法证明 Q_{x_0} 和 $J(x_0)$ 具有相同的上确界. 假设 $b\neq\sup J(x_0)$, 于是 $b\in J(x_0)$. 令 $x_0'=\alpha(b,x_0)$. 我们要证明: 在 Q_{x_0} 中存在 $t>b$, 具有性质 $\mathscr{P}$. 于是我们需要求一个包含 b 的区间 J, 还需要求一个包含 x_0 的开集 U', 使得 $J\times U'\subset\mathscr{D}(f)$, 并且 $\alpha|_{J\times U'}$ 是 C^P 类的. 对于 $t_1<b$, 性质 $\mathscr{P}$ 满足. 我们试图考虑初始值为 x_0' 的积分曲线, 把它“衔接”到一条通过 x_0 的积分曲线上. 由于 b 属于 $J(x_0)$, 存在中心为 $x_0'=\alpha(b,x_0)$ 的局部流, 即存在 U 的

含 x_0' 的开集 U'', 一个区间 $K=(-a,a)$ 和一个从 $K\times U''$ 到 U 内的映射 β, 构成在 x_0' 的局部流.

我们把这个局部流与另一局部流衔接起来. 后者的定义区间含 0, 从 t_1 出发, 这里 $t_1<b$, 从而 $t_1\in Q_{x_0}$. 为此, 必须定义在 t_1 的解 α 在 U'' 取值, β 是在 U'' 有定义的. 而 $\alpha(t,x_0)$ 定义在 $J(x_0)$ 上, 从而在 b 有定义, 并且是连续的: U'' 是 $x_0'=\alpha(b,x_0)$ 的邻域, 存在 $\eta>0$, 使得对于 $t_1\in(b-\eta,b)$, 有 $x_1=\alpha(t_1,x_0)\in U''$.

为了衔接 α 和 β, 我们要延拓 α 的定义区间, 使之包含 t_1+K. 为了超越 b, 必须选择 t_1 满足 $t_1+a>b$, 即 $t_1>b-a$. 最终选择 t_1 满足 $\sup\{b-a,b-\eta\}<t_1<b$. 由于 $t_1\in Q_{x_0}$, 存一个含有点 t_1 的区间 J_1, 以及 U 的一个含有 x_0 的开集 U', 使得 $J_1\times U'\subset\mathscr{D}(f)$; $\alpha|_{J\times U'}$ 是 C^p 类的.

由于 $\alpha(t_1,x_0)=x_1\in U''$, U'' 是开集, 且 $x\mapsto\alpha(t_1,x)$ 连续, 如果必要, 缩小 J_1 和 U', 可以假定 $\alpha(\{t_1\}\times U')\subset U''$. 设 $t\in t_1+K$ (K 的 t_1 平移), $x\in U'$. 由于 $t_1\in J_1,\alpha(t_1,x)\in U''$, 则存在初始值为 $\alpha(t_1,x)$ 的、在 K 上由 $\beta(\tau,\alpha(t_1,x))(\tau\in K)$ 定义的积分曲线.

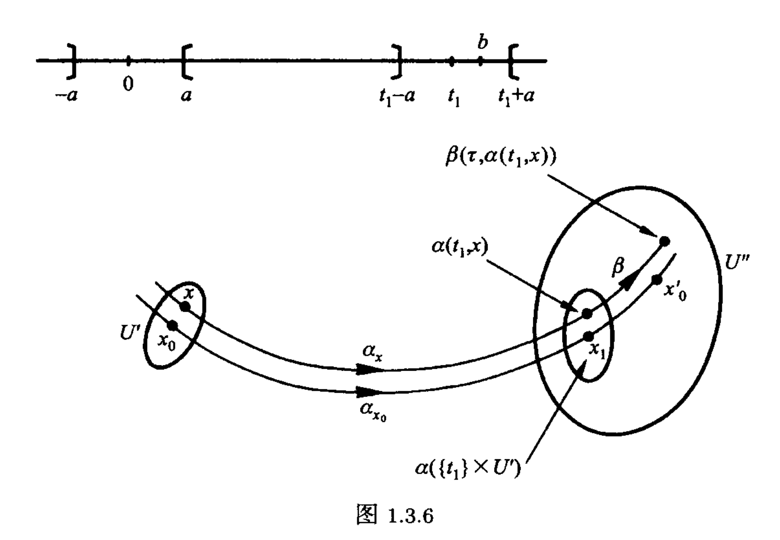


图 1.3.6

于是对于 $t\in t_1+K,t-t_1\in K$, 映射 $t\mapsto\beta(t-t_1,\alpha(t_1,x))$ 定义一条积分曲线, $t=t_1$ 时通过点 $\alpha(t_1,x)$: 于是 α 对于 $t\in t_1+K$ 和 $x\in u'$ 有了定义 (局部唯一性).

区间 $I_1=t_1+K$ 具有性质:

(i) $b\in I_1$ (因为 $t_1>b-a$, 故 t_1+K 含有 b);

(ii) 存在 U 的含 x_0 的开集 U', 使得对于 $t\in I_1$ 和 $x\in U'$, $\alpha(t,x)$ 存在, 从而 $I_1\times U'\subset\mathscr{D}(f)$.

由于 $\alpha|_{I_1\times U'}$ 与局部流 β 重合, 故 α 是 C^p 类的. 这样就得到了 b 以及 (b,t_1+a) 的点都具有性质 $\mathscr{P}$, 于是 (b,t_1+a) 的点都属于 Q_{x_0}, 这与 b 的定义矛盾. 故必有 $b=\sup J(x_0)$ (这个上确界可能是 ∞).

1.4 依赖时间的向量场. 依赖一个参数的向量场

我们现在考虑形式为 $x' = f(t,x)$ 的微分方程, 提出与 1.2.1 叙述不同的下列定义:

1.4.1 定义

设 U 是 E 的一个开集. 给定 $\mathbf{R}$ 的一个含 0 的开区间 J 及从 $J\times U$ 到 E 内的一个映射 f, 两者合起来称为依赖时间的 U 上的向量场.

一个定义在 $\mathbf{R}$ 的含 0 的一个区间 K 上且在 U 内取值的函数 α, 如果满足: 对于 K 的每个 t, 有 $\alpha'(t) = f(t,\alpha(t))$ 和 $\alpha(0) = x_0$, 则称 α 是初始值为 x_0 的积分曲线 .

为了证明积分曲线的存在性, 我们尝试把问题归结为一个不依赖时间的向量场, 这就需要考虑一个定义在 $\mathbf{R}\times E$ 的开集上的向量场.

从 $f: J\times U \to E$ 出发, 我们定义从 $J\times U$ 到 $\mathbf{R}\times E$ 的映射

1.4.2
$$\overline{f}(t,x) = (1, f(t,x)).$$

这样 $\overline{f}$ 就是一个定义在 $\mathbf{R}\times E$ 的开集 $J\times U$ 上且在 $\mathbf{R}\times E$ 取值的一个向量场. 并且, 如果 f 是 C^p 类的, $\overline{f}$ 也是 C^p 类的. 从而, 如果假定 f 是 C^p 类的, 由定理 1.2.7, 就处处存在唯一的 $\overline{f}$ 的 C^p 类的局部流.

现在设 $(s,x)\in J\times U$, 而 $\overline{\alpha}$ 是 $\overline{f}$ 的初始值为 (s,x) 的积分曲线. 这是从一个区间 $\overline{J}(s,x)$ 到 $J\times U$ 内的映射, 记其分量函数为 $\overline{\alpha}_1$ 和 $\overline{\alpha}_2$, 则有

$$\overline{\alpha}(t;(s,x)) = (\overline{\alpha}_1(t;(s,x)), \overline{\alpha}_2(t;(s,x))),$$

其导数为

$$\frac{\mathrm{d}\overline{\alpha}}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathrm{d}\overline{\alpha}_1}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}\overline{\alpha}_2}{\mathrm{d}t}\right) = \overline{f}(\overline{\alpha}_1,\overline{\alpha}_2) = (1, f(\overline{\alpha}_1,\overline{\alpha}_2)),$$

初始值为

$$\overline{\alpha}(0;(s,x)) = (s,x).$$

按分量写出为

$$\frac{\mathrm{d}\overline{\alpha}_1}{\mathrm{d}t} = 1 \qquad \text{及} \qquad \overline{\alpha}_1(0;(s,x)) = s,$$
$$\frac{\mathrm{d}\overline{\alpha}_2}{\mathrm{d}t} = f(\overline{\alpha}_1,\overline{\alpha}_2) \qquad \text{及} \qquad \overline{\alpha}_2(0;(s,x)) = x.$$

由于 $\overline{\alpha}_1$ 在 $\mathbf{R}$ 的区间 J 上取值, 我们有

1.4.3
$$\overline{\alpha}_1(t;(s,x)) = t + s.$$

代入得

$$\frac{\mathrm{d}\overline{\alpha}_2}{\mathrm{d}t}(t;(s,x)) = f(t+s, \overline{\alpha}_2(t;(s,x))).$$

令 $s=0$ 即得 $\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}=f(t,\alpha)$ 的解; 此即为由

1.4.4 $$\beta(t,x)=\overline{\alpha}_2(t;(0,x))$$

定义的函数 β.

前面的讨论证明了积分曲线的存在性和唯一性:

1.4.5 定理

给定 $\mathbf{R}$ 的区间 J 和 E 的开集 U. 设 f 是定义在 $J\times U$ 上且在 E 内取值的 C^p 类向量场, 则存在 f 的 C^p 类的唯一的局部流.

现在考虑另一个巴拿赫空间 F, V 是它的一个开集, U 是 E 的一个开集, 可以定义 U 上的一个向量场, 依赖或不依赖于时间, 但是依赖一个在 V 取值的参数 λ. 这就是一个定义在 $V\times U$ 上 (或 $J\times V\times U$ 上, 如果依赖时间) 在 E 内取值的映射 f. 对于 $\lambda\in V$, 考虑微分方程 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f(\lambda,x)$, 我们要知道局部流怎样依赖 λ; 更一般地, 还可以考虑形式如下的方程:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f(t,\lambda,x).$$

我们仍然归结到 1.2 节的情形, 我们需要定义在 $F\times E$ 上, (或更一般的在 $\mathbf{R}\times F\times E$ 上) 的向量场. 为此需要定义一个从 $V\times U$ 到 $F\times E$内的映射 $\overline{f}$:

1.4.6 $$\overline{f}(\lambda,x)=(0,f(\lambda,x)).$$

如果 f 是 C^p 类的, 那么这样定义的 $\overline{f}$ 是 $V\times U$ 上的 C^p 类的向量场, 于是根据 1.2.7, 得到 $\overline{f}$ 的一个局部流 $\overline{\alpha}$, 其分量是 $\overline{\alpha}_1$ 和 $\overline{\alpha}_2$, 对应初始条件 (λ,x).

我们得到

$$\frac{\mathrm{d}\overline{\alpha}_1}{\mathrm{d}t}(t;(\lambda,x))=0 \qquad \text{及} \qquad \overline{\alpha}_1(0;(\lambda,x))=\lambda,$$
$$\frac{\mathrm{d}\overline{\alpha}_2}{\mathrm{d}t}(t;(\lambda,x))=f(\overline{\alpha}_1,\overline{\alpha}_2) \qquad \text{及} \qquad \overline{\alpha}_2(0;(\lambda,x))=x.$$

由此推出 $\overline{\alpha}_1(t;(\lambda,x))=\lambda$, 代入得

$$\frac{\mathrm{d}\overline{\alpha}_2}{\mathrm{d}t}(t;(\lambda,x))=f(\lambda,\overline{\alpha}_2(t;(\lambda,x))).$$

由 $\beta(t,x)=\overline{\alpha}_2(t;(\lambda,x))$ 定义的 β 满足

$$\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t}(t,x)=f(\lambda,\beta(t,x)).$$

β 正好是初始条件为 x 的积分曲线.

1.4.7 定理

若 V 和 U 分别是 F 和 E 的开集, 而 $f\in C^p(V\times U;U)$, 则存在 f 的属于 $C^p(J\times V\times U;U)$ 的唯一的局部流 β.

特别说来, 局部流对于参数是 C^p 类的.

1.5 唯一性和对于依赖时间的向量场的整体流

1.5.1 给定依赖时间的一个向量场 $f \in C^p(J \times U; E)$. 根据定理 1.4.5, 命题 1.3.1 不必修改就保持有效. 于是对于每个点 $x \in U$, 可以定义最大开区间 $J(x) \subset J$, f 的初始条件为 x 的最大积分曲线 $(J(x), \alpha_x)$ 有定义. 继而同样令 $\mathscr{D}(f) = \{(t,x) \in J \times U : t \in J(x)\}$, 并且用 $\alpha(t,x) = \alpha_x(t)$ 定义 $\alpha : \mathscr{D}(f) \to U$. 定理 1.3.6 保持有效.

1.5.2 但是, 定理 1.3.2 和公式 1.3.5不再成立; 这来源于下列事实: $t \mapsto \alpha(t)$ 是 f 的积分曲线, 对于固定的 s, $t \mapsto \alpha(t+s)$ 不再是积分曲线. 为了寻找取代 1.3.5 的公式, 只需注意下列事实: 如果 $\alpha'(u) = f(u, \alpha(u))$, 并令 $\beta(t) = \alpha(t+s)$, 则

$$\beta'(t) = \alpha'(t+s) = f(t+s, \alpha(t+s)) = f(t+s, \beta(t)).$$

换言之, β 是新的微分方程

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} = g(t,x)$$

的解, 这里 $g(t,x) = f(t+s,x)$, 或者说, β 是向量场

$$(t,x) \mapsto g(t,x) = f(t+s,x)$$

的积分曲线.

1.5.3 记号

把类似于 1.3.4 定义的 G_t、但是对于向量场 $(t,x) \mapsto f(t+s,x)$ 定义的局部映射记为 G_t^s.

特别地, 对于 $s=0$, 我们有 $G_t^s = G_t$. 如果下面所执行的运算都有定义, 则

1.5.4 $$\boxed{G_{t+s}^r = G_t^{r+s} \circ G_s^r}.$$

$r=0$ 时则有

$$G_{t+s} = G_t^s \circ G_s.$$

事实上, 对于 $x \in U$, 我们有 $r+s+t \in J(x)$, 设 α_x 是初始条件为 x 的 f 的最大积分曲线, 根据 1.5.2 和唯一性, 得 $u \mapsto \alpha(r+u)$ 是初始条件为 $x_1 = \alpha(r)$ 的 $(u,y) \mapsto f(u+r,y)$ 的积分曲线. 若令 $x_2 = \alpha(r+s)$, 则根据定义有 $x_2 = G_s^r \cdot x_1$. 同样, 令

$$x_3 = \alpha(r+s+t),$$

则有 $x_3 = G_{s+t}^r \cdot x_1$, 又有 $x_3 = G_t^{r+s} \cdot x_2$. 此即所证.

1.6 相关知识和线性方程

本章前面仅仅讲述了微分方程的部分有趣的内容. 本节介绍这个理论的若干重要的知识, 除 1.6.6 外一概不加以证明.

1.6.0 先验放大估计. 近似解的比较

对于方程 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f(t,x)$, 如果知道 f 的利普希茨常数和对于 $\|f\|$ 的一个界, 我们就可以给出方程解的一个上界的估计, 比较两个解, 或更进一步比较两个近似解. 参见 [1], 2.1.5.3. 下面的引理 1.6.7 是其特殊情形.

1.6.1 解的延拓

可以指出, 限制一个解延拓到整个 $\mathbf{R}$ 的本质障碍来自两个方面: 或者是积分曲线到达了 U 的边界: 见图 1.2.4 所示的例子; 抑或是解不是有界的, 典型的例子是 $x'=-x^2$, 初始条件为 x 的解是 $t\mapsto x/(tx+1)$, 如果 $x>0$, 则其最大区间是 $J(x)=(-1/x,+\infty)$. 要了解精确的结果, 请参见 [8], 10.5.5 或 [9], 382 页定理 5. 那里要利用 1.6.0 中那样的估计. 定理 1.6.6 的证明提供了延拓的一个特殊情形.

1.6.2 导数

在证明解对于初始条件或对于参数的可微性的同时 (参见 1.2.7 和 1.4.7), 证明了表示相应导数的公式. 公式表明导数满足一个新的微分方程, 后者有一个突出的优点, 即它是线性的 (参见 1.6.4). 关于这些内容, 参见 [7], 135 页, [8], 10.7.3.1 和 10.8.4.1 或 [1], 2.3.6.2 和 2.3.4.6.

1.6.3 常系数的 n 阶数值线性方程

方程 $x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}x'+a_nx=0$ $(a_1,\cdots,a_n\in\mathbf{R})$ 可以得到显式解, 其解构成一个向量空间, 它的一个基由指数 - 多项式组成, 这些指数 - 多项式由方程 $\xi^n+a_1\xi^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\xi+a_n=0$ 的根确定, 参见 [1], 2.2.9.

1.6.4 线性微分方程

我们说微分方程 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f(t,x)$ 是线性的, 如果它有形式

1.6.5
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=A(t)\cdot x+b(t).$$

其中, $A\in C^0(J;L(E;E)),b\in C^0(J;E)$, J 是 $\mathbf{R}$ 的区间, 这里 $U=E$ 是整个空间. 线性方程的基本事实在于:

1.6.6 定理

对于方程 1.6.5, 我们有 $\mathscr{D}(f)=J\times E$, 换言之, 对于所有 $x\in E$, $J(x)=J$.

1.6.7 引理

给定 $g\in C^0([t_0,b);\mathbf{R}_+)$. 假定存在两个常数 C,K, 使得对于所有 $t\in[t_0,b)$ 有 $g(t)\leqslant C+K\int_{t_0}^t g(u)\mathrm{d}u$, 则对于所有 $t\in[t_0,b)$, 有 $g(t)\leqslant Ce^{K(t-t_0)}$. 特别地, 有 g 在 $[t_0,b)$ 有界.

临时固定 $b'<b$, 并且假定 B 是 g 在 $[t_0,b']$ 上的一个界. 从引理中作为假设的放大不等式出发, 利用归纳法和从 t_0 到 t 的积分, 我们推出对于所有 $t\in[t_0,b']$ 和正

整数 n 有

$$g(t) \leqslant C\left[1+\frac{K(t-t_0)}{1!}+\cdots+\frac{K^{n-1}(t-t_0)^{n-1}}{(n-1)!}\right]+\frac{BK^n(t-t_0)^n}{n!}.$$

令 n 趋于无穷, 就得到 $g(t) \leqslant Ce^{K(t-t_0)}$. 此不等式对于所有 $b' < b$ 成立, 引理得证.

1.6.8 引理

设 $[a,b] \subset J$, 而 α 是 1.6.5 的定义在 (a,b) 上的解. 则 α 在 (a,b) 上有界.

取定 $t_0 \in (a,b)$. 根据方程 1.6.5, 我们有

$$\alpha(t)-\alpha(t_0)=\int_{t_0}^{t}(A(u)\cdot\alpha(u)+b(u))\mathrm{d}\,u,$$

由此,

1.6.9 $$\|\alpha(t)-\alpha(t_0)\| = k\left|\int_{t_0}^{t}\|\alpha(u)\|\,\mathrm{d}\,u\right|+h|t-t_0|,$$

其中 k (对应地 h) 是 $\|A\|$ (对应地 $\|b\|$) 在紧集 $[a,b]$ 上的上界. 然后只需应用引理 1.6.7.

定理的证明

给定 $x \in E, t_0 \in J$, 而 $J(x)$ 是最大区间, 在 $J(x)$ 上定义了 1.6.5 的满足 $\alpha(t_0)=x$ 的解 α (参见 1.2.2 后的注). 设 $J(x)=(t_1,t_2)$, 我们必须证明 $t_1 \notin J$ 和 $t_2 \notin J$. 比如设 $t_2 \in J$, 我们指出这将导致矛盾.

设 k (对应地 h) 是 $\|A\|$ (对应地 $\|b\|$) 在 $[t_0,t_2]$ 上的一个界, 而 j 则是 $\|\alpha\|$ 在 $[t_0,t_2]$ 上的一个界 (其有界性由引理 1.6.8 保证). 由公式 1.6.9 推出对于所有 $s,t \in [t_0,t_2]$,

$$\|\alpha(t)-\alpha(s)\| \leqslant (kj+h)|t-s|.$$

这表明 $\alpha(t)$ 满足柯西收敛原理的条件 (由于 E 是完备的), 从而存在 $x_1 \in E$, 使得 $x_1=\lim\limits_{t\to t_2}\alpha(t)$. 存在 (局部存在性定理) 1.6.5 的一个解 β, 定义在一个含 t_2 的区间 L 上, 满足 $\beta(t_2)=x_1$. 但对于所有 $t<t_2$, $\alpha(t)=\int_{t_0}^{t}f(u,\alpha(u))\mathrm{d}\,u$, 由连续性, $\alpha(t_2)=\int_{t_0}^{t_2}f(u,\alpha(u))\mathrm{d}\,u$. 于是 α 是 1.6.5 在 $[t_0,t_2]$ 上的解, 并且在 $[t_0,t_2]\bigcap L$ 上与 β 重合 (唯一性). 这让我们能够在 $[t_0,t_2]\bigcup L$ 上定义 1.6.5 的一个解, 只需对于 $t\in[t_0,t_2]$, 令它等于 $\alpha(t)$, 而对于 $t \in L$, 令它等于 $\beta(t)$. 而这与定义

$$t_2=\sup J(x)$$

矛盾.

定理 1.6.6 只不过是线性方程理论的一个出发点; 至于详情, 请参见 [1], 2.2,127-144 页.

第二章　微分流形

本章是全书的基础, 也是包含最多习题的一章. 首先定义 $\mathbf{R}^n$ 的子流形 (2.1), 这些子流形是研究微分几何的优良的具体对象, 我们列举它们的许多例子. 然后定义这些子流形的参数化; 衔接两个参数化的方式, 正好用来过渡到给出抽象 (微分) 流形的定义 (2.2). 流形是研究微分几何的优良对象, 有时甚至会出现在具体的问题中.

我们研究与流形联系着的数学概念: 态射、切空间、切丛、一个流形的子流形、浸入、浸没、嵌入和它们的性质. 既为了诠释理论, 也为了后面的需要, 两个例子被仔细讨论: 覆叠映射 (2.4) 和欧几里得空间的一个子流形的法丛 (2.7). 另外一个简单的结果是当即给出的, 该结果断言一个连通流形的微分同胚是转移的 (2.3.7).

本章还呈现了几个更加鲜明的例子 (2.1.6.2 和 2.4.12): 球面, 实射影空间和环面, 后面会经常用到它们的德拉姆群的计算 (5.7 和 5.8), 以及它们的体积的计算 (6.5.5).

2.1 $\mathbf{R}^n$ 的子流形

对于 $d \leqslant n$, 典范包含 $\mathbf{R}^d \subset \mathbf{R}^n$ 是映射 $(x_1, \cdots, x_d) \mapsto (x_1, \cdots, x_d, 0, \cdots, 0)$; 这也可以表示成 $\mathbf{R}^n = \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^{n-d}$.

2.1.1 定义

给定 $\mathbf{R}^n$ 的一个子集 V. 我们称 V 是 $\mathbf{R}^n$ 的 d维 C^p 类的**子流形**, 如果对于 V 的每个点 x, 存在 $\mathbf{R}^n$ 的一个含有点 x 的开集 U 及一个从 U 到其像 $f(U)$ 的 C^p 类的微分同胚 f($f(U)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的开集), 满足条件: $f(U \bigcap V) = f(U) \bigcap \mathbf{R}^d$.$n-d$ 称为 V 的**余维数**.

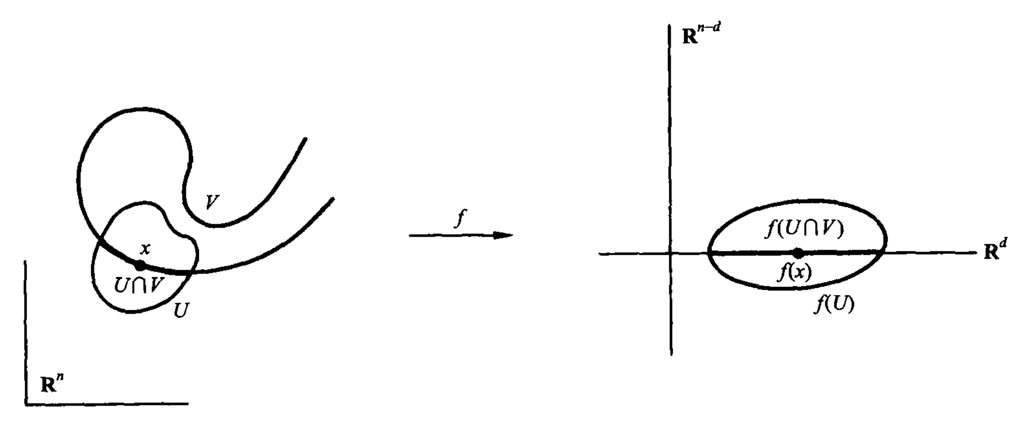


图 2.1.1

2.1.2 定理

给定 $\mathbf{R}^n$ 的一个子集 V. 下列五个性质等价:

(i) V 是 $\mathbf{R}^n$ 的 d 维 C^p 类的子流形;

(ii) 对于 V 的所有点 x, 存在 $\mathbf{R}^n$ 的一个含有点 x 的开集 U 和 $n-d$ 个从 U 到 $\mathbf{R}$ 的 C^p 类函数 $f_i (i = 1, \cdots, n-d)$, 使得线性形式

$$f_i'(x), \quad i = 1, \cdots, n-d$$

是线性无关的, 并且

$$V \bigcap U = \bigcap_{i=1}^{n-d} f_i^{-1}(0);$$

(iii) 对于 V 的所有点 x, 存在 $\mathbf{R}^n$ 的一个含有点 x 的开集 U 和一个从 U 到 $\mathbf{R}^{n-d}$ 的 C^p 类浸没 f, 使得 $U \bigcap V = f^{-1}(0)$;

(iv) 对于 V 的所有点 x, 存在 $\mathbf{R}^n$ 的一个含有点 $x = (\xi_1, \cdots, \xi_n)$ 的开集 U, 一个含有点 $(\xi_1, \cdots, \xi_d)$ 的 $\mathbf{R}^d$ 的开集 U' 和从 U' 到 $\mathbf{R}$ 的 C^p 类函数 h_i $(i = 1, \cdots, n-d)$, 在坐标适当置换后, $V \bigcap U$ 是从 U' 到 $\mathbf{R}^{n-d}$ (对于典范同构 $\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^{n-d} = \mathbf{R}^n$) 的映射 $(h_1, \cdots, h_{n-d})$ 的图像;

(v) 对于 V 的所有点 x, 存在 $\mathbf{R}^n$ 的一个含有点 x 的开集 U, $\mathbf{R}^d$ 的一个含 0 的开集 Ω, 一个从 Ω 到 $\mathbf{R}^n$ 的映射 g, 使得 $g(0)=x, g$ 是从 Ω 到 $V\bigcap U$ (赋以由 $\mathbf{R}^n$ 的拓扑诱导的拓扑) 上的 C^p 类同胚, 并且 $g'(0)$ 是单射.

2.1.3　注释

(ii) 和 (iii) 的等价是显而易见的, 因为显然 (iii)⇒(ii), 而如果 (ii) 成立, 分量为 f_i 的从 U 到 $\mathbf{R}^{n-d}$ 的映射 f 在点 x 是一个浸没, 从而在 x 的一个邻域内是一个浸没 (行列式是连续映射), 于是如有必要, 缩小 U, 则有 (iii).

在 $n=2, d=1$ 的情形, 子流形的概念推广了曲线的概念, 并且回到我们熟悉的图像观点 (iv) 和参数表示观点 (v). 在 $n=3, d=1$ 时, 我们重新找回了曲线作为两张曲面的交的熟知体验 ((ii) 和 (iii)).

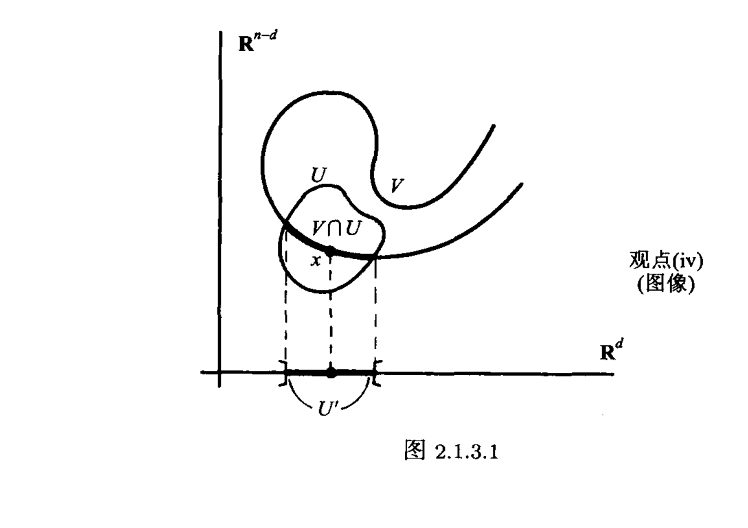


图 2.1.3.1

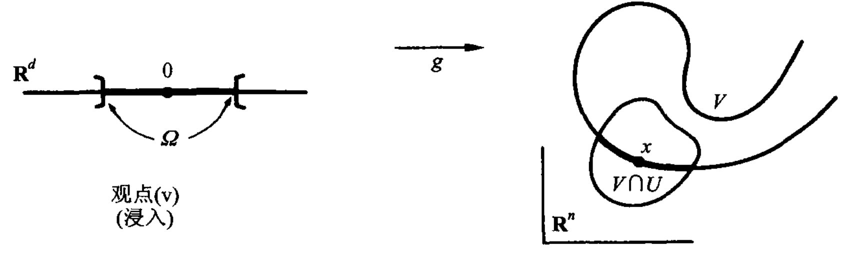


图 2.1.3.2

2.1.3.1　观点 (ii) 在于用局部方程定义子流形, 或把子流形看作超曲面的交 (参见 2.1.6.5); 观点 (iii) 是把子流形看作一个浸没的核; 观点 (iv) 是把子流形看作图像, 而观点 (v) 是把子流形看作浸入的像 (都是局部的). 这最后的观点的缘由是: 如果 $g'(0)$ 是单射, 则对于充分邻近于 0 的 $x, g'(x)$ 也是单射.

2.1.4 证明

由于我们已经知道 (ii) $\Leftrightarrow$ (iii), 所以只需证明

$$\text{(iii)} \Rightarrow \text{(i)} \Rightarrow \text{(v)} \Rightarrow \text{(iv)} \Rightarrow \text{(ii)}.$$

(iii)$\Rightarrow$(i): 这正是定理 0.2.26 所断言的.

(i) $\Rightarrow$ (v), 利用定义 2.1.1, 如有必要, 经过平移可以假定 $f(x)=0$. 取 $\Omega = f(U\bigcap V)$, 令 $g=f^{-1}\circ i$, i 是典范单射, $i:\mathbf{R}^d\to\mathbf{R}^n$. 利用 V 从 $\mathbf{R}^n$ 的拓扑诱导所得的拓扑的定义, 我们得到 g 是从 Ω 到 $V\bigcap U$ 上的 C^p 类同胚.

(v) $\Rightarrow$ (iv): 凭借 $\mathbf{R}^n$ 的坐标的重新编号, 可以假定 $g'(0)(\mathbf{R}^d)\bigcap\mathbf{R}^{n-d}=\{0\}$, 这里, 按照表示 $\mathbf{R}^n=\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^{n-d}$, 认为 $\mathbf{R}^{n-d}\subset\mathbf{R}^n$. 设 $p:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^d$ 是从 $\mathbf{R}^n$ 到其第一个因子的投影, 从 $g'(0)(\mathbf{R}^d)\bigcap\mathbf{R}^{n-d}=\{0\}$ 推出 $(p\circ g)'(0)(\mathbf{R}^d)=\mathbf{R}^d$, 即 $p\circ g$ 在点 0 是平直的. 根据定理 0.2.22, 存在 $\Omega'\in O_0(\Omega)$ 使得 $p\circ g$ 是从 Ω' 到 $U'=p(g(\Omega'))\in O(\mathbf{R}^d)$ 上的一个微分同胚. 从而只需取这个 U' 作为 U' 和取映射 $h=g\circ(p\circ g)^{-1}\in C^p(U';\mathbf{R}^n)$ 的后 $n-d$ 个坐标函数作为 $h_1,\cdots,h_{n-d}$, (iv) 就满足. 事实上, 由假设, $h(U')=g(\Omega')$ 是 $V\bigcap U$ 的一个开集, 故存在 $U''\in O_U(\mathbf{R}^n)$ (由诱导拓扑的定义), 使得 $g(\Omega')=h(U')=U''\bigcap V$. 于是由 U'' 和 h 的构造的过程知道 $U''\bigcap V$ 正好是 $(h_1,\cdots,h_{n-d})=h$ 的图像.

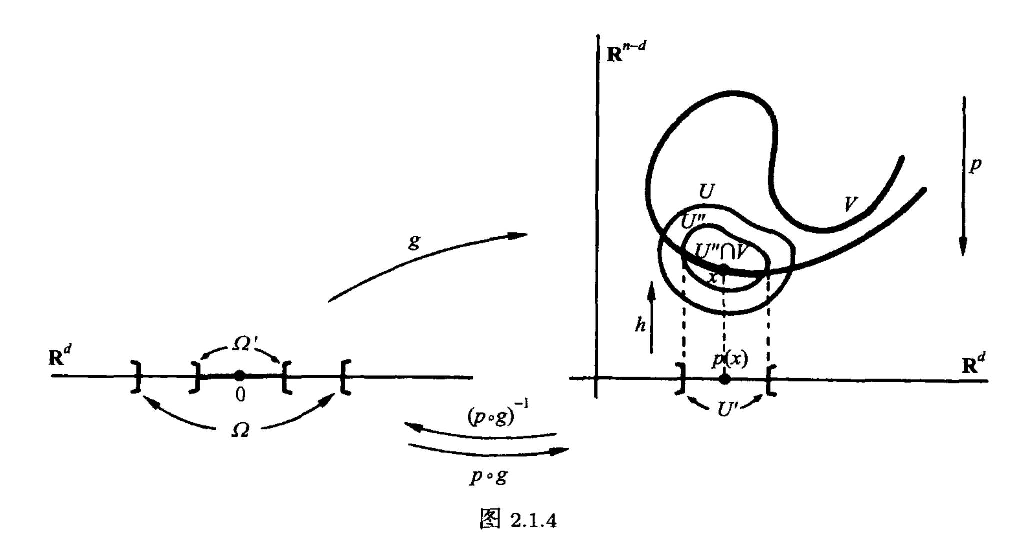


图 2.1.4

(iv) $\Rightarrow$ (ii): 只需令

$$f_i(x_1,\cdots,x_n)=h_i(x_1,\cdots,x_d)-x_{i+d},\quad (i=1,\cdots,n-d).$$

定理 2.1.2 的证明到此完成.

2.1.5 注释

在 (v) 中, "浸入" 和 "同胚" 两个条件是本质的. 事实上, 如果取 $\Omega = \mathbf{R}, g(t) = (t^2, t^3) \in \mathbf{R}^2$, 映射 g 是 C^∞ 类的, 并且是从 $\mathbf{R}$ 到其像 $g(\mathbf{R})$ 的一个同胚, 但是 $g(\mathbf{R})$ 不是 $\mathbf{R}^2$ 的子流形; 定义 2.1.1 在 $x = (0,0) \in \mathbf{R}^2$ 决不满足 (参见习题 2.8.1). 其实, $g'(0) = 0$, 浸入条件不满足.

如果取 $\Omega = \mathbf{R}, g \in C^\infty(\mathbf{R}; \mathbf{R}^2)$, 由图 2.1.5.1 确定. 其中箭头 $\xrightarrow{+\infty}$ 表示当 t 趋于 $+\infty$ 时,

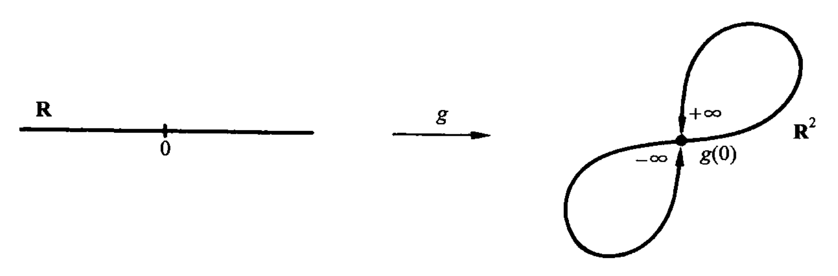


图 2.1.5.1

对应的点 $g(t)$ 趋于 $g(0)$, $\xrightarrow{-\infty}$ 的意义类似. 在点 $x = g(0)$, 定义 2.1.1 肯定不满足, 因为对于 $\mathbf{R}^2$ 的所有含有 $g(0)$ 的开集 V, $g^{-1}(0)$ 包含 $\mathbf{R}$ 的含 0 的区间外, 还包含形如 $(-\infty, b)$ 和 $(c, +\infty)$ 的区间; 参见习题 2.8.1. 还可以参见习题 2.8.4 中的另一个重要例子.

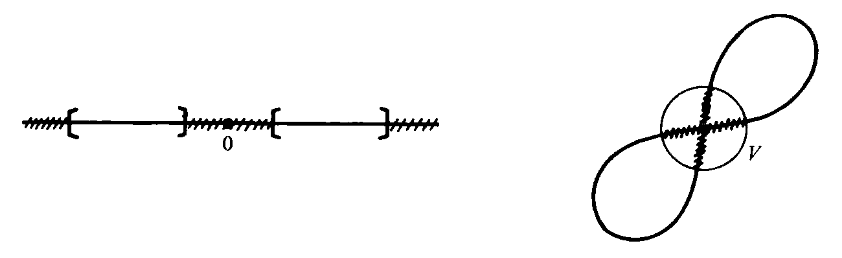


图 2.1.5.2

2.1.6 $\mathbf{R}^n$ 的子流形的例子

2.1.6.1 给定 $\mathbf{R}^n$ 的 d 维 C^p 类子流形 V 和 $\mathbf{R}^m$ 的 e 维 C^p 类子流形 W. 则 $V \times W$ 是 $\mathbf{R}^{n+m}$ 的 $d+e$ 维 C^p 类乘积子流形.

对于 $x \in V, y \in W$ 应用性质 (ii), 得到 $n+m-(d+e)$ 个定义在 $\mathbf{R}^{n+m}$ 的含有 (x,y) 的一个开集 $U = U_1 \times U_2$ 上的函数 f_i, 它们对于 $V \times W$ 满足性质 (ii). 还可以参见习题 2.8.3.

2.1.6.2 给定 $\mathbf{R}^{d+1}$ 中的球面 $S^d = \{x | x \in \mathbf{R}^{d+1}, \|x\| = 1\}$, 这是 $\mathbf{R}^{d+1}$ 中的 d 维 C^∞ 类子流形 (若 $d=1$, 是圆周, 若 $d=0$, 则是两个点).

事实上,

$$S^d = \{x = (\xi_1, \cdots, \xi_{d+1}) | \xi_1^2 + \cdots + \xi_{d+1}^2 - 1 = 0\}.$$

令

$$f(\xi_1, \cdots, \xi_{d+1}) = \xi_1^2 + \cdots + \xi_{d+1}^2 - 1,$$

则 f 是 $\mathbf{R}^{d+1}$ 到 $\mathbf{R}$ 的一个 C^∞ 类映射, 使得 $S^d = f^{-1}(0)$. 并且, $f'(x)$ 是向量

$$(2\xi_1, \cdots, 2\xi_{d+1}).$$

如果 $x = (\xi_1, \cdots, \xi_{d+1}) \in S^d$, 则至少一个坐标不为零, 从而 $f'(x)$ (等同于 $\mathbf{R}^{d+1}$ 的一个向量) 不是零向量: 根据性质 (ii), S^d 的确是 $\mathbf{R}^{d+1}$ 中的 d 维 C^∞ 类子流形.

我们更愿意摆脱坐标而把 f 写成 $f = \|\cdot\|^2 - 1$, 相应的导数写成 $f'(x) = 2(x|\cdot)$ (参见 0.1.15.1), 如果 $x \neq 0$, 则 $f'(x)$ 不是零.

2.1.6.3 *环面, 第一个生成方法* (另外参见 2.4.12.1). 给定一个整数 $d \geqslant 1$. 考虑 $\mathbf{R}^2$ 中的中心在 O 半径为 $d^{-1/2}$ 的圆周 $S^1(d^{-1/2})$, 进而考虑在 $\mathbf{R}^{2d} = (\mathbf{R}^2)^d$ 中的 d 个这样的圆周的乘积

$$T^d = \left(S^1(d^{-1/2})\right)^d = S^1(d^{-1/2}) \times \cdots \times S^1(d^{-1/2}) \subset \mathbf{R}^2 \times \cdots \times \mathbf{R}^2 = \mathbf{R}^{2d},$$

根据 2.1.6.1 和 2.1.6.2, 这是 $\mathbf{R}^{2d}$ 的一个 d 维 C^∞ 类子流形, 称为 d 维环面. 这也可以说成 T^d 由方程

$$x_1^2 + x_2^2 = \frac{1}{d}, \quad x_3^2 + x_4^2 = \frac{1}{d}, \quad \cdots, \quad x_{2d-1}^2 + x_{2d}^2 = \frac{1}{d}$$

定义的. T^d 是紧致的, 并且 $T^d \subset S^{2d-1}$.

2.1.6.4 *正交群* $O(n)$ (参见 [2], 35.11.1) 的一个实现是 n 阶可逆的满足条件 ${}^tA = A^{-1}$ 的方阵 A 的集合. 这是 $\mathbf{R}^{n^2}$ 的子集. 事实上, 这是 $\mathbf{R}^{n^2}$ 的一个维数为 $n(n-1)/2$ 的 C^∞ 类的子流形. 为确认这一事实, 我们指出从 $\mathbf{R}^{n^2}$ 到 $\mathbf{R}^{n^2}$ 对称矩阵集合的映射 $A \mapsto {}^tA \cdot A$ 是一个浸没, 而对称矩阵集合与 $\mathbf{R}^{n(n+1)/2}$ 等同, 再利用 2.1.2 的性质 (iii), 即得欲证. 参见习题 2.8.10.

2.1.6.5 $\mathbf{R}^{d+1}$ 的一个 (C^p 类) *超曲面*是 $\mathbf{R}^{d+1}$ 的一个 d 维 (C^p 类) 子流形, 其余维数是 1.

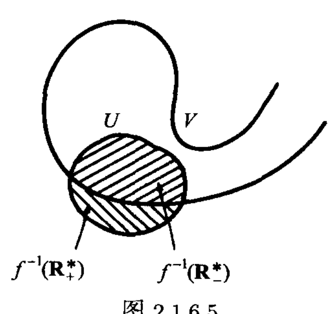


图 2.1.6.5

定理 2.1.2 的性质 (ii) 指出超曲面局部地分割 $\mathbf{R}^{d+1}$ 成两个区域, 如果 $f = f_1$ 是具有定理 2.1.2 性质 (ii) 的一个函数, 它们是 $f^{-1}(\mathbf{R}_+^*)$ 和 $f^{-1}(\mathbf{R}_-^*)$. 虽然要注意, 一般地说, 无法区分这两个区域; 不过参见 6.4, 有些情形还是能够区分的. 问题在于要知道一个超曲面局部地把空间分割成两个区域, 整体地是否也这样, 这一般地称为 "从局部到整体" 的问题: 参见 9.2 和 3.5.2.

2.1.6.6　余维数为 0 的子流形是 $\mathbf{R}^d$ 的开集.

2.1.6.7　维数为 0 的子流形是 $\mathbf{R}^d$ 的孤立点的集合.

2.1.6.8　韦罗内塞曲面. 球面

$$S^2 = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 = 1\}$$

在映射

2.1.6.9
$$f : (x,y,z) \mapsto (x^2, y^2, z^2, \sqrt{2}yz, \sqrt{2}zx, \sqrt{2}xy)$$

下的像是 $\mathbf{R}^6$ 的 2 维子流形, 叫做韦罗内塞曲面, 习题 2.8.5 是关于这个主题的, 参见 2.4.12.2 和 2.6.13.2.

2.1.6.10　习题 2.8.1, 2.8.3, 2.8.4, 2.8.5 提供了子流形的其他例子或反例.

2.1.6.11　$d = 1, n = 2$ 的情形将在第八章和第九章仔细研究, $d = 1, n = 3$ 的情形将在第八章 (曲线) 研究, 而 $d = 2, n = 3$ ($\mathbf{R}^3$ 曲面) 的情形将在第十章和第十一章研究.

2.1.7　过渡

下面的定理 2.1.9 建立 $\mathbf{R}^n$ 的子流形 V 和抽象流形之间的本质联系.

2.1.8　定义

$\mathbf{R}^n$ 的子流形 V 的一个参数表示 (Ω, g) 是一个配对, 其中 $\Omega \in O(\mathbf{R}^d)$, $g \in C^p(\Omega; \mathbf{R}^n)$, 并且 g 是一个浸入, $g(\Omega)$ 是 V 的一个开集, g 诱导从 Ω 到 $g(\Omega)$ 的一个同胚.

2.1.9　定理

给定 $\mathbf{R}^n$ 的一个 d 维 C^p 类的子流形 V, $V\bigcap U_1$ 和 $V\bigcap U_2$ 的参数表示 (Ω_1, g_1) 和 (Ω_2, g_2), 其中 U_1 和 U_2 是 x 在 $\mathbf{R}^n$ 中的邻域. 则映射 $g_2^{-1}\circ g_1$ 属于 $C^p(\Omega_1 \bigcap g_1^{-1}(U_1); \mathbf{R}^n)$ (或者说 g_1 和 g_2 是 C^p- 相容的).

由于 V 是 d 维的子流形, 根据定义 2.1.1, 存在含有 x 的一个开集 S, 一个从 S 到 $f(S)$ 上的微分同胚 f, 使得 $f(S\bigcap V) = f(S)\bigcap \mathbf{R}^d$. 由于 $g_1(\Omega_1) = V\bigcap U_1$, 适当缩小和平移 Ω_1 成 W_1, 可以假定 W_1 是 0 的邻域, 并且 $g_1(W_1) \subset V\bigcap S$ (因为 S 是开集), 从而 $(f\circ g_1)(W_1) \subset \mathbf{R}^d$. 同样, 存在含有 0 的 Ω_2 的开集 W_2, 使得 $(f\circ g_2)(W_2) \subset \mathbf{R}^d$. 于是在集合论的意义下

$$g_2^{-1}\circ g_1 = g_2^{-1}\circ f^{-1}\circ f\circ g_1 = (f\circ g_2)^{-1}\circ(f\circ g_1).$$

$f \circ g_1$ 和 $f \circ g_2$ 是 C^p 类的; $f \circ g_2$ 是双射和平直的 (因为 g_2' 是从 $\mathbf{R}^d$ 到 $\mathbf{R}^n$ 的单射, 而 f' 是从 $\mathbf{R}^n$ 到 $\mathbf{R}^n$ 的双射), 于是根据 0.2.22, $(f \circ g_2)^{-1}$ 是 C^p 类的. 最后, $g_2^{-1} \circ g_1$ 处处局部是 C^p 类的, 从而是 C^p 类的.

对于 $g_2^{-1} \circ g_1$ 的具体例子, 参见习题 2.8.2 和 2.8.7.

2.2 抽 象 流 形

2.2.1 定义

给定一个集合 X 和一个整数 $p > 0$. 配对的集合 $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ 称为 X 上的 C^p **类的 d 维图册**, 如果以下三个公理满足:

(A.T.1) U_i 是 X 的子集, 并且 $X = \bigcup\limits_{i \in I} U_i$.

(A.T.2) 每个 φ_i 是从 U_i 到 $\mathbf{R}^d$ 的一个开集上的双射, 并且对于每个配对 (i, j), $\varphi_i(U_i \bigcap U_j)$ 是 $\mathbf{R}^d$ 的一个开集.

(A.T.3) 对于每个配对 (i, j), 映射 $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ 是从 $\varphi_i(U_i \bigcap U_j)$ 到 $\varphi_j(U_i \bigcap U_j)$ 的一个 C^p 类的微分同胚.

2.2.2 注释

在条件 (A.T.3) 中, 以下注解是适宜的. φ_i^{-1} 定义在 $\varphi_i(U_i)$ 上, $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ 要有定义, 必须 $\varphi_i^{-1}(x) \in U_j$, 即 $x \in \varphi_i(U_j)$, 故 $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ 定义在 $\varphi_i(U_i \bigcap U_j)$ 上, 在 $\varphi_j(U_i \bigcap U_j)$ 内取值.

代替 $\mathbf{R}^d$, 可以取一个巴拿赫空间 E, E 不必是有限维的, 这就扩大了研究的范围, 但也增加了复杂程度, 因为在这种情形下, 线性映射未必是连续的, 参见 [7], 421 页.

2.2.3 定义

定义 2.2.1 中的 (U_i, φ_i) 称为图册的**坐标卡**. 如果 $x \in U_i$, 则说 (U_i, φ_i) 是**在 x 的坐标卡**. 如果 $\varphi_i(x) = 0$ ($\mathbf{R}^d$ 的零向量), 则说它是**中心在 x 的坐标卡**, 如果 $\varphi_i(x) = (\varphi_{i,1}(x), \cdots, \varphi_{i,d}(x))$, 函数 $\varphi_{i,k}(x)$ $(1 \leqslant k \leqslant d)$ 称为与坐标卡 (U_i, φ_i) 关联的**局部坐标**.

2.2.4 定义

给定 X 的一个子集 U, φ 是 U 到 $\mathbf{R}^d$ 的一个开集上的双射. 如果并集 $\{(U, \varphi)\} \bigcup \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ 仍然是图册, 我们称坐标卡 (U, φ) 与图册 $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ 是**相容的**. 两个 C^p 类的 d 维图册是**相容的**, 如果它们的并集仍然是图册.

为使坐标卡 (U, φ) 与图册 $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ 是相容的, 必须诸 $\varphi(U \bigcap U_i)$ 和 $\varphi_i(U \bigcap U_i)$ 是 $\mathbf{R}^d$ 的开集, 并且映射

$$\varphi \circ \varphi_i^{-1} \quad 和 \quad \varphi_i \circ \varphi^{-1}$$

在其定义域上是 C^p 类的.

图册之间的相容关系是等价关系, 由此引出流形的定义.

2.2.5 定义

若在一个集合 X 上给定了一个 X 上的 C^p $(p \geqslant 1)$ 类的 d 维图册的一个等价类, 则称 X 是一个 C^p 类的 d 维**流形**. 给定等价类的任何一个图册的一个坐标卡称为流形 X 的一个**坐标卡**.

相对于拓扑流形, 对应于 $p=0$ 的情形, 这里定义的流形 (对应于 $p>0$ 的情形) 经常称为微分流形, 我们将不谈论拓扑流形.

实际上, 往往在定义流形 X 时, 只给定单独的一个图册, 它取自图册的等价类.

我们现在要给流形 X 装配一个典范拓扑 (只依赖流形的结构). 而在另外的陈述方式里, 我们从一个拓扑空间 X 出发, 要求坐标卡的定义域 U_i 是 X 的开集, 映射 φ_i 是从 U_i 到 $\varphi_i(U_i)$ 上的同胚.

2.2.6 定理

设 X 是一个 C^p 类的 d 维流形. 则对于 X 可以装配一个拓扑, 其开集是坐标卡的定义域的并集. 这个拓扑称为**典范**拓扑.

问题涉及的是验证拓扑的公理 (O_1) 和 (O_2): 用 O 表示开集的集合, 以下两个公理必须满足:

(O_1) O 的集合的所有并集在 O 内,

(O_2) O 的集合的所有有限交集在 O 内.

O 的元素本来就是坐标卡的定义域的并集, (O_1) 平凡地满足. 至于 (O_2), 只需考虑 O 的两个元素的交集. 设

$$A=\bigcup_{j\in J} U_j \quad \text{和} \quad B=\bigcup_{k\in K} U_k$$

是坐标卡的定义域的两个并集. 求交集得

$$A\bigcap B=\bigcup_{(j,k)\in J\times K}(U_j\bigcap U_k),$$

只需证明 $U_j\bigcap U_k$ 是流形的坐标卡的定义域, 即与其他的坐标卡相容. 设 φ_j 是从 U_j 到 $\mathbf{R}^d$ 内的映射, 我们有 $\varphi_j(U_j\bigcap U_k)\in O(\mathbf{R}^d)$, 并且配对

$$(U_j\bigcap U_k, \varphi_j|_{U_j\cap U_k})$$

是一个与 X 的坐标卡相容的坐标卡. 因为若令 $\psi=\varphi_j|_{U_j\cap U_k}$, 则

$$\psi(U_j\bigcap U_k)=\varphi_j(U_j\bigcap U_k)\in O(\mathbf{R}^d),$$

并且对于 X 的所有坐标卡 (U,φ), $\varphi\circ\varphi_j^{-1}$ 是从 $\varphi_j(U\bigcap U_j)$ 到 $\varphi(U\bigcap U_j)$ 的 C^p 类的微分同胚, 故

$$\varphi\circ\psi^{-1}=\varphi\circ\varphi_j^{-1}|_{\varphi_j(U_j\cap U_k\cap U)}$$

是从 $\psi(U\bigcap(U_j\bigcap U_k))$ 到 $\varphi(U\bigcap(U_j\bigcap U_k))$ 上的 C^p 类的微分同胚. 类似得到 $\psi\circ\varphi^{-1}$ 是从 $\varphi(U\bigcap(U_j\bigcap U_k))$ 到 $\psi(U\bigcap(U_j\bigcap U_k))$ 上的 C^p 类的微分同胚.

现在的任务是在 X 装配典范拓扑之后, 用单独的一个图册来表示 X 的开集的特征.

2.2.7 定理

给定 d 维流形 X 的一个图册 $\{(V_i,\varphi_i)\}_{i\in I}$ 和 X 的一个子集 U. 当且仅当对于所有坐标卡 (V_i,φ_i), $\varphi_i(U\bigcap V_i)$ 是 $\mathbf{R}^d$ 的开集, U 是 X 的开集.

事实上, 如果用 $\mathscr{U}$ 表示 X 的满足定理 2.2.7 中的条件的子集的集合, 我们首先证明 $\mathscr{U}$ 定义 X 上的一个拓扑, 然后证明这个拓扑跟在 2.2.6 由集合 O 定义的拓扑一致.

给定 $\mathscr{U}$ 的元素 $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$, 考虑并集 $U=\bigcup\limits_{\alpha\in A}U_\alpha$. 取定图册的一个坐标卡 (V_i,φ_i), 由于 $U\bigcap V_i=\bigcup\limits_{\alpha\in A}(U_\alpha\bigcap V_i)$, 我们有

$$\varphi_i(U\bigcap V_i)=\varphi_i\left(\bigcup_{\alpha\in A}(U_\alpha\bigcap V_i)\right)=\bigcup_{\alpha\in A}\varphi_i(U_\alpha\bigcap V_i),$$

由于 U_α 在 $\mathscr{U}$ 中, $\varphi_i(U_\alpha\bigcap V_i)$ 是 $\mathbf{R}^d$ 的开集, $\varphi_i(U\bigcap V_i)$ 作为 $\mathbf{R}^d$ 的开集的并集, 必是开集. 由此得到 $U\in\mathscr{U}$. 对于 U_α 的元素的有限交集进行类似的推理 (这时要用到 φ_i 是从 V_i 到其像上的单射), 得到它必在 $\mathscr{U}$ 中. 于是 $\mathscr{U}$ 在 X 上定义一个拓扑.

转而证明 $\mathscr{U}=O$. 设 $U\in\mathscr{U}$. 由于诸 V_i 覆盖 X, 我们有 $U=\bigcup\limits_{i\in I}(U\bigcap V_i)$; 如果证明了每个 $U\bigcap V_i$ 都是与图册 $\{(V_i,\varphi_i)\}_{i\in I}$ 相容的坐标卡的定义域, 将有 $U\in O$, 从而 $\mathscr{U}\subset O$. 令

$$W_i=U\bigcap V_i,\quad 和\quad \psi_i=\varphi_i\big|_{U\cap V_i},$$

那么 (W_i,ψ_i) 是一个与给定图册相容的坐标卡. 这是因为对于任意指标 j, 映射 $\varphi_j\circ\psi_i^{-1}$ 定义在

$$\psi_i(W_i\bigcap V_j)=\psi_i(U\bigcap V_i\bigcap V_j)=\varphi_i(U\bigcap V_i\bigcap V_j)=\varphi_i(U\bigcap V_j)\bigcap\varphi_i(V_i\bigcap V_j)$$

上, 第二个等式用到 φ_i 是双射. 于是 $\varphi_i\circ\psi_i^{-1}$ 定义在 $\mathbf{R}^d$ 的一个开集上 (由于 $U\in\mathscr{U}$, 由于两个坐标卡 (V_i,φ_i) 和 (V_j,φ_j) 满足图册的性质 (A.T.2), $\varphi_i(V_i\bigcap V_j)$ 是 $\mathbf{R}^d$ 的开集, 作为 $\mathbf{R}^d$ 的两个开集的交集 $\psi_i(W_i\bigcap V_j)$ 是开集). $\varphi_j\circ\psi_i^{-1}$ 是 $\varphi_j\circ\varphi_i^{-1}$ 在这个开集上的限制, 从而是 C^p 类的微分同胚.

同样验证 $\psi_i\circ\varphi_j^{-1}$ 是一个 C^p 类微分同胚.

现在只需证明包含关系 $O\subset\mathscr{U}$. 为此只需证明 X 的两个相容的图册 $\{(V_i,\varphi_i)\}_{i\in I}$ 和 $\{(W_j,\psi_j')\}_{j\in J}$ 定义同一个拓扑 $\mathscr{U}$.

事实上, 假定这已经证明, 而设 $U\in O$, U 是 X 的坐标卡的定义域 $(U_i)_{i\in I}$ 的若干元素的并集. 取 X 的一个单独的图册, 让它含有所有的 U_i, 对于这个图册的每个

坐标卡 (U_k,φ_k), 我们有

$$\varphi_k(U\bigcap U_k)=\varphi_k\left(\left(\bigcup_{i\in I}U_i\right)\bigcap U_k\right)=\varphi_k\left(\bigcup_{i\in I}(U_i\bigcap U_k)\right)=\bigcup_{i\in I}\varphi_k(U_i\bigcap U_k).$$

根据 (A.T.2), $\varphi_k(U_i\bigcap U_k)$ 是 $\mathbf{R}^d$ 的开集, $\varphi_k(U\bigcap U_k)$ 作为 $\mathbf{R}^d$ 的开集的并集, 必是 $\mathbf{R}^d$ 的开集, 由此推知 $U\in\mathscr{U}$.

该是证明下列引理的时候了.

2.2.8　引理

给定流形 X 的两个图册 $\{(V_i,\varphi_i)\}_{i\in I}$ 和 $\{(W_j,\psi_j)\}_{j\in J}$, 它们分别定义拓扑 $\mathscr{U}$ 和 $\mathscr{U}'$, U 是 X 的一个子集. 则当且仅当 X 对于 $\mathscr{U}$ 是开集时, X 对于 $\mathscr{U}'$ 是开集.

设 $U\in\mathscr{U}$, 而 (W_j,ψ_j) 是第二个图册的任意一个坐标卡, 必须证明 $\psi_j(U\bigcap W_j)$ 是 $\mathbf{R}^d$ 的一个开集, 即要证它是它的每个点的邻域. 设 $y\in\psi_j(U\bigcap W_j)$, 于是存在 $x\in U\bigcap W_j$, 使得 $y=\psi_j(x)$. X 被诸 V_j 覆盖, 可设 $x\in V_{i_0}$, 那么有 $y\in\psi_j(U\bigcap V_{i_0}\bigcap W_j)$. 但是坐标卡

$$(U\bigcap V_{i_0},\varphi_{i_0}|_{U\cap V_{i_0}})$$

与第一个图册是相容的 (在 2.2.7 中 $\mathscr{U}\subset O$ 的证明), 而两个坐标卡是等价的, 故此坐标卡与第二个图册也是相容的, 特别地, 有 $\psi_j(U\bigcap V_{i_0}\bigcap W_j)$ 是 $\mathbf{R}^d$ 的含于 $\psi_j(U\bigcap W_j)$ 的开集. 这就完成了引理的证明.

定理 2.2.7 给我们提供了另外一种定义流形的拓扑的方式.

2.2.9　定理

设给流形 X 配备了典范拓扑. 则对于流形的每个坐标卡 (U,φ), 从 U 到 $\varphi(U)$ 上的映射 φ 是一个同胚.

由于 φ 是双射, 所以只需证明 φ 是双方连续的. φ 是连续的, 当且仅当对于 $\mathbf{R}^d$ 的每个开集 V, $\varphi^{-1}(V)$ 是 X 的一个开集. 如果证明了配对 $(\varphi^{-1}(V),\varphi|_{\varphi^{-1}(V)})$ 是流形 X 的一个坐标卡, 其定义域就是 X 的一个开集. 记 $\psi=\varphi|_{\varphi^{-1}(V)}$, 并且设 (V_i,φ_i) 是 X 的任意一个坐标卡. 由于 ψ 是从 $\varphi^{-1}(V)$ 到 $V\bigcap\varphi(U)$ 上的双射, 映射 $\varphi_i\circ\psi^{-1}$ 事实上就是 $\varphi_i\circ\varphi^{-1}$ 在 $\mathbf{R}^d$ 的开集

$$V\bigcap\varphi(U)\bigcap\varphi(U_i)=V\bigcap\varphi(U\bigcap U_i)$$

上的限制, 由此推出 $\varphi_i\circ\psi^{-1}$ 是从 $V\bigcap\varphi(U\bigcap U_i)=\psi(\varphi^{-1}(V)\bigcap U_i)$ 到 $\varphi_i(\varphi^{-1}(V)\bigcap U_i)$ 上的 C^p 类微分同胚.

映射 $\psi\circ\varphi_i^{-1}$ 定义在 $\varphi_i(U_i\bigcap\varphi^{-1}(V))$ 上, 既然 ψ 是 φ 在 $\varphi^{-1}(V)$ 上的限制, $\psi\circ\varphi_i^{-1}$ 就是 $\varphi\circ\varphi_i^{-1}$ 在

$$\varphi_i(U_i\bigcap\varphi^{-1}(V))=\varphi_i(U_i\bigcap U\bigcap\varphi^{-1}(V))$$

上的限制, 在 $\varphi_i(U_i \bigcap U) \bigcap V$ 上取值, 从而是 $\mathbf{R}^d$ 的开集 (根据 (A.T.2), $\varphi(U_i \bigcap U)$ 是 $\mathbf{R}^d$ 的开集). 再根据 (A.T.3), 推出 $\varphi_i(U_i \bigcap \varphi^{-1}(V))$ 是 $\mathbf{R}^d$ 的开集, 并且 $\psi \circ \varphi_i^{-1}$ 是 C^p 类微分同胚.

现在只要证明从 $\varphi(U)$ 到 U 上的映射 φ^{-1} 是连续的, 即证明对于 X 的所有开集 S, $\varphi(S)$ 是 $\mathbf{R}^d$ 的开集.

由于 φ 只定义在 U 上, 所以事实上有 $\varphi(S) = \varphi(S \bigcap U)$. 设 $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ 是 X 的一个图册, 我们有 $S \bigcap U = \left(\bigcup_{i \in I} U_i\right) \bigcap S \bigcap U$, 于是

$$\varphi(S \bigcap U) = \varphi\left(\bigcup_{i \in I}(U_i \bigcap S \bigcap U)\right) = \bigcup_{i \in I} \varphi(S \bigcap U \bigcap U_i).$$

S 既然是 X 的开集, $S \bigcap U$ 也是 X 的开集, 根据定理 2.2.7, $\varphi(S \bigcap U \bigcap U_i)$ 是 $\mathbf{R}^d$ 的开集, 故 $\varphi(S \bigcap U)$ 是 $\mathbf{R}^d$ 的开集.

2.2.10 流形的例子

首先指出, $\mathbf{R}^n$ 对于由唯一坐标卡 $(\mathbf{R}^n, \mathrm{id}_{\mathbf{R}^n})$ 组成的图册是一个流形. 人们总是默认这个结构作为 $\mathbf{R}^n$ 的流形结构.

2.2.10.1 定理

$\mathbf{R}^n$ 的子流形以典范的方式是流形, 并且它们的流形的拓扑与由 $\mathbf{R}^n$ 诱导的拓扑重合.

设 V 是 $\mathbf{R}^n$ 的 d 维 C^p 类的子流形. 根据定理 2.1.2(v), 对于 V 的每个 x, 存在 $\mathbf{R}^n$ 的包含 x 的一个开集 U, $\mathbf{R}^d$ 的一个开集 Ω_x, 和一个从 Ω_x 到 $\mathbf{R}^n$ 的映射 g_x, 使得 g_x 是从 Ω_x 到 $V \bigcap U$ 上的一个同胚, 并且根据 2.1.3.1 末尾所说的是一个浸入.

考虑 V 的子集 $U_x = g_x(\Omega_x)$ 和从 U_x 到 Ω_x 的映射 g_x^{-1}, 配对 $(U_x, g_x^{-1})_x$ 确定一个图册, 这是因为

(A.T.1) $$\bigcup_{x \in V} U_x = V;$$

(A.T.2) $$g_x^{-1}(U_x) = \Omega_x$$

是 $\mathbf{R}^d$ 的一个开集, 如果考虑 $g_x^{-1}(U_x \bigcap U_y)$, 这是 $U_x \bigcap U_y = g_x(\Omega_x) \bigcap g_y(\Omega_y)$ 在同胚 g_x^{-1} (参见 2.1.2 的 (v)) 下的像, 而 $U_x \bigcap U_y = g_x(\Omega_x) \bigcap g_y(\Omega_y)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的开集, 故 $g_x^{-1}(U_x \bigcap U_y)$ 是开集.

(A.T.3) 这正是定理 2.1.9.

稍迟在 (3.1.5) 将看到, 在某种意义下, 除 $\mathbf{R}^n$ 的子流形外, $\mathbf{R}^n$ 不再有其他的流形.

2.2.10.2

对于一个流形 X 配备它的典范拓扑, 则它的开集是一个流形. 这时我们称它在典范的意义上是一个流形.

X 既然是一个流形, 它有图册 $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i\in I}$. 诸配对

$$(U\bigcap U_i, \varphi_i|_{U\cap U_i})_{i\in I}$$

组成 $U \subset X$ 的一个图册.

(A.T.1) 诸 U_i 覆盖 X, 诸 $U\bigcap U_i$ 覆盖 U;

(A.T.2) 令 $\psi_i = \varphi_i|_{U\cap U_i}$, 则根据 2.2.7, $\psi_i(U\bigcap U_i) = \varphi_i(U\bigcap U_i)$ 是 $\mathbf{R}^d$ 的开集 (假定 X 是 d 维的), 由于 $U\bigcap U_j$ 也是 X 的开集, 则 $\psi_i(U\bigcap U_i\bigcap U_j)$ 是 $\mathbf{R}^d$ 的开集.

(A.T.3) 最后 $\psi_j\circ\psi_i^{-1}$ 是 $\varphi_j\circ\varphi_i^{-1}$ 在 $\varphi_i(U\bigcap U_i\bigcap U_j)$ 的限制, 从而是从 $\psi_i(U\bigcap U_i\bigcap U_j)$ 到 $\psi_j(U\bigcap U_i\bigcap U_j)$ 上的 C^p 类微分同胚.

2.2.10.3

设 X 是一个 C^p 类的 d 维流形,$\{(U_i, \varphi_i)\}_{i\in I}$ 是 X 的一个图册, 而 Y 是一个 C^p 类的 e 维流形, $\{(V_j, \psi_j)\}_{j\in J}$ 是 Y 的一个图册. 则 $X\times Y$ 是由一个图册

$$\{U_i\times V_j, \varphi_i\times\psi_j\}_{(i,j)\in I\times J}$$

定义的 C^p 类的 $d+e$ 维流形.

$\varphi_i\times\psi_j$ 的定义是

$$\varphi_i\times\psi_j : (x,y)\mapsto(\varphi_i(x), \psi_j(y))\in\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^e = \mathbf{R}^{d+e}.$$

注意, 如果 X 是 C^p 类, 而 Y 是 C^q 类的, 则 $X\times Y$ 是 $C^{\inf(p,q)}$ 类的.

命题 2.2.10.3 的验证是直截了当的. 还需验证 (留给读者) X 上的相容的图册和 Y 上的相容的图册在 $X\times Y$ 上提供相容的图册. 于是 $X\times Y$ 上的流形结构仅依赖 X 和 Y 的流形结构. 这样, 我们就可以谈论 $X\times Y$ 是流形 X 和 Y 的乘积流形.

2.2.10.4 下面的例子指出流形的拓扑一般不是分离的.

在 $\mathbf{R}^2$ 上给定两个子集

$$E_1 = \{(x,0); x\in\mathbf{R}\} \quad 和 \quad E_2 = \{(x,1); x\in\mathbf{R}\}.$$

在 $F = E_1\bigcup E_2$ 上定义一个等价关系 $\mathscr{R}$:

$$\begin{cases}(x,0)\mathscr{R}(y,0)\Leftrightarrow x=y,\\(x,1)\mathscr{R}(y,1)\Leftrightarrow x=y,\\(x,0)\mathscr{R}(y,1)\Leftrightarrow x=y<0.\end{cases}$$

商集 $X = F/\mathscr{R}$ 的类用元素 $(x,0), x<0$ 和元素 $(x,0),(x,1), x\geqslant 0$ 表示, 见图 2.2.10.4.

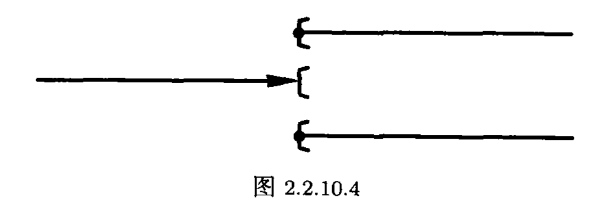


图 2.2.10.4

用下列两个坐标卡给 X 配备流形结构:

$$U_1=\{(x,0);x\in\mathbf{R}\},\quad \varphi_1((x,0))=x,$$
$$U_2=\{(x,0);x<0\}\bigcup\{(y,1),y\geqslant 0\},\quad \varphi_2((x,0))=x,\ \varphi_2((y,1))=y.$$

我们有 $U_1\bigcup U_2=X$, (A.T.1) 满足.

$\varphi_1(U_1)=\mathbf{R}$, $\varphi_2(U_2)=\mathbf{R}$ 是开集, $\varphi_1(U_1\bigcap U_2)=\{x;x<0\}$ 是开集, $\varphi_2(U_1\bigcap U_2)$ $(=\varphi_1(U_1\bigcap U_2))$ 是开集. $\varphi_1\circ\varphi_2^{-1}$ 是从 $\varphi_2(U_1\bigcap U_2)=(-\infty,0)$ 到 $\varphi_1(U_1\bigcap U_2)=(-\infty,0)$ 上的映射 $x\mapsto(x,0)\mapsto x$, 这是一个 C^∞ 类的映射. 我们为 X 配备的流形结构是 C^∞ 类的.

而与之关联的拓扑不是分离的. 这是因为点 $(0,0)$ 和 $(0,1)$ 是两个不同的点, 却没有不相交的邻域. 如果 U 是 X 的包含点 $(0,0)$ 的开集, 则 $\varphi_1(U\bigcap U_1)$ 应当是 $\mathbf{R}$ 的一个开集, 而 $(0,0)\in U\bigcap U_1$, 故 $\varphi_1(U\bigcap U_1)$ 是 $\mathbf{R}$ 的一个包含 0 的开集, 因而包含一个形如 $(-\alpha,\alpha)$ $(\alpha>0)$ 的区间,$\{(x,0);-\alpha<x<0\}\subset U$; 同样, 如果 V 是 X 的包含点 $(0,1)$ 的开集, 应当包含一个形如 $\{(x,0);-\beta<x<0\}$ 的子集. 于是 U 和 V 必定相交.

今后, 像这个例子一样的流形将排除在外.

2.2.10.5 *设 X 是一个流形, 而 E 是任意一个集合, 则 $X\times E$ 可以配备一个流形结构.*

设 $\{(U_i,\varphi_i)\}_{i\in I}$ 是 X 的一个图册, 那么 $\{(U_i\times\{e\},\psi_{i,e})\}_{i\in I,e\in E}$ 是 $X\times E$ 的一个图册, 其中 $\psi_{i,e}(u,e)=\varphi_i(u)$. 事实上, 如果 $e\neq f$, 那么 $U_i\times\{e\}\bigcap U_j\times\{f\}$ 是空集, 如果 $e=f$, 那么 $U_i\times\{e\}\bigcap U_j\times\{e\}=(U_i\bigcap U_j)\times\{e\}$, 这就使得 (A.T.2) 和 (A.T.3) 的验证简单易行.

如果 E 不是可数的, $X\times E$ 将是一个不大合理的太大的流形, 其意义将在 3.1.3 明确. 我们会指出这样的例子中的流形是不连通的. 我们立即给一个连通的不合理的流形.

2.2.10.6 半直线或超限半直线

设 Ω 是一个非可数的良序集, 其每个切断 $H_x=\{y\in\Omega:y<x\}$ 是可数的. 这样的集合确实存在, 关于其细节, 参见 [10], A.1 到 A.12. 设 ω 是 Ω 的最小元素, 而

$$X=\Omega\times[0,1)-\{(\omega,0)\},$$

我们可以说 X 是以 Ω 的元素做指标的线段的一个汇集, 第一条线段是 $(0,1)$, 其余的是 $[0,1)$. 我们为 X 以词典法排序, 并且给 X 配备和这个次序关联的拓扑. 可以验证这样 X 就配备了一个 C^∞ 类的维数为 1 的连通的流形结构.

在习题 3.6.4 中也给了一个怪异的但构造更简单的 2 维流形的例子. 在第三章, 3.1.6, 我们将排除这类流形, 但现在就决定

2.2.10.7　　**从今以后, 假定所有流形都是分离的**

不言而喻, "分离的" 是对于典范拓扑说的. 下面给出流形的拓扑的几个性质.

2.2.11　定理

流形 X 是局部紧致的拓扑空间.

必须证明, X 的每个点有一个紧致邻域. 给定 $x \in X$ 及在 x 的一个坐标卡 (U,φ). 根据 2.2.9, φ 是 U 到 $\varphi(U)$ 上的同胚, $\varphi(x)$ 在 $\mathbf{R}^d$ 的邻域是局部紧致的. 于是存在 $\varphi(x)$ 在 $\mathbf{R}^d$ 的一个紧致邻域 $K \subset \varphi(U)$, 而 φ^{-1} 是连续的, 又 X 是分离的, 故 $\varphi^{-1}(K)$ 是 x 的一个紧致邻域.

2.2.12　定理

一个流形 X 是局部连通的.

证明是类似的: $\varphi(U)$ 是 $\varphi(x)$ 在 $\mathbf{R}^d$ 中的一个邻域, 它包含 $\varphi(x)$ 的一个连通邻域 C, $\varphi^{-1}(C)$ 是 X 的一个含有 x 的连通邻域. 对于含有 x 的开集 U 的内部, 这一推理都成立, 而不限于一个给定的坐标卡.

2.2.13　定理

一个流形 X 是连通的, 当且仅当它是弧连通的.

我们知道对于一个拓扑空间, 弧连通蕴涵连通. 反之, 假定 X 仅仅在拓扑的意义下连通. 给定 $x \in X$, 令 $Q = \{y \in X;\ 存在从\ x\ 到\ y\ 的道路\}$. 我们必须证明 $Q = X$, 而为此, 我们将证明 Q 非空, 既是开集, 又是闭集. 由于 $x \in Q$, 所以 Q 非空.

Q 是开集. 设 $y \in Q$, (U,φ) 是在点 y 的一个坐标卡, $\varphi(U)$ 是 $\mathbf{R}^d$ 的开集, 故存在 $\varepsilon > 0$, 使得 $B(\varphi(y),\varepsilon) \subset \varphi(U)$. 设 $z \in B(\varphi(y),\varepsilon)$. 存在连续映射 $\gamma : [0,1] \to \mathbf{R}^d$, 使得 $\gamma(0) = \varphi(y), \gamma(1) = z$, 并且 $\gamma([0,1]) \subset B(\varphi(y),\varepsilon)$ (例如映射 $\gamma(t) = \varphi(y) + t(z - \varphi(y))$). 映射

$$\varphi^{-1} \circ \gamma : [0,1] \to \varphi^{-1}(B(\varphi(y),\varepsilon))$$

是一条从 y 到 $\varphi^{-1}(z)$ 的道路. 由于我们可以用道路连接 x 到 y, 故可以从 x 用道路连接到 $\varphi^{-1}(z)$, z 是 $B(\varphi(y),\varepsilon)$ 的任意一个点. 于是 $y \in Q \Rightarrow \varphi^{-1}(B(\varphi(y),\varepsilon)) \subset Q$. 由于 φ 是从 U 到 $\varphi(U)$ 的同胚, $\varphi^{-1}(B(\varphi(y),\varepsilon))$ 是一个开集, 从而 Q 是它的每个点的邻域.

Q 是闭集. 设 $y \in \overline{Q}$, (U,φ) 是在点 y 的一个坐标卡, $\varphi(y) \in \varphi(U)$ 是 $\mathbf{R}^d$ 的开集, 故存在 $\varepsilon > 0$, 使得 $B(\varphi(y),\varepsilon) \subset \varphi(U)$, 于是 $\varphi^{-1}(B(\varphi(y),\varepsilon)) \subset U$. 因为 $y \in \overline{Q}$, 而 $\varphi^{-1}(B(\varphi(y),\varepsilon))$ 是包含 y 的一个开集, 故存在 $z \in Q \bigcap \varphi^{-1}(B(\varphi(y),\varepsilon))$. 由于

$\varphi(z) \in B(\varphi(y),\varepsilon)$, 故存在 $\mathbf{R}^d$ 中的道路连接 $\varphi(y)$ 和 $\varphi(z)$, 与 φ^{-1} 复合, 可以用 X 中的道路连接 y 和 z. 而 $z \in Q$, 存在 X 中的道路连接 x 和 z, 最后, 连接 x 和 y, 于是 $y \in Q$, 即 $\overline{Q} \subset Q$.

终于证明了 Q 是 X 的非空子集, 既是开集, 又是闭集, 故 $Q = X$.

2.2.14 重要流形的例子是曲线和紧致曲面, 对于曲线, 将在 3.4 节对其进行分类, 对于紧致曲面, 参见 4.2.25.

2.3 态　射

2.3.1 定义

设 X 和 Y 分别是 d 维和 e 维, C^q 类和 C^r 类的两个流形, $p \leqslant \inf(q,r)$. 我们称一个从 X 到 Y 内的连续映射 f 是一个 C^p态射, 如果对于 X 的每个在 x 的坐标卡 (U,φ), 和 Y 的每个在 $f(x)$ 的坐标卡 (V,ψ), 从 $\varphi(U\bigcap f^{-1}(V))$ 到 $\mathbf{R}^e$ 内的映射 $\psi\circ f\circ\varphi^{-1}$ 是 C^p 类的. 所有从 X 到 Y 内的 C^p 态射的集合记作 $C^p(X;Y)$.

为了谈论可微性, 我们必须经由坐标卡过渡. 细说如下: $\psi\circ f\circ\varphi^{-1}$ 仅在 $\varphi(U)$ 的一部分上有定义: 必须 $y \in \varphi(U)$, 使得 $f(\varphi^{-1}(y)) \in V$, ψ 在 V 有定义. 于是 $\varphi^{-1}(y) \in f^{-1}(V)$. 由于 φ 是从 U 到 $\varphi(U)$ 上的双射, 故 $y \in \varphi(f^{-1}(V))$, 最终 $y \in \varphi(U\bigcap f^{-1}(V))$, 后者是 $\varphi(U)$ 的涂阴影的部分.

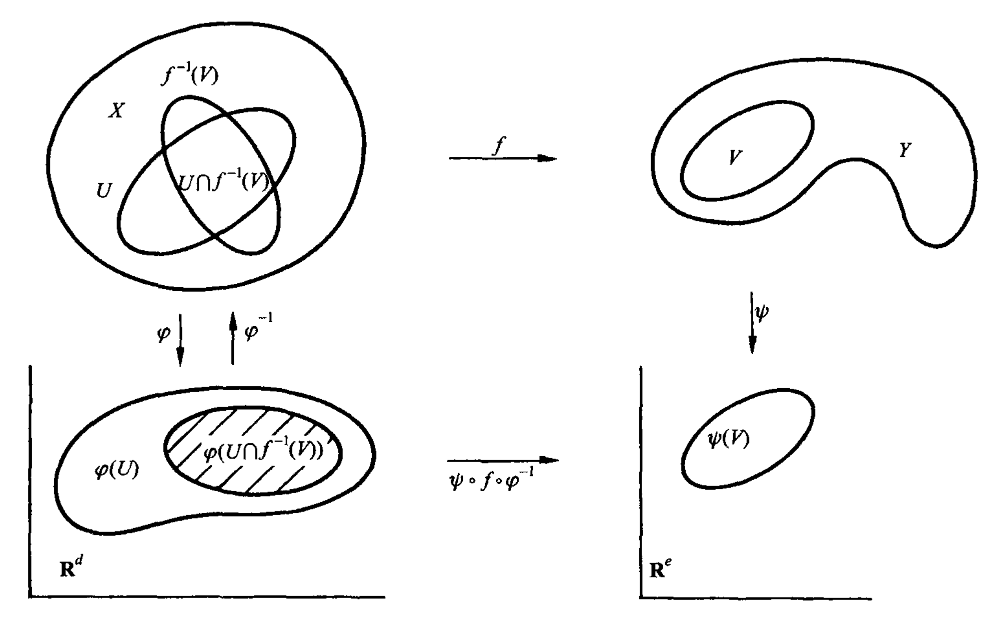


图 2.3.1

由于假定了 f 是连续的, 并且 V 是 Y 的开集, $U\bigcap f^{-1}(V)$ 是 X 的开集, 而 φ 是从 U 到 $\varphi(U)$ 上的同胚, $\varphi(U\bigcap f^{-1}(V))$ 是 $\mathbf{R}^d$ 的开集, 可以谈论在 $\varphi(U\bigcap f^{-1}(V))$

的 C^p 类映射.

如果没有必要明确 f 是什么类的, 有时就称 f 是一个态射.

这个定义涉及在 x 的和在 $f(x)$ 的所有坐标卡, 有时候不大便于应用. 我们有下列态射特征.

2.3.2 定理

给定维数分别为 d 维和 e 维的, 大于或等于 p 类的两个流形 X 和 Y, 设 f 是一个从 X 到 Y 内的连续映射. 下列三个条件是等价的:

(i) f 是一个从 X 到 Y 内 C^p 态射;

(ii) 对于 X 的每个点 x, 对于 X 的在 x 的每个坐标卡 (U,φ) 和在 $f(x)$ 的每个坐标卡 (V,ψ), 只要 $f(U)\subset V$, 就有 $\psi\circ f\circ\varphi^{-1}$ 从 $\varphi(U)$ 到 $\mathbf{R}^e$ 内是 C^p 类的;

(iii) 对于 X 的每个点 x, 存在 X 的在 x 的一个坐标卡 (U,φ) 和 Y 在 $f(x)$ 的一个坐标卡 (V,ψ), 只要 $\varphi(U)\subset V$, 就有 $\psi\circ f\circ\varphi^{-1}\in C^p(\varphi(U);\mathbf{R}^e)$.

(i) $\Rightarrow$ (ii) 如果 (V,ψ) 是在 $f(x)$ 的一个坐标卡, 使得 $f(U)\subset V$, 则有 $U\subset f^{-1}(V)$, 于是 $U\bigcap f^{-1}(V)=U$, f 是态射, 故在这个情形下, $\psi\circ f\circ\varphi^{-1}\in C^p(\varphi(U);\mathbf{R}^e)$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) 取 Y 在 $f(x)$ 的一个坐标卡 (V,ψ), 由于 f 是连续的, $f^{-1}(V)$ 是 X 的一个包含 x 的开集, 根据 X 的拓扑的定义, 存在一个在 x 的坐标卡 (U,φ), 使得 $U\subset f^{-1}(V)$, 从而 $f(U)\subset V$, 已经假定 (ii) 的性质满足, 故 $\psi\circ f\circ\varphi^{-1}$ 从 $\varphi(U)$ 到 $\mathbf{R}^e$ 内是 C^p 类的.

(iii) $\Rightarrow$ (i) 设 (S,α) 是 X 在 x 的一个坐标卡, (T,β) 是 Y 在 $f(x)$ 一个的坐标卡, $\beta\circ f\circ\alpha^{-1}$ 定义在 $\mathbf{R}^d$ 的开集 $\alpha(S\bigcap f^{-1}(T))$ 上, 取值在 $\mathbf{R}^e$ 内, 要证明它是 C^p 类的. 为此, 只需证明它在 $\alpha(S\bigcap f^{-1}(T))$ 的每个点的一个邻域是 C^p 类的.

取定 $u\in\alpha(S\bigcap f^{-1}(T))$, 并令 $x'=\alpha^{-1}(u)\in S$. 把性质 (iii) 应用到 x', 存在 X 在 x' 的一个坐标卡 (U,φ) 和 Y 在 $f(x')$ 的一个坐标卡 (V,ψ), 使得 $f(U)\subset V$, 并且 $\psi\circ f\circ\varphi^{-1}\in C^p(\varphi(U);\mathbf{R}^e)$. 考虑映射

$$\beta\circ\psi^{-1}\circ\psi\circ f\circ\varphi^{-1}\circ\varphi\circ\alpha^{-1}=\beta\circ f\circ\alpha^{-1}.$$

$\varphi\circ\alpha^{-1}$ (坐标卡的变换映射) 从包含点 $u=\alpha(x')$ 的 $\alpha(S\bigcap U)$ 到 $\varphi(S\bigcap U)$ 上是 C^p 类的; $\psi\circ f\circ\varphi^{-1}$ 从 $\varphi(U)$ 到 $\mathbf{R}^e$ 是 C^p 类的. 由于 $S\bigcap U$ 是 X 的开集, 而 φ 是从 U 到 $\varphi(U)$ 上的一个同胚, 故 $\varphi(S\bigcap U)$ 是 $\varphi(U)$ 的一个开集, 随之 $\psi\circ f\circ\varphi^{-1}$ 在 $\varphi(S\bigcap U)$ 上的限制是 C^p 类的. 最后 $\beta\circ\psi^{-1}$ 从 $\psi(T\bigcap V)$ 到 $\beta(T\bigcap V)$ 上是 C^p 类的. 我们有

$$u\xmapsto{\varphi\circ\alpha^{-1}}\varphi(x')\xmapsto{\psi\circ f\circ\varphi^{-1}}\psi(f(x')).$$

而 $f(x')\in V$ (坐标卡 (V,ψ) 的选取), 又有

$$u\in\alpha(S\bigcap f^{-1}(T))\Rightarrow\alpha^{-1}(u)=x'\in f^{-1}(T)\Rightarrow f(x')\in T,$$

故 $\psi(f(x')) \in \psi(T)\bigcap\psi(V) = \psi(T\bigcap V)$. $\beta\circ\psi^{-1}$ 在 $\psi(T\bigcap V)$ 上是 C^p 类的, 故在 $\psi(f(x'))$ 的一个邻域内是 C^p 类的, 终于得到映射

$$(\beta\circ\psi^{-1})\circ(\psi\circ f\circ\varphi^{-1})\circ(\varphi\circ\alpha^{-1})$$

在 $u\in\alpha(S\bigcap f^{-1}(T))$ 的一个邻域内是 C^p 类的. u 既然是任意选取的, 这就表明 $\beta\circ f\circ\alpha^{-1}\in C^p(\alpha(S\bigcap f^{-1}(T));\mathbf{R}^e)$.

2.3.3 态射的例子

2.3.3.1 *设 X 和 Y 是两个流形. $X\times Y$ 在 X 内和在 Y 内的投影分别是态射.*

设 $p: X\times Y\to X$ 是第一个典范投影. 根据 2.3.2 (iii), 只需证明对于 $X\times Y$ 的每个点 (x,y), 存在 $X\times Y$ 的在 (x,y) 的一个坐标卡 $(U\times V,\varphi\times\psi)$ 和 X 在 $x=p((x,y))$ 的一个坐标卡 (W,θ), 使得 $p(U\times V)\subset W$, 并且 $\theta\circ p\circ(\varphi\times\psi)^{-1}$ 从 $(\varphi\times\psi)(U\times V)$ 到 $\mathbf{R}^d$ (设 X 是 d 维的) 内是 C^∞ 类的. $(U\times V,\varphi\times\psi)$ 是在 (x,y) 的乘积类型的坐标卡 (参见 2.2.10.3), 其中 (U,φ) 是 X 在 x 的坐标卡. 我们有 $p(U\times V)=U$, 而映射 $\varphi\circ p\circ(\varphi\times\psi)^{-1}$ 由

$$(s,t)\longmapsto\underbrace{(\varphi^{-1}(s),\psi^{-1}(t))}_{\in U\times V}\overset{p}{\longmapsto}\varphi^{-1}(s)\overset{\varphi}{\longmapsto}s$$

定义在 $(\varphi\times\psi)(U\times V)$ 上, 故是 C^∞ 类的.

2.3.3.2 *X,Y,Z 是三个流形. 若 $f\in C^p(X;Y)$ 且 $g\in C^p(Y;Z)$, 则 $g\circ f\in C^p(X,Z)$.*

设 $x\in X, z=g(f(x)), y=f(x)$. 由假设, 并且对于 g 应用 2.3.2 (iii), 存在 Y 的在 y 的一个坐标卡 (V,ψ) 和 Z 在 z 的一个坐标卡 (W,θ), 使得 $g(V)\subset W$, 并且 $\theta\circ g\circ\psi^{-1}\in C^p(\psi(V);\theta(W))$. 由假设, 并且把定义 2.3.1 应用到 f, 对于 X 在 x 的任意一个坐标卡 (U,φ), 我们有 $\psi\circ f\circ\varphi^{-1}\in C^p(\varphi(U\bigcap f^{-1}(V));\psi(V))$. 于是 2.3.2 (iii) 对于 $g\circ f$ 满足, 只需取 $(U\bigcap f^{-1}(V),\varphi)$ 和 (W,θ) 作为所需要的坐标卡, 并且由于

$$\theta\circ(g\circ f)\circ\varphi^{-1}=(\theta\circ g\circ\psi^{-1})\circ(\psi\circ f\circ\varphi^{-1}),$$

$\theta\circ(g\circ f)\circ\varphi^{-1}$ 是 C^p 类的 (参见 0.2.15.1).

2.3.3.3 *设 X,Y,Z 是三个 C^r 类的流形, 而 p 和 q 分别是 $X\times Y$ 到 X 及 Y 上的典范投影. 从 Z 到 $X\times Y$ 的映射 f 是 C^r 态射, 当且仅当坐标函数 $p\circ f$ 和 $q\circ f$ 都是 C^r 态射.*

事实上, 如果 f 是 C^r 态射, 根据 2.3.3.1, 得 p 和 q 是 C^r 态射, 再由例子 2.3.3.2, 则得 $p\circ f$ 和 $q\circ f$ 都是 C^r 态射.

反之, 设 $p\circ f$ 和 $q\circ f$ 都是 C^r 态射.

设 $z\in Z$, 而 $f(z)=(x,y)=(p(f(z)),q(f(z)))$. 我们知道存在在 z 的坐标卡 (W_1,θ_1) 和在 $x=p\circ f(z)$ 的坐标卡 (U,φ), 使得 (假定 X 是 d 维的)

$$(p\circ f)(W_1)\subset U,\quad 并且\ \varphi\circ(p\circ f)\circ\theta_1^{-1}\in C^r(\theta_1(W_1);\mathbf{R}^d).$$

同样, 存在在 z 的坐标卡 (W_2, θ_2) 和在 $y=(q\circ f)(z)$ 的坐标卡 (V,ψ), 使得 (假定 Y 是 e 维的).

$$(q\circ f)(W_2)\subset V, \quad 并且\ \psi\circ(q\circ f)\circ\theta_2^{-1}\in C^r(\theta_2(W_2);\mathbf{R}^e).$$

令 $W=W_1\bigcap W_2$ 及 $\theta=\theta_1|_W$, 考虑在 z 的坐标卡 (W,θ) 及 $X\times Y$ 在 $(x,y)=((p\circ f)(z),\ (q\circ f)(z))$ 的坐标卡 $(U\times V,\varphi\times\psi)$. 我们有

$$f(W)\subset(p\circ f)(W)\times(q\circ f)(W)\subset U\times V,$$

并且从 $\theta(W)$ ($\mathbf{R}^h$ 的开集, h 是 Z 的维数) 到 $\mathbf{R}^{d+e}$ 的映射

$$(\varphi\times\psi)\circ f\circ\theta^{-1}=(\varphi\circ p\circ f\circ\theta^{-1})\times(\psi\circ q\circ f\circ\theta^{-1})$$

是 C^r 类的, 这是因为其分量函数是 C^r 类 (这里涉及的是从 $\mathbf{R}^h$ 到 $\mathbf{R}^{d+e}$ 内的函数). 事实上,

$$\varphi\circ p\circ f\circ\theta^{-1}=\varphi\circ(p\circ f)\circ\theta_1^{-1}\circ(\theta_1\circ\theta^{-1}),$$

而 $\theta_1\circ\theta^{-1}$ 作为坐标卡的替换映射是 C^r 类的, $\varphi\circ(p\circ f)\circ\theta_1^{-1}$ 根据假设是 C^r 类的. 同样可以证明 $\psi\circ q\circ f\circ\theta^{-1}$ 是 C^r 类的.

2.3.3.4　*设 Y 是一个流形, 而 V 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个 C^p 类的子流形. 那么若从 $\mathbf{R}^n$ (看作 n 维 C^∞ 类流形) 到 Y 内的映射 f 是 C^p 类的, 则从 V 到 Y 内的映射 $f|_V$ 是 C^p 态射.*

设 $x\in V$, 而 $f(x)=y\in Y$. 由于我们假定 $\mathbf{R}^n$ 配备了典范流形结构, 其坐标卡是 $(U,\mathrm{id}|_U)$, U 是 $\mathbf{R}^n$ 的开集, $\mathrm{id}|_U$ 是从 U 到 U 上的恒等映射. 由于 f 是 C^p 类的, 存在包含 x 的 $\mathbf{R}^n$ 的一个开集 U_1, U_1 对应 $\mathbf{R}^n$ 在 x 的一个坐标卡, Y 在 y 的一个坐标卡 (W,φ), 使得 $f(U_1)\subset W$, 并且 $\varphi\circ f: U_1\to\mathbf{R}^r$ (r 是 Y 的维数) 是 C^p 类的.

由于 V 是 $\mathbf{R}^n$ 的子流形, 存在 (定理 2.1.2 (v)) $\mathbf{R}^n$ 的一个含 x 的开集 U_2, $\mathbf{R}^d$ 的一个开集 Ω (设 V 是 d 维的) 和一个浸入 $g:\Omega\to\mathbf{R}^n$, 使得 g 是一个从 Ω 到 $V\bigcap U_2$ 上的一个 C^p 类的同胚. 根据例 2.2.10.1, $(g(\Omega),g^{-1})$ 是 V 在 x 的一个坐标卡. 令 $U=U_1\bigcap U_2$, 这是 $\mathbf{R}^n$ 的一个包含 x 的开集, 并且 $f(U)\subset W$. 考虑 $\Omega_1=g^{-1}(V\bigcap U)$ 和 $g_1=g|_{\Omega_1}$, g_1 是从 Ω_1 到 $V\bigcap U$ 上的 C^p 类的同胚, 故配对 $(g_1(\Omega_1),\ g_1^{-1})$ 是在 x 的一个坐标卡, 与在 y 的坐标卡 (W,φ) 一起, 我们有

$$f(g_1(\Omega_1))=f(V\bigcap U)\subset f(U)\subset W,$$

$\varphi\circ f\circ(g_1^{-1})^{-1}=\varphi\circ f\circ g_1$ 定义在 Ω_1 上, 这是因为 $g_1(\Omega_1)=V\bigcap U\subset U$, 并且 $\varphi\circ f$ 在 U 上有定义. $\varphi\circ f\circ g_1$ 作为 C^p 类函数的复合是 C^p 类的. 这就证明了 $f|_V\in C^p(V;Y)$.

2.3.3.5　*设 X 是一个流形, W 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个子流形, $f\in C^p(X;\mathbf{R}^n)$, 若 $f(X)\subset W$, 必有 $f\in C^p(X;W)$.*

验证留给读者; 鉴于 2.2 节和 2.3 节也已给出了详细的证明, 为了让大家掌握证明的 "技术", 从今以后, 证明经常是简要的, 甚至留作习题.

2.3.4 定理

给定一个流形 X 和 $C^p(X;\mathbf{R})$, 这里 $\mathbf{R}$ 看作流形 (参见 2.2.10). 则 $C^p(X;\mathbf{R})$ 对于自然定义的运算 $f+g, \lambda f, f\cdot g$ 是一个代数.

给定从 X 到 $\mathbf{R}$ 内的两个 C^p 态射 f_1 和 f_2, λ_1 和 λ_2 是两个实数. 设 $x\in X$. 存在一个在 x 的坐标卡 (U,φ), 使得 $f_1\circ\varphi^{-1}$ 和 $f_2\circ\varphi^{-1}$ 在 $\varphi(U)$ 上是 C^p 类的 (对于 $\mathbf{R}$ 的坐标卡 $(\mathbf{R}, \mathrm{id}_{\mathbf{R}})$ 应用 (2.3.1)). 随之

$$(\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2)\circ\varphi^{-1}=\lambda_1(f_1\circ\varphi^{-1})+\lambda_2(f_2\circ\varphi^{-1})$$

在 $\varphi(U)$ 上是 C^p 类的, 根据定理 2.3.2, 这就证明了 $\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2$ 是 C^p 类的. 对于 $f_1\cdot f_2$ 同样可以证明.

2.3.5 定义

给定两个流形 X 和 Y. 如果 f 是从 X 到 Y 上的双射, 并且 $f\in C^p(X;Y)$, $f^{-1}\in C^p(Y;X)$, 则说 f 是从 X 到 Y 上 C^p **微分同胚**. *从 X 到 Y 上 C^p 微分同胚的全体记为 $\mathrm{Diff}\,(X;Y)$, 从 X 到 X 上 C^p 微分同胚的全体记为 $\mathrm{Diff}\,(X)$, 如果需要明确指出整数 p, 则分别记为 $\mathrm{Diff}^{\,p}(X;Y)$ 和 $\mathrm{Diff}^{\,p}(X)$.*

2.3.6 注释

2.3.6.1 从例子 2.3.3.2 推知 $\mathrm{Diff}\,(X)$ 配备了映射的复合运算之后是一个群.

2.3.6.2 如果 (U,φ) 是 X 的一个坐标卡, 则 φ 是从 U 到 $\mathbf{R}^d$ 的开集 $\varphi(U)$ 上的一个微分同胚, 这里对于 $\mathbf{R}^d$ 配备流形的典范结构 (2.2.10.2).

2.3.7 定理

设 X 是一个连通流形, 则群 $\mathrm{Diff}\,(X)$ **以迁移方式**在 *X 上作用.*

迁移方式的意思是对于所有 $(x,y)\in X\times X$, 存在从 X 到 X 上的微分同胚 f, 使得 $f(x)=y$. 证明分为几步: 首先针对情形 $X=\mathbf{R}$, 其次是情形 $X=\mathbf{R}^d$, 最后是任意流形 X, 这时首先考虑充分接近的两个点 x 和 y, 以便利用一个坐标卡归结为 $\mathbf{R}^d$ 的情形.

第一步: *存在把 0 变到一个邻近点的 $\mathbf{R}$ 的微分同胚.*

设 $\varphi(x)$ 是一个普拉托函数 (参见 0.2.16): φ 是从 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}$ 内的 C^∞ 的函数, 满足条件: 对于所有 x, $0\leqslant\varphi(x)\leqslant 1$, 在 $[-1,1]$ 上, $\varphi(x)=1$, 当 $|x|\geqslant 2$ 时 $\varphi(x)=0$. 考虑函数 $g(x)=\varepsilon\varphi(x)+x$, 其中, $\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$, 而 ε_0 是一个待定常数. 我们有 $g'(x)=\varepsilon\varphi'(x)+1$. 由于 φ' 有紧支集, 它是有界的, 故存在常数 ε_0, 使得 $\varepsilon_0\,\|\varphi'\|<1$, 从而对于 $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$, 对于所有 x, $g'(x)>0$. 于是函数 $g(x)$ 是 C^∞ 的严格单调函数: 这是一个 C^∞ 微分同胚 (反函数定理), 我们有 $g(0)=\varepsilon$, 并且当 $|x|\geqslant 2$ 时 $g(x)=x$.

第二步: $\mathbf{R}^d$ 的情形.

仍然用 φ 表示已经考虑过的普拉托函数, 令

$$h(x_1,\cdots,x_d)=(x_1+\varepsilon\cdot\varphi(x_1)\cdot\varphi(x_2^2+\cdots+x_d^2),x_2,\cdots,x_d).$$

我们就定义了一个从 $\mathbf{R}^d$ 到 $\mathbf{R}^d$ 的映射 h.

因为 φ 是 C^∞ 类的, h 也如是. h 是平直的, 因为其雅可比矩阵的行列式

$$\begin{vmatrix} 1+\varepsilon\cdot\varphi'(x_1)\cdot\varphi(x_2^2+\cdots+x_d^2) & * & \cdots & * \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ & 0 & & \\ 0 & & & 1 \end{vmatrix}=1+\varepsilon\cdot\varphi'(x_1)\cdot\varphi(x_2^2+\cdots+x_d^2).$$

由于 ε 的选取和 $\varphi(x_2^2+\cdots+x_d^2)\leqslant 1$, 此行列式 $\neq 0$. 并且 $h(0,\cdots,0)=h(0)=(\varepsilon,0,\cdots,0)$. 如果把 h 与 $\mathbf{R}^d$ 的一个旋转 (它是 C^∞ 类的微分同胚) 复合, 我们可以构造把原点变到 $\mathbf{R}^d$ 的满足 $\|\varepsilon\|\leqslant 1$ 的任意点. 再通过一个适当的位似, 可以使 $B(0,2)\times B(0,\sqrt{2})$ 进入 $B(0,1)$.

最终得到, 存在 $\varepsilon>0$, 使得对于 $B(0,\varepsilon)$ 的每个点 y, 存在 $h\in\mathrm{Diff}\,(\mathbf{R}^d)$ 满足条件: $h(0)=y$, 并且 h 在 $\mathbf{R}^d-B(0,1)$ 上是恒等映射.

第三步: 过渡到流形.

设 (V,φ_1) 是 X 的一个在 x 的坐标卡. 由于 $\varphi_1(V)$ 是 $\mathbf{R}^d$ 的一个开集, 存在 $\mathbf{R}^d$ 的一个微分同胚 ψ (平移和位似的复合) 使得

$$\overline{B}(0,1)\subset\psi(\varphi_1(V)).$$

令 $\varphi=\psi\circ\varphi_1$, 则配对 (V,φ) 是 X 的一个在 x 的坐标卡 (既然 ψ 是 C^∞ 类的, 则 (V,φ) 与图册的坐标卡的相容性显而易见). 我们还可以假定这个坐标卡的中心在 x.

由于 $\overline{B}(0,1)\subset\varphi(V)$, 并且 φ 是 V 到 $\varphi(V)$ 上的微分同胚, $U=\varphi^{-1}(B(0,\varepsilon))$ 是 X 的一个包含 $x=\varphi^{-1}(0)$ 的开集. 对于 U 的所有点 y, 令 $z=\varphi(y)$, 存在 $h\in\mathrm{Diff}\,(\mathbf{R}^d)$, 使得 $h(0)=z$. 我们如下定义从 X 到 X 内的映射 f:

$$\begin{cases} f=\mathrm{id}, & \text{在 } X-\varphi^{-1}(B(0,1)) \text{ 上},\\ f=\varphi^{-1}\circ h\circ\varphi, & \text{在 } \varphi^{-1}(B(0,1)) \text{ 上}. \end{cases}$$

f 是从 X 到 X 内的双射 (由在互补集合上的双射定义), 并且是 C^p 类的, 这是因为它在覆盖 X 的两个开集 $X-\varphi^{-1}(\overline{B}(0,1))$ 和 V 上是 C^p 类的. 事实上, 由于在 $V-\varphi^{-1}(\overline{B}(0,1))$ 上, $\varphi^{-1}\circ h\circ\varphi=\mathrm{id}$, 故在 V 上,

$$f=\varphi^{-1}\circ h\circ\varphi.$$

此外有 $f(x)=y$, 为什么 $V-\varphi^{-1}(\overline{B}(0,1))$ 是开集呢? 这是因为 (参见 2.2.11 的证明) $\varphi^{-1}(\overline{B}(0,1))$ 是一个紧集在可分离 (参见 2.2.10.7) 流形 X 中的连续像.

我们证明了: 对于 X 的所有 x, 存在 X 的一个包含 x 的一个开集 U, 使得对于 U 的每个点 y, 存在 $f \in \mathrm{Diff}\,(X)$, 满足条件 $f(x) = y$.

第四步: X 的任意点 x 和 y 的情形.

在 X 内取定一点 x, 用 Q 表示 X 的点 y 的集合, 点 y 由 x 被 $\mathrm{Diff}\,(X)$ 的一个元素变换而得. 由于 $x \in Q$, 只需证明 Q 既是 X 的开集, 又是 X 的闭集. Q 的确是 X 的开集, 因为若 $y \in Q$, 第三步末尾提供了一个 $U \in O_y(X)$, 它必满足 $U \subset Q$. 事实上, 设 $z \in U$, 则存在 $h \in \mathrm{Diff}\,(X)$, 使得 $h(y) = z$. 由关于 y 的假设, 存在 $f \in \mathrm{Diff}\,(X)$, 使得 $f(x) = y$, 我们有 $h \circ f \in \mathrm{Diff}\,(X)$, 并且 $(h \circ f)(x) = h(f(x)) = h(y) = z$. 同样仿照 2.2.13 的证明, 可以证明 Q 是闭集.

2.4 覆叠映射. 商

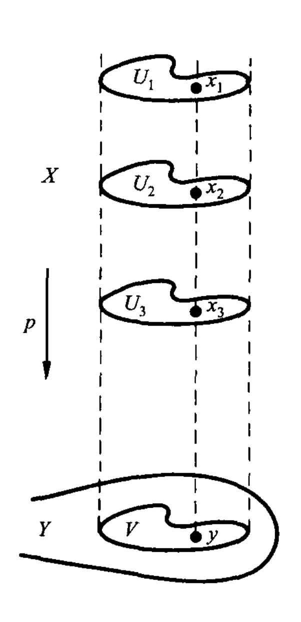
在本节, 我们首先给出覆叠映射的定义和性质, 尔后, 在 2.4.5 和 2.4.9 给出构造覆叠映射的一个明确方法.

2.4.1 定义

X 和 Y 是两个 C^s 类的流形. 我们称从 X 到 Y 内的一个映射 p 为**覆叠映射**, 如果下列性质满足:

(i) p 是一个满射和从 X 到 Y 内的一个 C^s 类的态射,

(ii) 对于 Y 的每个 y, 存在 Y 的包含 y 的一个开集 V, 使得 $p^{-1}(V)$ 有一个形如 $p^{-1}(V) = \bigcup_{i \in I} U_i$ 的分解, 其中各个 U_i 是 X 的开集, 并且对于每个 i, p 在 U_i 的限制是从 U_i 到 V 上的一个微分同胚.



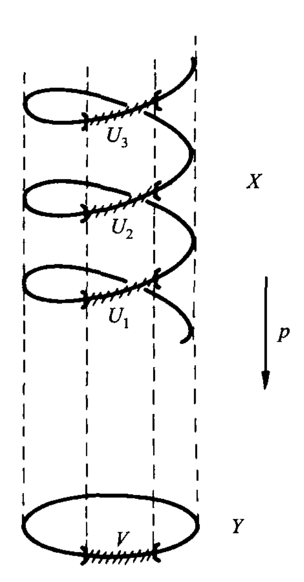


图 2.4.1

2.4.2 注释

指标集 I 依赖于点 y, 请参见 2.4.4.

2.4.3 例子

从 $\mathbf{R}$ 到圆周 S^1 的映射 $p: t \mapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ 是一个覆叠映射.

根据例子 2.1.6.2 和 2.2.10.2, 我们已经知道 S^1 和 $\mathbf{R}$ 都是 C^∞ 类的 1 维流形. 映射

$$p: t \mapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$$

是从 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}^2$ 内的 C^∞ 态射, 从而根据 2.3.3.5, 也是到 S^1 内的 C^∞ 态射. 给定 S^1 的一个点 (x_0, y_0), 存在实数 t_0 使得 $x_0 = \cos 2\pi t_0, y_0 = \sin 2\pi t_0$, 取 $\alpha \in (0, 1/2)$. 考虑 $V = p((t_0 - \alpha, t_0 + \alpha))$, 这是 S^1 的一个包含 (x_0, y_0) 的开集, 并且

$$p^{-1}(V) = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} (t_0 - \alpha + k, t_0 + \alpha + k),$$

而 p 在 $(t_0 - \alpha + k, t_0 + \alpha + k)$ 上的限制是从这个区间到 V 上的一个微分同胚.

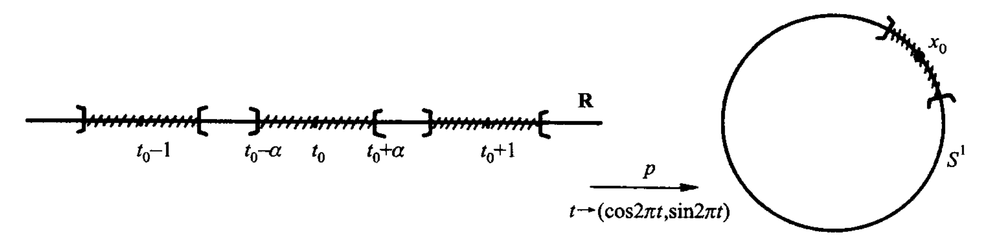


图 2.4.3

2.4.4 定理

若 X 和 Y 是两个 C^s 类的流形, p 是 Y 上的一个覆叠映射, 则 $p^{-1}(\{y\})$ 的基数局部地是常数. 如果 Y 是连通的, 则 $p^{-1}(\{y\})$ 的基数是常数; 如果它是有限的, 则称之为覆叠映射的**叶数**.

设 $y \in Y$, 存在 Y 的一个包含 y 的开集 V, 使得划分 $p^{-1}(V) = \bigcup_{i \in I} U_i$ 满足定义的条件. 特别地说, 对于 I 的每个指标 i, 存在 U_i 上单独一点 x_i, 使得 $p(x_i) = y$, 由于 $p^{-1}(\{y\}) \subset p^{-1}(V)$, 由此推出 $p^{-1}(\{y\})$ 与 I 有相同基数. 对于 V 的任意一个 z, $p^{-1}(\{z\})$ 与 I 同样有相同基数. 故 $p^{-1}(\{z\})$ 局部地是常数.

假定 X 是连通的, 运用 2.2.13 的证明技术可以证明: 任意两个点 $p, q \in X$ 可以用开集 $(U_i)_{i=1,\cdots,k}$ 的有限链连接, 使得 $p \in U_1, q \in U_k, U_i \bigcap U_{i+1} \neq \varnothing$ $(\forall i = 1, \cdots, k-1)$, 并且 $p^{-1}(\{y\})$ 的基数对于每个 i 和每个 $y \in U_i$ 上是常基数, 故对于 p 和 q, 有相同基数.

2.4.5 定义

给定一个流形 X 和群 $\mathrm{Diff}(X)$ 的一个子群 G. 我们说 G 是**无不动点真不连续的**, 如果下列两个条件满足:

(i) 对于 X 的每对点 x 和 y, 只要 y 不在 x 的轨道 $G(x)$ 里, 就存在 x 的邻域 U 和 y 的邻域 V, 使得对于 G 的所有 g, 有 $g(U)\bigcap V=\varnothing$;

(ii) 对于 X 的每个 x, 存在 X 的包含 x 的一个邻域 U, 使得对于 G 的所有不是恒等映射的 g, 都有 $g(U)\bigcap U=\varnothing$.

我们提醒一下, 在群 G 作用下, $x\in X$ 的轨道 $G(x)$ 是集合 $\{g(x):g\in G\}$.

2.4.6 注释

条件 (i) 可以表述为下列等价的形式:

(i$'$) 对于 X 的每对点 x 和 y, 只要 y 不在 x 的轨道 $G(x)$ 里, 就存在 x 的邻域 U 和 y 的邻域 V, 使得对于 G 的所有 g 和 h, $g(U)\bigcap h(V)=\varnothing$.

事实上, $g(U)\bigcap h(V)=\varnothing\Leftrightarrow(h^{-1}\circ g)(U)\bigcap V=\varnothing$, g 和 h 在 G 内取遍时,$h^{-1}\circ g$ 也在 G 内取遍.

条件 (ii) 解释了表述 "无不动点", 因为如果 x 是不动点, 则存在 $g\in G$, g 不是恒等映射, 使得 $g(x)=x$, 于是对于 x 的每个邻域 U, 将有 $x\in g(U)\bigcap U$. 条件 (i$'$) 表明 G 里的微分同胚相互之间不是 "接近的", 这就是使用 "间断" 这个词的理由.

2.4.7 例子

2.4.7.1 设 $X=\mathbf{R}^n$ (参见 2.2.10), 取群 $G\cong\mathbf{Z}^n$, 其元素是 $\mathbf{R}^n$ 的平移:

$$x\mapsto g_k(x)=x+k,\qquad k\in\mathbf{Z}^n=\{(k_1,\cdots,k_n):\forall i,k_i\in\mathbf{Z}\}$$

显然有 $G\subset\mathrm{Diff}^{\infty}(\mathbf{R}^n)$. 我们证明 G 是无不动点真不连续的.

首先设 x,y 满足 $y\notin G(x)$. 我们有 $\inf\{d(y,z):z\in G(x)\}=\varepsilon>0$, 这是因为在 $\mathbf{R}^n$ 的一个紧致集里仅有 $G(x)$ 的有限个点. 取 $U=B(x,\varepsilon/2),V=B(y,\varepsilon/2)$, 我们就得到 U 和 V 满足 (i). 至于满足 (ii) 的 U, 对于 $x\in\mathbf{R}^n$, 只需取 $U=B(x,1/2)$.

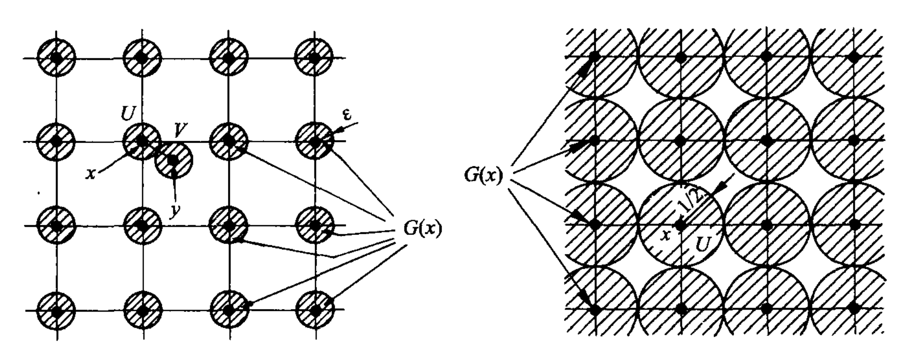
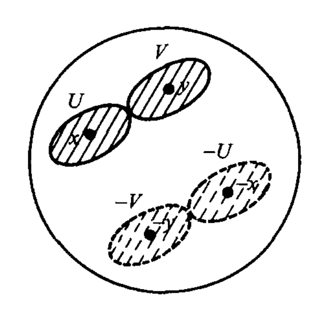


图 2.4.7.1

2.4.7.2 给定 $\mathbf{R}^{d+1}$ 的子流形 S^d, 这是通常意义下的流形, G 是 $\mathrm{Diff}\,(S^d)$ 的由两个元素

$$\mathrm{id}_{S^d}:x\mapsto x,\quad -\mathrm{id}_{S^d}:x\mapsto -x$$

(后者称为对径映射)组成的子群. G 是 $\mathrm{Diff}\,(S^d)$ 的一个无不动点真不连续的子群. 这里为了满足 (i), 对于 x 和 $y \neq \pm x$, 仍然取 $U = B(x, \varepsilon/2)$ 和 $V = B(y, \varepsilon/2)$, 其中 $\varepsilon = \inf\{d(x,y), d(x,-y)\}$, 而为了满足 (ii), 取 $U = B(x, \sqrt{2})$; 这里的球是对于由 $\mathbf{R}^{d+1}$ 诱导的 S^d 的度量说的, 反之, 如果我们利用 S^d 的内蕴的度量, 即取过两点的大圆中的短弧的弧长作为距离,$\sqrt{2}$ 必须换成 $\pi/2$.



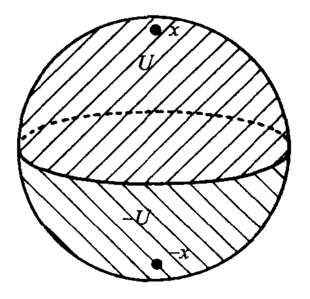


图 2.4.7.2

2.4.8 命题

给定一个流形 X 和 $\mathrm{Diff}\,(X)$ 的一个子群 G. 若在 X 上定义二元关系 $\mathscr{R}$: $x\mathscr{R}y$ 当且仅当存在 G 的 g, 使得 $g(x) = y$, 则 $\mathscr{R}$ 是等价关系.

这是显然的. 由此可以考虑商集 $X/\mathscr{R}$, 也可以把它记为 X/G, 并用 p 表示典范满射 $X \to X/G$.

2.4.9 定理

设 X 是一个 C^p 类的 d 维流形, G 是 $\mathrm{Diff}\,(X)$ 的一个无不动点真不连续的子群. 则在商集 X/G 上存在一个唯一的 C^p 类 d 维 (分离) 流形结构, 使得从 X 到商流形 X/G 上的典范映射 p 是一个覆叠映射.

设 $y \in Y = X/G$, 而 x 是 y 这个类的代表. 由于 G 是一个无不动点真不连续的子群, 存在 X 的含点 x 的开集 U, 使得对于 G 的所有不是恒等映射的 g, 都有 $g(U) \bigcap U = \varnothing$. 由于 U 是 X 的开集, 它是坐标卡的定义域的并集, 不妨设 U 本身就是一个坐标卡 (U, φ) 的定义域. 令 $V = p(U)$, 考虑 $p^{-1}(V) = \{z : z \in X, p(z) \in V\}$. 我们有 $z \in p^{-1}(V) \Leftrightarrow \exists u \in U$, 使得 $p(z) = p(u) \Leftrightarrow$ 对于 G 关联的等价关系 z 等价于 $u \Leftrightarrow \exists u \in U, \exists\, g \in G$ 使得 $z = g(u)$. 故

$$p^{-1}(V) = \bigcup_{g \in G} g(U).$$

此外, U 的选取保证诸 $g(U)$ 是两两不交的. 我们取配对 (V, ψ) 作为 X/G 的坐标卡, 其中,$V = p(U)$, 而 $\psi : V \to \mathbf{R}^d$ 如下定义: 如果 $v \in V = p(U)$, 存在 v 的一个在 U 内的代表, 而且根据 U 的选取, 这个代表是唯一的, 我们把这个唯一代表记作 $u = p^{-1}(v)$, 就是说这里 $p^{-1}(v)$ 表示的不是集合, 而是其唯一的元素. 令 $\psi = \varphi \circ p^{-1}$.

我们就这样定义了 $X/G = Y$ 的一个 C^p 类的 d 维图册. 理由如下:

(A.T.1) 由于 $y \in X/G$ 是任意选取的, 故诸 V 覆盖 X/G.

(A.T.2) 映射 p^{-1}(沿用前面对于记号 p^{-1} 的约定) 是 V 到 U 上的双射,φ 也是双射, 故 ψ 是 V 到 $\mathbf{R}^d$ 的开集 $\varphi(U)$ 上的双射. 考虑坐标卡 (V,ψ) 和 (V',ψ'), 分别来自于 X 的坐标卡 (U,φ) 和 (U',φ'). 如果 $v \in V \bigcap V'$, 那么存在 $x \in U$, 使得 $p(x) = v$, 并且存在 $x' \in U'$, 使得 $p(x') = v$. 从 $p(x) = p(x')$ 推知存在 $g \in G$ 使得 $g(x') = x$. 由于 $g \in \text{Diff}\,(X)$, $(g(U'),\varphi' \circ g^{-1})$ 仍然是 X 的坐标卡.

我们有

$$(\varphi \circ p^{-1})\,(V \bigcap V') = \varphi\left(U \bigcap p^{-1}\,(V \bigcap V')\right) = \varphi\left(U \bigcap \left(\bigcup_{h \in G} h(U')\right)\right)$$

是 $\mathbf{R}^d$ 的开集, 这是因为从 h^{-1} 的连续性得知 $U \bigcap \left(\bigcup_{h \in G} h(U')\right)$是 X 的开集.

(A.T.3) 这里我们用到前面提到的辅助坐标卡 $(g(U'),\varphi' \circ g^{-1})$.$C^p$ 类的性质是局部的, 只需验证 $\psi' \circ \psi^{-1}$ 在 $\psi(y) = \varphi(x)$ 的一个邻域内是 C^p 类的; 在开集 $\varphi(U \bigcap g(U'))$ 上, 根据对于 X 的 (A.T.3) 是 C^p 类的. 我们有

$$\psi' \circ \psi^{-1} = (\varphi' \circ g^{-1} \circ p^{-1}) \circ (\varphi \circ p^{-1})^{-1} = (\varphi' \circ g^{-1}) \circ \varphi^{-1}$$

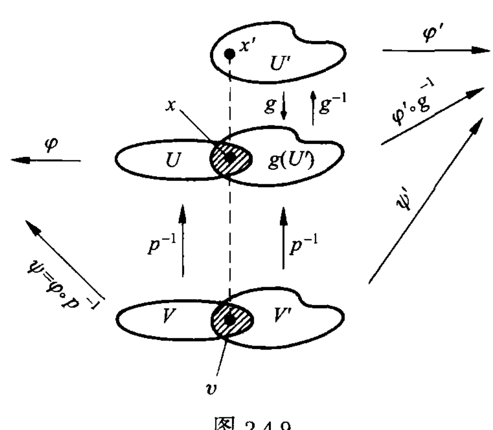


图 2.4.9

还需证明 X/G 是分离的流形 (参见 2.2.10.7), 并且 p 是一个覆叠映射. 设 y 和 y' 是 X/G 的两个点,x 和 x' 分别属于 $p^{-1}(\{y\})$ 和 $p^{-1}(\{y'\})$, G 是无不动点真不连续的, 存在 X 的分别包含 x 和 x' 的开集 U 和 U', 使得对于 G 的所有 g, $g(U) \bigcap U' = \varnothing$. 甚至可以假定 U 和 U' 就是坐标卡的定义域. 那么 $V = p(U)$ 和 $V' = p(U')$ 就是 X/G 的坐标卡的定义域, 从而是 X/G 的分别包含 y 和 y' 开集 (参见 2.2.6). 它们是不交的, 因为 $z \in V \bigcap V'$, 蕴涵 $p^{-1}(V \bigcap V') \neq \varnothing$, 故 $p^{-1}(V) \bigcap p^{-1}(V') \neq \varnothing$, 即

$$\left(\bigcup_{g \in G} g(U)\right) \bigcap \left(\bigcup_{g' \in G} g'(U')\right) \neq \varnothing.$$

于是存在 G 的 g 和 g', 使得 $g(U)\bigcap g'(U')\neq\varnothing$, 由此 $(g'^{-1}\circ g)(U)\bigcap U'\neq\varnothing$, 这有悖于 U 和 U' 的选择.

最后验证 p 是覆叠映射. 由于对于 X/G 的坐标卡的定义域 $V=p(U)$, 有 $p^{-1}(V)=\bigcup\limits_{g\in G}g(U)$, 由于 $G\subset \mathrm{Diff}\,(X)$, $g(U)$ 是 X 的开集, 故 $p^{-1}(V)$ 是 X 的开集, 从而 p 连续. 设 $x\in X$, (U,φ) 是在 x 的坐标卡, 而 (V,ψ) 是在 $p(x)=y$ 的关联的坐标卡. 我们有 $p(U)\subset V$, 并且 $\psi\circ p\circ\varphi^{-1}=\varphi\circ p^{-1}\circ p\circ\varphi^{-1}=\mathrm{id}|_{\varphi(U)}$ 在 $\mathbf{R}^d$ 的 $\varphi(U)$ 上是 C^p 类的. 根据 2.3.2, p 是 C^p 态射. 对于与 (U,φ) 关联的坐标卡的定义域 V, 我们有

$$p^{-1}(V)=\bigcup_{g\in G}g(U),$$

这是由微分同胚于 V 的开集构成的 $p^{-1}(V)$ 的一个划分.

2.4.10 推论

若 X 是紧致流形, 则 X/G 也是紧致流形.

事实上, 从 X 到 X/G 上的典范映射是连续的和满射的, 并且 X/G 是分离的.

2.4.11 我们有下列准则: 设 X 和 Y 是两个 C^p 类的微分流形, G 是 $\mathrm{Diff}\,(X)$ 的一个无不动点真不连续子群, 而 X/G 配备以典范流形结构, $p:X\to X/G$ 是典范映射. 则对于一个映射 $f:X/G\to Y$, 我们有

$$f\in C^p(X/G;Y)\Leftrightarrow f\circ p\in C^p(X;Y)$$

(习题 2.8.12).

2.4.12 例子

2.4.12.1 环形, 第二个生成方法 (参见 2.1.6.3)

根据 2.4.7.1 和 2.4.9, 集合 $Y=\mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$ 是一个 C^∞ 流形, 而且通过映射 $p:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$ 被 $\mathbf{R}^n$ 覆盖. 作为流形, 可以验证 $\mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$ 是乘积流形 $(\mathbf{R}/\mathbf{Z})^n$ (参见 2.2.10.3). 现在读者会猜想 $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$, 作为模 1 的实数集, 微分同胚于圆周 S^1, 这个事实将在 2.6.13.1 严格证明, 于是微分同胚于 $(S^1)^n$ 和 2.1.6.3 的环形 $T^n=(S^1(n^{-1/2}))^n$. 这样 $\mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$ 的构造也就提供了生成 T^n 的第二种方式.

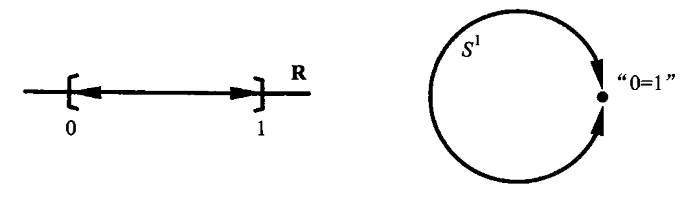


图 2.4.12.1

2.4.12.2 d 维实射影空间, 第一种生成方法 (参见 2.6.13.2)

根据 2.4.7.2 和 2.4.9, 集合 $P^d(\mathbf{R}) = S^d/G = S^d/\pm\mathrm{id}|_{S^d}$ 是一个 C^∞ 流形, 称之为 d 维实射影空间. 因为 S^d 是紧致的, 所以 $P^d(\mathbf{R})$ 也是紧致的. 它涉及的就是射影几何的射影空间: 事实上, 后者是 $\mathbf{R}^{d+1} - \{0\}$ 由等价关系 $\mathscr{R}$:

$$x\mathscr{R}y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbf{R} : y = kx$$

定义的商集. 但是既然 $x \in \mathbf{R}^{d+1} - \{0\}$ 等价于 $x/\|x\| \in S^d$, $\mathbf{R}^{d+1} - \{0\}$ 关于 $\mathscr{R}$ 的商集就与 S^d 关于 $S^d/\mathscr{R}$ 的商集重合, 其中 $S^d/\mathscr{R}$ 相当于

$$x\mathscr{R}y : x, y \in S^d \Leftrightarrow y = \pm x.$$

由于 2.1.6.9 中的映射 f 满足 $f(-x,-y,-z) = f(x,y,z)$, f 过渡到商集就会提供一个从 $P^2(\mathbf{R})$ 到 $\mathbf{R}^6$ 的映射 $\underline{f}$; 读者来验证 $\underline{f}$ 是单射.

2.4.12.3

$$\begin{array}{ccc} S^2 & \xrightarrow{f} & \mathbf{R}^6 \\ {\scriptstyle p}\downarrow & \nearrow_{\underline{f}} & \\ P^2(\mathbf{R}) & & \end{array}$$

2.4.12.4 克莱因瓶

给定流形 $T^2 = \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ 并且用 $\bar{x}$ 表示 $x \in \mathbf{R}$ 模 $\mathbf{Z}$ 的类. 我们考虑映射 $g : T^2 \to T^2$, 其定义是 $(\bar{x}, \bar{y}) \mapsto \left(\overline{x + \frac{1}{2}}, -\bar{y}\right)$; 这是 T^2 的微分同胚, 而 g^2 是恒等映射. 群 $G = (\mathrm{id}|_{T^2}, g)$ 是无不动点真不连续的. 事实上, 由于 T^2 是分离的, 而 u 和 $g(u)$ 不同, 故存在含 u 的开集 U_1 和含 $g(u)$ 的开集 V_1, 使得 $U_1 \bigcap V_1 = \varnothing$. 随之, g 既然是微分同胚, 就存在含 u 且含于 U_1 的一个开集 U, 使得 $g(U) \subset V_1$, 于是 $g(U) \bigcap U \subset V_1 \bigcap U_1 = \varnothing$, 故 G 是无不动点的 .

现在设 u 和 $v \in T^2$, 并且 $v \notin G(u) = \{u, g(u)\}$. 存在包含 u 的开集 U_1 和包含 v 的开集 V_1, 使得 $U_1 \bigcap V_1 = \varnothing$, 又存在包含 $g(u)$ 的开集 U_2 和包含 v 的开集 V_2, 使得 $U_2 \bigcap V_2 = \varnothing$. 设 Ω_2 是包含 u 的开集, 使得 $g(\Omega_2) \subset U_2$, 再令 $U = U_1 \bigcap \Omega_2$ 和 $V = V_1 \bigcap V_2$. 我们有

$$U \bigcap V \subset U_1 \bigcap V_1 = \varnothing, \quad g(U) \bigcap V \subset g(\Omega_2) \times \bigcap V_2 \subset U_2 \times \bigcap V_2 = \varnothing,$$

故 G 是真不连续的.

我们称 $K = T^2/G$ 为**克莱因瓶**.这是一个紧致流形 (2.4.10). 我们试图从 $\mathbf{R}^2$ 出发来表示 K. 从 $\mathbf{R}^2$ 到 $T^2 = \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ 的过渡在于把点 (x, y) 和点 $(x+k, y+l)$ 等同, 其中 $(k, l) \in \mathbf{Z}^2$. 我们可以用正方形 $ABCD$ 表示 T^2, 它包括边 DA 和 AB, 而不包括另外两个边. 或者看作包括 DC 和 CB, 那就必须把 DA (相应的 AB) 等同于 CB (相应的 DC).

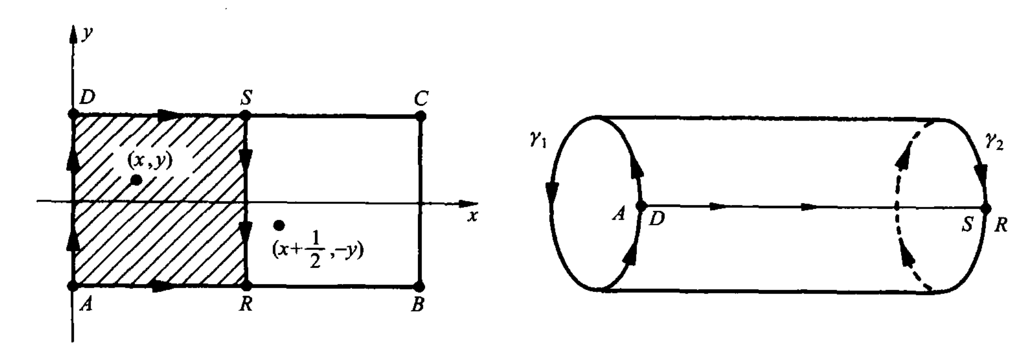


图 2.4.12.4

然后, 在这个正方形里, 把点 (x,y) 和 $\left(x+\dfrac{1}{2},-y\right)$ 等同; 这相当于只关注 $ARSD$ (不包括 SR), 再粘结 AR 到 DS 上 (从而形成一个 "圆柱"), 同样, 粘结 DA 到 RS 上 (从改变方向地 "圆周" (γ_1) 到 (γ_2)). 其形状为:

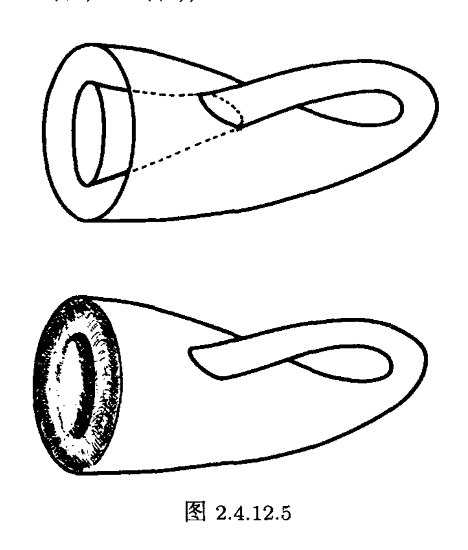


图 2.4.12.5

2.5 切 空 间

我们从研究 $\mathbf{R}^n$ 的子流形的情形开始, 以便为定义抽象流形的切空间做铺垫.

2.5.1 定义

设 V 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个子流形. 我们说 $\mathbf{R}^n$ 的一个向量 z 是 V **在点** x **的切向量**, 如果存在 V 的一条 C^1 类曲线 α (即定义在 $\mathbf{R}$ 的一个含 0 的区间 I 上在 V 内取值的一个映射, 参见 0.2.9.1), 使得 $\alpha(0)=x$ 并且 $\alpha'(0)=z$.

2.5.2 注释

$\alpha'(0)$ 其实是从 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}^n$ 的一个 (可微的) 线性映射, 我们把它与 $\mathbf{R}^n$ 的 $\alpha'(0)\cdot 1 = z$ 视作等同.

条件 $0 \in I$ 无非是为了记号方便, 曲线也可以定义在包含 t_0 的区间 I 上, 并且满足条件 $\alpha(t_0) = x$ 和 $\alpha'(t_0) = z$.

2.5.3 定理

假设 V 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个 d 维子流形, x 是 V 的一个点. $\mathbf{R}^n$ 的 V 在 x 的切向量的集合组成 $\mathbf{R}^n$ 的一个子向量空间, 称为 **V 在 x 的切空间**, *记之为 T_xV.*

为证明定理, 我们要利用两个引理.

2.5.4 定理

设 E 和 F 是两个有限维向量空间, U 是 E 的一个开集, f 是从 U 到 F 的 C^1 类映射, 而 V 是 E 的一个含于 U 的子流形, W 是 F 的一个子流形, $f(V) \subset W$. 又设 $x \in V, y = f(x)$. 若 z 是 V 在点 x 的切向量, 则 $f'(x)(z)$ 是 W 在点 $y = f(x)$ 的切向量.

事实上, 存在曲线 $\alpha : I \to V$, 使得 $\alpha(0) = x$, 并且 $\alpha'(0) = z$. 从 I 到 W 内的函数 $\gamma = f \circ \alpha$ 是 C^1 类的, 并且满足

$$\gamma(0) = f(x) = y, \quad \gamma'(0) = f'(\alpha(0))(\alpha'(0)) = f'(x)(z).$$

2.5.5 引理

设 V 是实向量空间 E 的一个子流形,U 是 E 的一个开集, 并且 $V' = V \bigcap U$. 为了使 E 的一个向量是 V' 在 x 的切向量, 必须且只需它是 V 在 x 的切向量.

首先设 $z \in T_xV'$, 则存在 V' 的一条曲线 α, 从而也是 V 的一条曲线, 使得 $\alpha(0) = x$, 并且 $\alpha'(0) = z$. 由此推出 $z \in T_xV$. 反之, 设 $z \in T_xV$, 而 α 是定义在包含 0 的一个区间 I 上的 V 上的一条曲线, 使得 $\alpha(0) = x$, 并且 $\alpha'(0) = z$. 由于 $\alpha(0) = x \in V' = V \bigcap U$, 而且 U 是开集, 存在包含 0 的一个含于 I 的区间 J, 使得 $\alpha(J) \subset U$, 于是事实上 $\alpha(J) \subset V \bigcap U = V'$.$\alpha$ 在 J 上的限制 β 是 V' 上的 C^1 类曲线, 并且有 $\beta(0) = x$ 和 $\beta'(0) = z$, 故 $z \in T_xV'$.

定理 2.5.3 的证明

假设 V 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个 d 维子流形, 而 x 是 V 的一个点. 根据定义 2.1.1, 存在 $E = \mathbf{R}^n$ 的一个包含 x 的开集 U 和一个从 U 到 $f(U)$ 上的 C^p 类映射 f, 使得 $f(U \bigcap V) = f(U) \bigcap \mathbf{R}^d$. 设 $z \in T_xV$. 根据 2.5.5, 这等价于 $z \in T_x(U \bigcap V)$, 根据 2.5.4, 这随之等价于 $f'(x)(z)$ 是 $f(U \bigcap V) = f(U) \bigcap \mathbf{R}^d$ 在 $f(x)$ 的切向量, 由于 $f(U)$ 是一个开集, 这又等价于 $f'(x)(z) \in T_{f(x)}\mathbf{R}^d$. 然而我们有 $T_{f(x)}\mathbf{R}^d = \mathbf{R}^d$, 理由如下: 若 $u \in \mathbf{R}^d$, 从 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}^d$ 由 $\alpha(t) = f(x) + tu$ 定义的映射 α, 满足 $\alpha(0) = f(x)$ 和 $\alpha'(0) = u$, 于是 $z \in T_xV \Leftrightarrow f'(x)(z) \in \mathbf{R}^d$. 由于 $f'(x)$ 是双射,$T_xV = (f'(x))^{-1}(\mathbf{R}^d)$ 是 E 的 d 维向量子空间.

2.5.6 注释

我们实际已经证明了: 如果 V 是 $\mathbf{R}^n$ 的 d 维子流形, 则 T_xV 是一个 d 维向量空间.

$\mathbf{R}^n$ 的子流形的各个特征 (定理 2.1.2) 导致切空间的各个特征, 现在叙述其中的几个.

2.5.7 定理

设 V 是 C^p 类的 $\mathbf{R}^n$ 的 d 维子流形.

(i) 如果对于 V 的点 x, U 是一个包含 x 的开集, 而 $(f_i)_{1\leqslant i\leqslant n-d}$ 是 C^p 类的从 U 到 $\mathbf{R}$ 内的函数, 使得

$$V\bigcap U=\bigcap_{i=1}^{n-d} f_i^{-1}(0),$$

并且 $(f_i')_{1\leqslant i\leqslant n-d}$ 是线性无关的, 则有

$$T_xV=\bigcap_{i=1}^{n-d}\left(f_i'(x)\right)^{-1}.$$

(ii) 设 U 是一个包含 x 的开集, Ω 是 $\mathbf{R}^d$ 的一个包含 0 的开集, g 是 C^p 类的从 Ω 到 $V\bigcap U$ 上的一个同胚, 使得 $x=g(0)$, $g'(0)$ 是单射, 则 $T_xV=g'(0)(\mathbf{R}^d)$.

2.5.7.1 例子

设 V 的余维数为 1, 故局部地由单独一个函数对应的方程表示, 我们将有 $T_xV=(f'(x))^{-1}(0)$. 例如 $V=S^d\subset\mathbf{R}^{n+1}$, $f=\|\cdot\|^2-1$. 我们有 $f'(x)=2(x|\cdot)$(参见 0.2.8.3), 于是 T_xS^d 是正交于 x 的超平面.

2.5.7.2 证明

(i) 设 $F:U\to\mathbf{R}^{n-d}$, 其分量表示是 $F=(f_1,\cdots,f_{n-d})$, 满足条件 $V\bigcap U=F^{-1}(0)$, 并且 F 在 x 是满射. 于是

$$F'(x)^{-1}(0)=\bigcap_{i=1}^{n-d}(f_i'(x))^{-1}(0)$$

是一个维数为 $n-(n-d)=d$ 的向量空间. 如果我们证明了 T_xV 含于 $F'(x)^{-1}(0)$, 则这两个空间既然维数相同, 必然相等.

设 $z\in T_xV,\alpha$ 是 V 上的一条曲线, 满足 $\alpha(0)=x$ 和 $\alpha'(0)=z$. 如有必要缩小 I, 不妨设 $\alpha(I)\subset U$. 于是 $F\circ\alpha=\gamma$ 是 $\mathbf{R}^{n-d}$ 中的曲线, 满足 $\gamma(I)=F(\alpha(I))\subset F(U\bigcap V)=\{0\}$; 于是, 特别地, 有 $\gamma'(0)=0$. 而

$$\gamma'(0)=F'(\alpha(0))(\alpha'(0))=F'(x)(z)=0,$$

于是 $z\in F'(x)^{-1}(0)$, 这就完成了证明.

(ii) Ω 作为 $\mathbf{R}^d$ 的开集, 它已是 $\mathbf{R}^d$ 的 d 维子流形 (例子 2.1.6.6), 从而是在 $\mathbf{R}^d$ 的所有点的切空间. 由于 g 是从 Ω 到 $V \bigcap U$ 上的 C^p 类同胚, 由 2.5.4 推出

$$g'(0)(\mathbf{R}^d) \subset T_{g(0)}(V \bigcap U) = T_{g(0)}V \quad (\text{根据 } 2.5.5),$$

但 $g'(0)$ 是单射, $g'(0)(\mathbf{R}^d)$ 和 $T_{g(0)}V = T_xV$ 是有相同维数的两个向量空间, 于是前面的包含关系蕴涵相等关系. 这就完成了证明.

现在考虑 $\mathbf{R}^n$ 的两个子流形的相容的参数表示 g 和 h, 它们满足 $g(0) = h(0) = x$. 设 $z \in T_xV = g'(0)(\mathbf{R}^d) = h'(0)(\mathbf{R}^d)$, 根据 2.5.7(ii), 存在 $\mathbf{R}^d$ 中的 u 和 v, 使得 $g'(0)(u) = h'(0)(v)$,

而这可以写成

$$v = ((h'(0))^{-1} \circ g'(0))(u) = (h^{-1} \circ g)'(0)(u).$$

我们可以认为 z 由 Ω_g, g 和 u 确定, 或由三元组 (Ω_g, g, u) 确定. 另一个参数表示导致三元组 (Ω_h, h, v), 并且有 $v = (h^{-1} \circ g)'(0)(u)$.

显示, 对于在抽象空间的情形定义切空间, 参数表示扮演坐标卡的角色.

给定一个 C^p 类的 d 维抽象流形 X, x 是 X 的一个点, (U, φ) 和 (V, ψ) 是 X 在 x 的两个坐标卡. 给定 $\mathbf{R}^d$ 的两个元素 u 和 v. 我们考虑三元组 (U, φ, u) 和 (V, ψ, v).

2.5.8 命题

由 $(U, \varphi, u)\mathscr{R}(V, \psi, v)$ 当且仅当 $v = (\psi \circ \varphi^{-1})'(\varphi(x))(u)$ 定义的三元组之间的关系 $\mathscr{R}$ 是等价关系.

由于 $\varphi \circ \varphi^{-1}$ 是 (从 $\varphi(U)$ 到 $\varphi(U)$ 上的) 恒等映射, 它在所有点的导数是恒等映射, 于是 $u = (\varphi \circ \varphi^{-1})'(0)(u)$: $\mathscr{R}$ 是自反的.

假设 $(U, \varphi, u)\mathscr{R}(V, \psi, v)$. 于是 $(\psi \circ \varphi^{-1})'(\varphi(x))(u) = v$. 而

$$[(\psi \circ \varphi^{-1})'(\varphi(x))]^{-1} = (\varphi \circ \psi^{-1})' \circ ((\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi(x))) = (\varphi \circ \psi^{-1})'(\psi(x)).$$

于是由 $(\psi \circ \varphi^{-1})'(\varphi(x))(u) = v$ 得 $u = (\varphi \circ \psi^{-1})'(\psi(x))(v)$, 这就证明了 $\mathscr{R}$ 的对称性.

最后, 设 $(U, \varphi, u)\mathscr{R}(V, \psi, v)$, 并且 $(V, \psi, v)\mathscr{R}(W, \theta, w)$. 于是

$$(\psi \circ \varphi^{-1})'(\varphi(x))(u) = v, \quad (\theta \circ \psi^{-1})'(\psi(x))(v) = w,$$

考虑到 $\theta \circ \varphi^{-1} = \theta \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ \varphi^{-1}$, 遂得

$$\begin{aligned}(\theta \circ \varphi^{-1})'(\varphi(x))(u) &= [(\theta \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ \varphi^{-1})]'(\varphi(x))(u) \\ &= \left[[(\theta \circ \psi^{-1})'(\psi \circ \varphi^{-1}(\varphi(x)))] \circ (\psi \circ \varphi^{-1})'\right](\varphi(x))(u) \\ &= (\theta \circ \psi^{-1})'(\psi(x))(v) = w,\end{aligned}$$

于是有 $(U, \varphi, u)\mathscr{R}(W, \theta, w)$ 及 $\mathscr{R}$ 的传递性.

2.5.9　定义

给定一个流形 X 和 X 的一个点 x. 我们称 2.5.8 定义的三元组的等价关系的一个等价类为 X **在** x **的切向量**. X 在 x 的切向量的全体记作 T_xX.

2.5.10　注释

如果取定在 x 的一个坐标卡 (U,φ), 则可以使 x 关联一个在 T_xX 与 $\mathbf{R}^d$ 之间的双射, 记之为 θ_x.

事实上, 在 x 的一个坐标卡 (U,φ) 给定后, 设 $z\in T_xX$, 则存在唯一的 $u\in\mathbf{R}^d$ 使得 $(U,\varphi,u)\in z$, 把这个 u 记作 $\theta_x(z)$, 因为 (U,φ,u) 中的 u 在 $\mathbf{R}^d$ 里可以任意选取, 映射 $\theta_x:T_xX\to\mathbf{R}^d$ 是一个双射.

2.5.11　定理

设 X 是一个 C^p 类的 d 维抽象流形. 则 X 在 x 的切空间 T_xX 具有一个 d 维向量空间的典范结构.

取定 X 在 x 的一个坐标卡 (U,φ) , 它关联一个从 T_xX 到 $\mathbf{R}^d$ 上的双射 θ_x. 我们把 $\mathbf{R}^d$ 的向量空间结构通过 θ_x 转移为 T_xX 的向量空间结构. 即令

$$\lambda z+\lambda'z'=\theta_x^{-1}(\lambda\theta_x(z)+\lambda'\theta_x(z')).$$

设 $\eta_x:T_xX\to\mathbf{R}^d$ 是与坐标卡 (V,ψ) 关联的类似于 θ_x 的双射, 通过 η_x 的转移在 T_xX 上诱导出同样的向量空间结构. 事实上, 这之所以成立, 在于 θ_x 和 η_x 的差别是一个线性映射, 因为 2.5.8 中给的等价关系 R 的定义以及 θ_x 和 η_x 的定义表明

2.5.11.1
$$\eta_x\circ\theta_x^{-1}=(\psi\circ\varphi^{-1})'(\varphi(x)),$$

它是线性的.

2.5.12　例子

设 X 是 $\mathbf{R}^n$ 的子流形,$x\in X$, E_x 是 X 在 x 的在子流形意义的切空间 (参见 2.5.1), 而 T_xX 是 X 在 x 的在抽象流形意义的切空间 (参见 2.5.9). 则 E_x 和 T_xX 是典范同构的.

尽管我们仿照定义 $\mathbf{R}^n$ 的子流形的切空间的方式, 发现了抽象流形 X 的切空间 T_xX 的定义, 从而确信上述事实, 但是明晰地验证它还是不可或缺的. 设 (Ω,g) 是 X 的一个参数表示, 满足 $g(0)=x$; 那么 $g'(0):\mathbf{R}^d\to E_x$ 是一个同构. 而

$$(U,\varphi)=(g(\Omega),g^{-1})$$

是 X 的一个中心在 x 的坐标卡, 并且有关联的同构 $\theta_x:T_xX\to\mathbf{R}^d$. 由此得到要找的同构:

2.5.12.1
$$g'(0)\circ\theta_x:T_xX\to E_x.$$

这个同构不依赖 (Ω, g) 的选择, 因为如果 (Ω', h) 是 X 的另一个参数表示, 满足 $h(0) = x$, 公式 2.5.11.1 说明 $\eta_x \circ \theta_x^{-1} = (h^{-1} \circ g)'(0)$, 随即 $g'(0) \circ \theta_x = h'(0) \circ \eta_x$, 此即所证.

2.5.12.2 特别地, 设 $U \in O(\mathbf{R}^d)$, 给 U 配备由坐标卡 (U, i) 定义的典范结构, 这里 i 是从 U 到 $\mathbf{R}^d$ 内的典范单射. 因为在子流形的意义下,$T_xU = \mathbf{R}^d$, 对于所有 $x \in U$, 由 2.5.10 推出一个与坐标卡 (U, i) 关联的典范同构

2.5.12.3 $$\theta_x : T_xU \to \mathbf{R}^d.$$

请注意, 在 $U \in O(\mathbf{R}^d)$ 这个情形, 2.5.12.3 与 2.5.12.1 并不矛盾, 因为 U 的满足 $g(0) = x$ 的参数表示正是平移 $g : z \mapsto z + x$, 从而 $g'(0) = \mathrm{id}\,|_{\mathbf{R}^d}$.

2.5.12.4 可能有时不把 T_xU 跟 $\mathbf{R}^d$ 等同起来会有好处; 宁愿把 T_xU 看作起点放在 $x \in \mathbf{R}^d$ 的向量的空间 $(x, \mathbf{R}^d)$, 而 θ_x 是它在第二个因子上的投影 $(x, z) \mapsto z$.

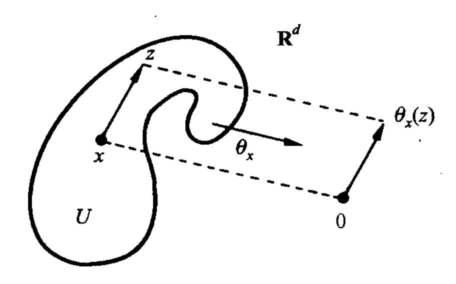


图 2.5.12.4

2.5.13 切映射

现在考虑两个流形 X 和 Y, 以及一个从 X 到 Y 内的 C^p 态射 f. 我们想以下列方式定义一个从切空间 T_xX 到切空间 $T_{f(x)}Y$ 的线性映射 T_xf: 设 $z \in T_xX$, 因为 f 是 C^p 同态, (根据 2.3.2(iii)) 则存在两个坐标卡, 一个在 x 的 (U, φ), 一个在 $f(x)$ 的 (V, ψ), 使得 $f(U) \subset V$. 设 $\theta_x : T_xX \to \mathbf{R}^d$ 与 (U, φ) 关联 (参见 2.5.10), 而 $\eta_{f(x)} : T_{f(x)}Y \to \mathbf{R}^e$ 则与 (V, ψ) 关联. 令

2.5.13.1 $$T_xf = \eta_{f(x)}^{-1} \circ (\psi \circ f \circ \varphi^{-1})'(\varphi(x)) \circ \theta_x,$$

2.5.13.2 $$\begin{array}{ccccccc} U & \xrightarrow{\quad f \quad} & V & & T_xX & \xrightarrow{\quad T_xf \quad} & T_{f(x)}Y \\ \downarrow{\scriptstyle\varphi} & & \downarrow{\scriptstyle\psi} & & \downarrow{\scriptstyle\theta_x} & & \downarrow{\scriptstyle\eta_{f(x)}} \\ \varphi(U) & \xrightarrow[\psi\circ f\circ\varphi^{-1}]{} & \psi(V) & & \mathbf{R}^d & \xrightarrow[(\psi\circ f\circ\varphi^{-1})'(\varphi(x))]{} & \mathbf{R}^d \end{array}$$

如果这个定义仅依赖于 x, 而不依赖于 (U, φ) 和 (V, ψ), 才算得上是严密的. 事实果真如此. 设 (U_1, φ_1) 和 (V_1, ψ_1) 是另外两个这样的坐标卡, 而 ξ_x 和 $\zeta_{f(x)}$ 是分别

与它们关联的映射, 根据公式 2.5.11.1 (省略其中的在那里取导数的点), 我们有

$$\begin{aligned}
&\zeta_{f(x)}^{-1}\circ(\psi_1\circ f\circ\varphi_1^{-1})'(\varphi(x))\circ\xi_x \\
&=\zeta_{f(x)}^{-1}\circ[(\psi_1\circ\psi^{-1})\circ(\psi\circ f\circ\varphi^{-1})\circ(\varphi\circ\varphi_1^{-1})]'\circ\xi_x \\
&=[\zeta_{f(x)}^{-1}\circ(\psi_1\circ\psi^{-1})']\circ(\psi\circ f\circ\varphi^{-1})'\circ[(\varphi\circ\varphi_1^{-1})'\circ\xi_x] \\
&=\eta_{f(x)}^{-1}\circ(\psi\circ f\circ\varphi^{-1})'\circ\theta_x,
\end{aligned}$$

此即必须证明的. 于是提出下列定义就顺理成章.

2.5.14 定义

给定两个流形 X 和 Y, 以及一个从 X 到 Y 内的 C^p 态射 f, x 是 X 内的一点. 由关系 2.5.13.1 定义的从切空间 T_xX 到切空间 $T_{f(x)}Y$ 的线性映射 T_xf 称为在 x **对于 f 的切映射**.

T_xf 确实是线性的, 这由 2.5.13.1 和下列事实得到: $(\psi\circ f\circ\varphi^{-1})'$ 是线性的, 并且根据 2.5.11, θ_x 和 $\eta_{f(x)}$ 都是线性的.

2.5.15 定理

给定两个流形 X 和 Y, 以及一个从 X 到 Y 内的 C^p 态射 f. 从 T_xX 到 $T_{f(x)}Y$ 内的映射 T_xf 是线性的. 若 Z 是第三个流形, 而 g 是从 Y 到 Z 内的态射, 则

$$T_x(g\circ f)=(T_{f(x)}g)\circ(T_xf).$$

定理直接从公式 2.5.13.1 推出.

2.5.16 例子

设 X 是一个流形, 而 $U\in O(X)$ 作为 X 的开集, 是一个子流形: 参见 2.2.10.2. 那么对于所有 $x\in U$, 切空间 T_xU 和 T_xX 是典范同构的, 并且此后将等同它们. 例如取 T_xi 作为这个同构, 这里 $i:U\to X$ 是典范单射.

2.5.17 曲线和它们的速度

由 $\mathbf{R}$ 的一个区间 I 和一个 $\alpha\in C^p(I;X)$ 组成的一个配对 (I,α) 称为 (C^q 类, $q\geqslant p$) 流形 X 的 (C^p 类的) 曲线, 其中 $I\in O(\mathbf{R})$ 配备以流形的典范结构. 为了定义曲线的速度, 我们首先需要

2.5.17.1 定义

对于 $I\in O(\mathbf{R})$ 和 $t\in I$, 把由

2.5.17.2 $$\theta_t(1_t)=1$$

定义的 I 在 t 的切向量记为 $1_t\in T_tI$, 这里 1 是数域 $\mathbf{R}$ 的元素, 而 θ_t 在 2.5.12.2 定义. 映射 $t\to 1_t$ 称为 I 的**典范向量场** (参见 3.5.1).

2.5.17.3 定义

设 (I,α) 是流形 X 的一条曲线.X 在 $\alpha(t)$ 的切向量 $(T_t\alpha)(1_t)$ 称为 α **在$t\in I$的速度**, 并且用 $\alpha'(t)$ 表示:

$$\alpha'(t)=(T_t\alpha)(1_t).$$

我们要格外留神这个定义与对于 $E = \mathbf{R}^n$ 时 0.2.9.1 所给的定义并不一致. 不过它们以典范同构 θ_x 为模是一致的.0.2.9.1 所证明的性质在这里变换为以下形式:

2.5.17.4 若 $f \in C^p(X;Y)$, 并且设 (I,α) 是 X 的一条曲线, 则

$$(T_{\alpha(t)}f)(\alpha'(t)) = (f\circ\alpha)'(t)$$

(这就是说可以用曲线速度计算 $T_x f$).

事实上, 根据 2.5.17.3 和 2.5.15:

$$(f\circ\alpha)'(t) = (T_t(f\circ\alpha))(1_t) = (T_{\alpha(t)}f\circ T_t\alpha)(1_t) = (T_{\alpha(t)}f)[(T_t\alpha)(1_t)] = (T_{\alpha(t)}f)(\alpha'(t)).$$

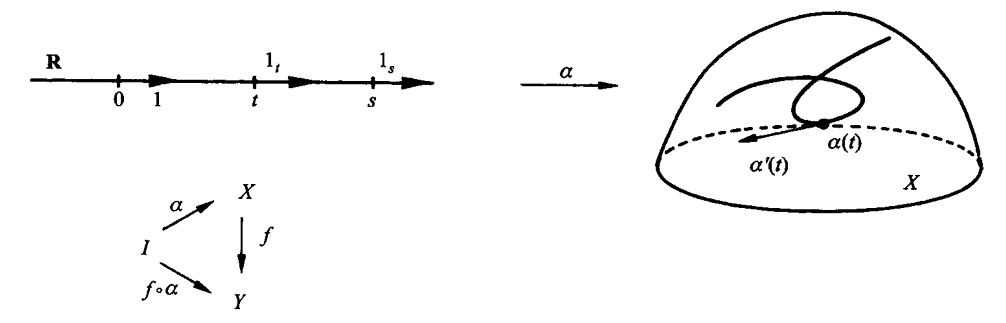


图 2.5.17

2.5.18 命题

若 X, Y 是两个 C^p 类的流形, 而 $p: X\times Y \to X$, $q: X\times Y\to Y$ 是典范投影. 则对于所有 $(x,y)\in X\times Y$, 映射

$$T_{(x,y)}p \times T_{(x,y)}q : T_{(x,y)}(X\times Y) \to T_xX\times T_yY$$

是一个同构.

有鉴于此, 经常把 $T_{(x,y)}(X\times Y)$ 和 $T_xX\times T_yY$ 等同起来. 至于证明, 根据 2.3.6.2 和 2.5.16, 可以假设 $X = \mathbf{R}^d, Y = \mathbf{R}^e$, 而在这时, 利用映射 2.5.12.3, 这里记作 $\theta_{(x,y)}, \theta_x, \theta_y$, 我们看到下列图表是交换的:

2.5.18.1

$$\begin{array}{ccc} T_{(x,y)}(\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^e) & \xrightarrow{T_{(x,y)}p} & T_x\mathbf{R}^d \\ \downarrow{\scriptstyle\theta_{(x,y)}} & & \downarrow{\scriptstyle\theta_x} \\ \mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^e & \xrightarrow[p]{} & \mathbf{R}^d \end{array}$$

于是 $T_{(x,y)}p\times T_{(x,y)}q$ 与 $p\times q$ 仅差一个双射, 而后者是一个同构.

2.5.19

这里是 0.2.19 和 0.2.22 的对应结果.

命题 设 f 是从 X 到 Y 上的一个微分同胚. 则映射 T_xf 是从 T_xX 到 $T_{f(x)}Y$ 上的一个同构.

由于 f 是一个微分同胚, f^{-1} 存在, 并且 $f^{-1}\circ f=\mathrm{id}_X$. 而 $T_x(\mathrm{id}_X)$ 是 $T_x(X)$ 的恒等映射, 这是因为代表为三元组 (U,φ,u) 的切向量 z 对应代表为

$$(U,\varphi,(\varphi\circ\mathrm{id}_X\circ\varphi^{-1})'(\varphi(x))(u))=(U,\varphi,u)$$

的切向量. 再根据 2.5.15, 则有

$$T_x(f^{-1}\circ f)=(T_{f(x)}f^{-1})\circ(T_xf)=T_x(\mathrm{id}_X)=\mathrm{id}_{T_xX}.$$

随之 T_xf 是从 T_xX 到 $T_{f(x)}Y$ 上的一个同构, 并且 $(T_xf)^{-1}=T_{f(x)}f^{-1}$.

2.5.20 命题 (参见 0.2.22)

设 f 是从 X 到 Y 上的一个 C^p 类态射, 并且映射 $T_xf\in\mathrm{Isom}\,(T_xX;T_{f(x)}Y)$. 则存在 X 的包含 x 的开集 U, 使得 $f(U)$ 是 Y 的一个开集, 并且 f 是从 U 到 $f(U)$ 上的一个微分同胚.

当借助于坐标卡明晰表示映射 T_xf 后, 这就归结到 $\mathbf{R}^n$ 的开集上的对应结果. 在开集上, 就可以应用 0.2.22 的局部逆映射定理. 由于 f 是一个 C^p 类态射 (参见 2.3.2 (iii)), 则存在相应的分别在 x 和 $f(x)$ 的坐标卡 (U,φ) 和 (V,ψ), 使得 $f(U)\subset V$. 对于这些坐标卡关联着从 T_xX 到 $\mathbf{R}^d$ (设 X 是 d 维的) 的同构, 以及从 $T_{f(x)}Y$ 到 $\mathbf{R}^e$ (设 Y 是 e 维的) 的同构.

那么根据 2.5.13.1 和假设, $(\psi\circ f\circ\varphi^{-1})'(\varphi(x))=\theta_{f(x)}\circ T_xf\circ\theta_x^{-1}$ 属于 $\mathrm{Isom}\,(\mathbf{R}^d;\mathbf{R}^d)$, 得 $\psi\circ f\circ\varphi^{-1}$ 在 $\varphi(x)$ 是平展的. 根据 0.2.22, 存在 $\Omega\in O_{\varphi(x)}(\varphi(U))$, 使得 $\psi\circ f\circ\varphi^{-1}$ 是一个从 Ω 到 $\psi(f(\varphi^{-1}(\Omega)))$ 上的一个微分同胚.

由于 ψ 和 φ 都是微分同胚 (注释 2.3.6.2), 所以

$$f=\psi^{-1}\circ(\psi\circ f\circ\varphi^{-1})\circ\varphi$$

也是一个微分同胚.

2.5.21 注释

一个覆叠映射是局部微分同胚 (根据定义 2.4.1). 但要留意其逆为假. 例如, 取 $p:X\to Y$, 其中 $X=(0,3\pi),Y=S^1$, 而 $p(t)=(\cos t,\sin t)$, 这不是一个覆叠映射, 因为 S^1 是连通的, 但是定理 2.4.4 的结论却不成立:

$$p^{-1}\left(p\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)=\left\{\frac{3\pi}{2}\right\},\quad \text{而 } p^{-1}\left(p\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)=\left\{\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{2}\right\}.$$

2.5.22 典范同构, 微分

2.5.12.3 中对于 $U\in O(\mathbf{R}^d)$ 定义的典范同构 $\theta_x:T_xU\to\mathbf{R}^d$ 更一般地对于所有有限维实向量空间 E 都存在.

根据 2.5.16, 可以假定 $U = E$. 任意取可逆的 $f \in L(E;\mathbf{R}^d)$; 对于 $x \in E$, 令 $\theta_x = f^{-1} \circ \eta_x$, 这里 η_x 是在 2.5.10 定义的与坐标卡 $f : E \to \mathbf{R}^d$ 关联的同构, 则有

2.5.22.1 $$\theta_x : T_xE \to E,$$

θ_x 不依赖于 f, 因为如果可逆的 $g \in L(E;\mathbf{R}^d)$, 而 $\zeta_x : T_xE \to \mathbf{R}^d$ 是在 2.5.10 定义的与坐标卡 $g : E \to \mathbf{R}^d$ 关联的同构, 则公式 2.5.11.1 说的正是 $f^{-1} \circ \eta_x = g^{-1} \circ \zeta_x$. 这里用到 $g \circ f^{-1}$ 是线性的, 从而 $(g \circ f^{-1})' = g \circ f^{-1}$ (参见 0.2.8.3).

这就说明下列定义的合理性, 它介于切映射的定义和导数定义之间.

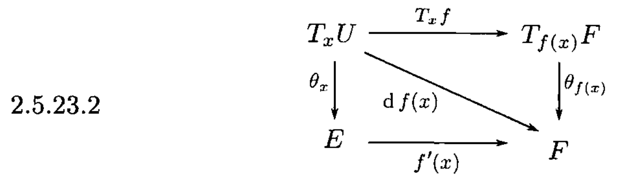
2.5.23 定义

设 X 是一个流形, E 是有限维向量空间, 而 $f \in C^p(X;E)$. 从 T_xX 到 E 内的映射 $\theta_{f(x)} \circ T_xf$ 称为 **f在x的微分**, 记作 $\mathrm{d}\,f(x)$, 其中 $\theta_{f(x)}$ 是 2.5.22.1 中定义的 $T_{f(x)}E \to E$ 的映射.

2.5.23.1
$$\begin{array}{ccc} T_xX & \xrightarrow{T_xf} & T_{f(x)}E \\ & \searrow^{\mathrm{d}\,f(x)} & \downarrow \theta_{f(x)} \\ & & E \end{array}$$

我们让读者仔细验证下列结果: 如果 $U \in O(E)$, $f \in C^p(U;F)$, 这里 E 和 F 是有限维向量空间, 则下面的图表是交换的:

2.5.23.2



即 $T_xf = \theta_{f(x)}^{-1} \circ f'(x) \circ \theta_x$ (参见 2.5.13.1).

2.5.23.3 设 $f \in C^p(X;E)$, 而 $f \in C^p(Y;X)$, 则 $\mathrm{d}\,(f \circ g)(y) = \mathrm{d}\,f(g(y)) \circ T_yg$ (2.5.15 的平凡推论).

2.5.24 切丛

给定一个流形 X. 对于每个点 $x \in X$, 可以关联它的切空间 T_xX, 现在考虑所有切空间的并集TX.

2.5.25 定理

设 X 是一个 C^p 类的 d 维流形, 则

$$TX = \bigcup_{x \in X} T_xX$$

可以典范地配备一个 C^{p-1} 类的 $2d$ 维的流形结构. 这个流形称为 X 的**切丛**.

为了定义 TX 的图册, 考虑从 TX 到 X 上的底映射 π, 其定义是: 若 $z \in T_xX$, 则令 $\pi(z) = x$. 设 (U, φ) 是 X 的一个坐标卡, 我们有 $\pi^{-1}(U) \subset TX$. 若 $z \in \pi^{-1}(U)$,

则定义 $\mathbf{R}^{2d} = \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d$ 的元素 $(\varphi(\pi(z)), \theta_{\pi(z)}(z))$, 其中 $\theta_{\pi(z)}$ 是 $T_{\pi(z)}X$ 与 $\mathbf{R}^d$ 之间的与 X 在 $\pi(z)$ 的坐标卡 (U, φ) 关联的同构映射 (参见 2.5.10). 由于 $z \in T_{\pi(z)}X$ 和 $\pi(z) \in U$, 这是有意义的. 这样就定义了从 $\pi^{-1}(U)$ 到 $\mathbf{R}^{2d}$ 内的一个映射 τ_φ:

2.5.25.1 $$\tau_\varphi = (\varphi \circ \pi, \theta_{\pi(\cdot)}) : \pi^{-1}(U) \to \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d.$$

我们断言, 当 (U, φ) 遍历 X 的坐标卡时,$\{(\pi^{-1}(U), \tau_\varphi)\}$ 构成 TX 的图册, 并且事实上 TX 是一个 C^{p-1} 类的 (分离性的) 流形.为此必须验证公理 (A.T.1), (A.T.2), (A.T.3)(参见 2.2.1) 和分离性.

(A.T.1): 由于 $\pi : TX \to X$ 是满射, 并且坐标卡的定义域 U 覆盖 X, 故 $\pi^{-1}(U)$ 覆盖 TX.

(A.T.2): 1° 因为 $\theta_{\pi(\cdot)}$ 和 φ 都是单射, 故 τ_φ 是单射 .

2° 因为 $\tau_\varphi(\pi^{-1}(U)) = \varphi(U) \times \mathbf{R}^d$, 所以 $\tau_\varphi(\pi^{-1}(U)) \in O(\mathbf{R}^{2d})$.

3° 给定 TX 的来自 X 的两个坐标卡 (U, φ) 和 (V, ψ) 的两个坐标卡, 它们是 $(\pi^{-1}(U), \tau_\varphi)$ 和 $(\pi^{-1}(V), \tau_\psi)$. 必须证明 $\tau_\varphi(\pi^{-1}(U) \bigcap \pi^{-1}(V))$ 是 $\mathbf{R}^{2d}$ 的一个开集. 而这就是 $\tau_\varphi(\pi^{-1}(U \bigcap V))$, 即 $\varphi(U \bigcap V) \times \mathbf{R}^d$, 由于 $\varphi(U \bigcap V)$ 是 $\mathbf{R}^d$ 的一个开集, 则 $\varphi(U \bigcap V) \times \mathbf{R}^d$ 是 $\mathbf{R}^{2d}$ 的开集.

(A.T.3): 仍然考虑 TX 的两个坐标卡 $(\pi^{-1}(U), \tau_\varphi)$ 和 $(\pi^{-1}(V), \tau_\psi)$. 必须证明 $\tau_\psi \circ \tau_\varphi^{-1}$ 是从 $\tau_\varphi(\pi^{-1}(U) \bigcap \pi^{-1}(V))$ 到 $\tau_\psi(\pi^{-1}(U) \bigcap \pi^{-1}(V))$ 的 C^{p-1} 类的映射, 即从 $\varphi(U \bigcap V) \times \mathbf{R}^d$ 到 $\psi(U \bigcap V) \times \mathbf{R}^d$ 内的 C^{p-1} 类的映射. 而如果 η 是与 (V, ψ) 关联的同构, 根据 2.5.11.1:

$$\tau_\psi \circ \tau_\varphi^{-1} = (\psi \circ \varphi^{-1}, \eta \circ \theta^{-1}) = (\psi \circ \varphi^{-1}, (\psi \circ \varphi^{-1})'),$$

由于 $\psi \circ \varphi^{-1}$ 是 C^p 类的, 上面的映射自然是 C^{p-1} 类的.

于是 TX 成功配备了 $2d$ 维的 C^{p-1} 类的流形结构. 还留下验证该拓扑是分离性的. 由于 τ_φ 是从 $\pi^{-1}(U)$ 到其像 $\varphi(U) \times \mathbf{R}^d$ 上的同胚 (根据 2.2.9), 若 W 是 $\mathbf{R}^d$ 的一个开集, 则 $\varphi(U) \times W$ 是 $\varphi(U) \times \mathbf{R}^d$ 的开集, 从而 $\tau_\varphi^{-1}(\varphi(U) \times W)$ 将是 TX 的开集.给定不同的z_1, $z_2 \in TX$.

第一种情形. 若 $z_1 \in T_{x_1}X$, $z_2 \in T_{x_2}X$, 而 $x_1 \neq x_2$, 由于 X 是分离性的, 所以存在在 x_1 的坐标卡 (U_1, φ_1) 和在 x_2 的坐标卡 (U_2, φ_2), 使得 $U_1 \bigcap U_2 = \varnothing$. 于是 $\pi^{-1}(U_1)$ 和 $\pi^{-1}(U_2)$ 将是 TX 的分别包含 z_1 和 z_2 的不交的开集.

第二种情形. 若 $\pi(z_1) = \pi(z_2) = x$, 则设 (U, φ) 是 X 在 x 的一个坐标卡, z_1 有三元组 (U, φ, u_1) 为其代表, 而 z_2 有三元组 (U, φ, u_2) 为其代表, 并且 $u_1 \neq u_2$(因为 $z_1 \neq z_2$). 由于 u_1 和 u_2 属于 $\mathbf{R}^d$, 所以存在 $\mathbf{R}^d$ 的分别包含 u_1 和 u_2 的不交开集 W_1 和 W_2. 于是

$$z_1 \in \tau_\varphi^{-1}(\varphi(U) \times W_1), \quad z_2 \in \tau_\varphi^{-1}(\varphi(U) \times W_2)$$

是 TX 的两个不交开集.

这就完成了定理 2.5.25 的证明.

现在设 f 是一个从 X 到 Y 内的一个态射, 我们要让它关联一个从 TX 到 TY 内的切映射. 其精确表述是:

2.5.26 定理

设 f 是一个从 X 到 Y 内的一个 C^p 态射. 从 TX 到 TY 内的映射 Tf 的定义是: 对于所有 x, 在 T_xX 上, $Tf = T_xf$, 则 Tf 是一个 C^{p-1} 态射.

我们要证明 (2.3.2(iii)): 存在 TX 的一个在 z 的坐标卡 $(\pi^{-1}(U), \tau_\varphi)$ 和 TY 的一个在 $Tf(z)$ 的坐标卡 $(\pi^{-1}(V), \tau_\psi)$, 使得 $Tf(\pi^{-1}(U)) \subset \pi^{-1}(V)$, 并且定义在开集 $\tau_\varphi(\pi^{-1}(U))$ 上的 $\tau_\psi \circ Tf \circ \tau_\varphi^{-1}$ 是一个 C^{p-1} 态射, 还必须证明 Tf 的连续性 (注意我们把从 TX 到 X 上和从 TY 到 Y 上的两个底映射均记作 π).

设 $z \in TX$, 而 $x = \pi(z)$ 使得 $z \in T_xX$. 那么 $(Tf)(z) = (T_xf)(z)$ 是在 $T_{f(x)}Y$ 内. 既然 f 是 C^p 态射, 存在 X 在 x 的一个坐标卡 (U, φ) 和 Y 在 $y = f(x)$ 的一个坐标卡 (V, ψ), 使得 $f(U) \subset V$, 并且 $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} \in C^p(\varphi(U); \mathbf{R}^e)$(如果 Y 的维数是 e), 现在考虑 TX 在 z 的坐标卡 $(\pi^{-1}(U), \tau_\varphi)$ 和 TY 在 $(Tf)(z)$ 的坐标卡 $(\pi^{-1}(V), \tau_\psi)$, 我们有

1) $$Tf(\pi^{-1}(U)) \subset \pi^{-1}(V).$$

事实上, 如果 $t_0 \in \pi^{-1}(U)$, t_0 是 X 在 U 的一个点 x_0 的切向量, 于是

$$(Tf)(t_0) = (T_{x_0}f)(t_0)$$

是 Y 在 $f(x_0)$ 的切向量, 由于 $f(U) \subset V$, 故 $f(x_0) \in V$, 随之 $(Tf)(t_0) \in \pi^{-1}(V)$.

公式 2.5.13.1 和 2.5.25.1 导致

2.5.26.1 $$\tau_\psi \circ Tf \circ \tau_\varphi^{-1} = (\psi \circ f \circ \varphi^{-1}, (\psi \circ f \circ \varphi^{-1})').$$

由假设,$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ 是 C^p 类的, 故 $\tau_\psi \circ Tf \circ \tau_\varphi^{-1}$ 是 C^{p-1} 类的. 此外, 因为 $\tau_\psi \circ Tf \circ \tau_\varphi^{-1}$ 是连续的, 而 τ_φ 和 τ_ψ 是同胚 (参见 2.2.9), 所以 Tf 是连续的.

2.5.27 性质 (复合函数定理)

设 X, Y, Z 是至少 C^p 类的三个流形, 而 f 和 g 分别是从 X 到 Y 内和从 Y 到 Z 内的 C^p 态射. 则 $T(g \circ f) = Tg \circ Tf$.

这个结果只不过是 2.5.15 的翻译版本.

2.5.28 速度

设 $I \subset \mathbf{R}$ 是一个区间, 而 $\xi : t \mapsto 1_t$ 是在 2.5.17.1 定义的从 I 到 TI 的映射. 则

$$\xi \in C^\infty(I; TI)$$

事实上, 对于 I 的典范坐标卡 id_I 和由此诱导的 TI 的坐标卡, 映射 ξ 表示为 (参见 2.3.1) $t \mapsto (t, 1)$, 这无疑是 C^∞ 的. 由此推知:

如果 (I, α) 是 X 的一条曲线, 即 $\alpha \in C^p(I; X)$, 则可以由 $\alpha' = T\alpha \circ \xi$ 定义速度映射$\alpha' : I \to TX$, 根据 2.5.26, 我们有 $\alpha' \in C^{p-1}(I; TX)$.

2.5.29 微分

设 E 是一个有限维向量开集, X 是一个流形, 而 $f: X \to E$ 是一个态射. 我们把它的微分 $\mathrm{d}\, f(x)$

$$\begin{array}{ccc} TX & \xrightarrow{Tf} & TE \\ & \searrow^{\mathrm{d} f} & \downarrow \theta \\ & & E \end{array}$$

(参见 2.5.23.1) 与之关联,x 遍历 X, 而 θ 由当 y 遍历 E 时的 θ_y 集合定义.

如果 $g \in C^p(Y; X)$, 则有 (参见 2.5.23.3): $\mathrm{d}\,(f \circ g) = \mathrm{d}\, f \circ Tg$.

2.6 子流形, 浸入, 浸没, 嵌入

现在把 2.1 的子流形概念从 $\mathbf{R}^n$ 推广到抽象流形. 读者应当用心自己画出有关图形, 像在 2.1 节那样, 以便加深对于概念的理解.

2.6.1 定义

设 X 是一个 d 维流形, 而 Y 是 X 的一个子集. 我们说 Y 是 X 的 e**维子流形**, 如果对于 Y 的每个 y, 存在 X 的一个在 y 的坐标卡 (U, φ), 使得 $\varphi(U \bigcap Y) = \varphi(U) \bigcap \mathbf{R}^e$.

这里利用典范包含映射

$$\mathbf{R}^e \to \mathbf{R}^e \times \{0\} \subset \mathbf{R}^e \times \mathbf{R}^{d-e} = \mathbf{R}^d$$

把 $\mathbf{R}^e$ 等同于 $\mathbf{R}^e \times \{0\} \subset \mathbf{R}^d$.

2.6.1.1 注释 定义 2.6.1 可以表达为:若 Y 在 X 内的状态处处局部地微分同胚于 $\mathbf{R}^e$ 在 $\mathbf{R}^d$ 内的状态, 则 Y 是 X 的子流形.

2.6.2 定理

设 X 是一个 C^p 类的流形, 而 Y 是 X 的子流形. 当 (U, φ) 遍历 2.6.1 类型的图册时, $(U \bigcap Y, \varphi|_{U \bigcap Y})$ 形成 Y 的一个 C^p 类的图册. 特别地, Y 有一个典范流形结构.

公理 (A.T.1) 的验证是平凡的. 对于 (A.T.2), 设 (U, φ) 和 (V, ψ) 是两个 2.6.1 类型的坐标卡, 则有

$$\varphi((U \bigcap Y) \bigcap (V \bigcap Y)) = \varphi(U \bigcap V) \bigcap \mathbf{R}^e,$$

对于 (A.T.3), 类似有

$$(\psi|_{U \cap V \cap Y}) \circ (\varphi|_{U \cap V \cap Y})^{-1} = (\psi \circ \varphi^{-1})|_{\varphi(U \cap V) \cap \mathbf{R}^e},$$

由于 $(\psi \circ \varphi^{-1})|_{\varphi(U \bigcap V)}$ 是 C^p 类的, 故 $(\psi|_{U \bigcap V \bigcap Y}) \circ (\varphi|_{U \bigcap V \bigcap Y})^{-1}$ 也是 C^p 类的.

下一个引理指出 Y 的所有坐标卡, 局部地都是 2.6.1 类型的.

2.6.3 引理

设 X 是一个流形, Y 是 X 的一个子流形, 而 (W,η) 是流形 Y 的任何一个在 y 的坐标卡. 则存在 X 在 y 的坐标卡 (U,φ), 使得

$$\varphi(U\bigcap Y)=\varphi(U)\bigcap \mathbf{R}^e,$$
$$U\bigcap Y\in O_y(W),\quad 并且\quad \varphi|_{U\cap Y}=\eta|_{U\cap Y}.$$

根据定义 2.2.5 和 2.6.1, 存在 X 在 y 的坐标卡 (V,ψ), 使得 $\psi(V\bigcap Y)=\psi(V)\bigcap\mathbf{R}^e$, 并且 $\eta\circ\psi^{-1}$ 是 $\mathbf{R}^e\subset\mathbf{R}^d$ 的开集 $\psi(V\bigcap W)$ 到 $\eta(V\bigcap W)$ 上的微分同胚. 由在 $\mathbf{R}^d=\mathbf{R}^e\times\mathbf{R}^{d-e}$ 上乘积拓扑的定义, 存在 $Z\in O_0(\mathbf{R}^{d-e})$ 和 $S\in O_{\psi(y)}(\psi(V\bigcap W))$, 使得

$$S\times Z\in O_{\psi(y)}(\psi(V)).$$

我们用 $\sigma=(\eta\circ\psi^{-1}|_{S\times Z})\times\mathrm{id}\,|_{\mathbf{R}^{d-e}}$ 延拓 $\eta\circ\psi^{-1}|_{S\times Z}$ 成为从 $S\times Z$ 到 $\sigma(S\times Z)$ 上的微分同胚 σ. 令 $U=\psi^{-1}(S\times Z)$ 和 $\varphi=\sigma\circ\psi$, 由构造本身看出 (U,φ) 就是要找的符合要求的坐标卡.

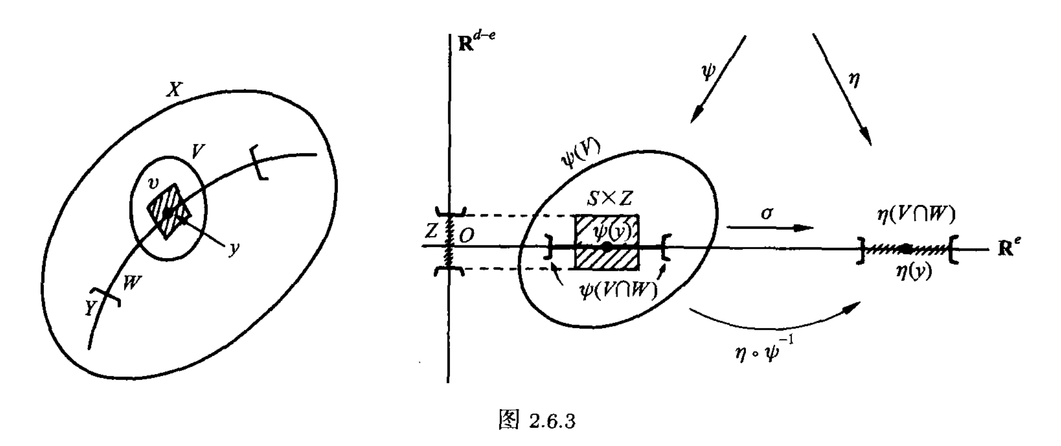


图 2.6.3

2.6.4 命题

X 的子流形 Y 的流形拓扑同由 X 诱导的拓扑重合.

把定理 2.2.6 中的定义应用到 Y, 在 Y 的流形拓扑意义下的开集 U 是 Y 的某些坐标卡的定义域的并集, 根据引理 2.6.3, 是 Y 的某些集合的并集, 这些集合的形式为 Y 和 X 的开集的交集, 这清楚地说明 U 在由 X 的拓扑诱导的拓扑的意义下也是开集. 反之, 考虑 Y 的对于由 X 的拓扑诱导的拓扑的意义的开集 U, 即 (2.2.6) $U=W\bigcap Y$, 这里 W 是 X 的某些坐标卡的一个并集; 而对于 X 的所有坐标卡 (S,τ), 只要 $S\bigcap Y\neq\varnothing$, 就存在一个 2.6.1 类型的坐标卡 (V,φ), 使得 $V\subset S$, 这是因为只需对于 $y\in S\bigcap Y$ 应用定义 2.6.1, 并且如果有必要, 缩小坐标卡 (V,φ) 为 $(V\bigcap S,\varphi|_S)$.

2.6.5　命题 (传递性)

设 X 是一个流形, Y 是 X 的一个子流形, 而 Z 是流形 Y (参见 2.6.2) 的一个子流形. 则 Z 是 X 的一个子流形.

设 X, Y, Z 的维数分别是 d, e, f, 并且有典范包含 $\mathbf{R}^f \subset \mathbf{R}^e \subset \mathbf{R}^d$. 定义 2.6.1 指出, 在 Z 的任意点 z, 存在 Y 的一个在 z 的坐标卡 (W, η), 使得 $\eta(W \bigcap Z) = \eta(W) \bigcap \mathbf{R}^f \subset \mathbf{R}^e$. 对于 $z \in Y$ 和 X 的子流形 Y 的坐标卡 (W, η), 利用引理 2.6.3, 如果有必要缩小 W, 存在 X 的坐标卡 (U, φ), 使得

$$\varphi(U \bigcap Y) = \varphi(U) \bigcap \mathbf{R}^e, \ \text{且 } W = U \bigcap Y.$$

于是 $\varphi(U \bigcap Z) = \eta(U \bigcap Z) = \eta(W \bigcap Z) = \eta(W) \bigcap \mathbf{R}^f = \varphi(U) \bigcap \mathbf{R}^f$.

2.6.6　命题 (参见 2.3.3.4)

设 X, Y 是两个流形, $f \in C^p(X; Y)$, 而 Z 是 X 的一个子流形, 则

$$f|_Z \in C^p(Z; Y).$$

利用注释 2.6.6.1 解答习题 2.8.19.

2.6.7　命题 (参见 2.3.3.5)

设 X, Z 是两个流形, Y 是 X 的一个子流形, 而 $f : Z \to X$ (仅假设是集合论意义上的映射), 使得 $f(Z) \subset Y$; 用 $f|_Y$ 表示这样得到的映射 $f : Z \to Y$. 则 $f \in C^p(Z; X)$ 等价于 $f|_Y \in C^p(Z; Y)$.

根据注释 2.6.6.1 的提示, 问题归结为以下情形: 对于向量空间 E, F, G 有 $Z \in O(E), X = F \times G, Y = F \times \{0\} \subset F \times G$, 而 $f : Z \to F \times G$ 实际有形式 $(f, 0)$. 显然配对 $(f, 0)$ 是 C^p 类的, 当且仅当 f 是 C^p 类的 (参见 0.2.8.4!). 读者应该补上更详细的证明: 习题 2.8.19.

2.6.8　命题

设 $i : Y \to X$ 是流形 X 的子流形 Y 的典范单射. 则 i 是一个态射, 并且对于所有 $y \in Y$, 切映射 $T_y i : T_y Y \to T_y X$ 是单射.

由于这个命题, 今后可以把 $T_y Y$ 等同于 $T_y X$ 的一个向量子开集, 并且写成 $T_y Y \subset T_y X$.

根据注释 2.6.1.1, 我们可以假定是下列情形:

$$i : E \to E \times F, \ \text{这里 } i(y) = (y, 0),$$

此时, 命题的断言是显而易见的.

现在把 0.2.17,0.2.20 和 0.2.23 引入的概念推广到流形.

2.6.9　定义

设 X, Y 是两个流形, $f : X \to Y$ 是一个态射. 我们称 f 在 x 是一个**浸入** (对应的, **浸没**), 如果 $T_x f$ 是单的 (对应的, 满的). 我们称 f 在 x 是**平展的**, 如果

$T_x f \in \mathrm{Isom}\,(T_x X; T_{f(x)} Y)$. 我们称 f 是一个**浸入, 浸没,平展**的, 如果相关的性质对于所有的 $x \in X$ 成立. 最后, 我们称 f 是从 X 到 Y 内一个**嵌入**, 如果 f 是单射, 同时又是一个浸入和一个从 X 到其像 $f(X)$ 的同胚.

下面的几个结果总体上推广了定理 2.1.2.

2.6.10 命题

设 $Y \subset X$ 是流形 X 的子流形, 则典范单射 $i : Y \to X$ 是从 Y 到 X 内的一个嵌入, 特别地是一个浸入. 反之, 设 Z, X 是两个流形, 而态射 $f : Z \to X$ 在 $x \in Z$ 是一个浸入; 则存在 $U \in O_x(Z)$, 使得 $f|_U$ 是一个从 U 到 X 内的嵌入. 此外, $f(U)$ 是 X 的一个子流形, 并且 f 是一个从 U 到 $f(U)$ 上的微分同胚.

包含关系在微分同胚下是不变的, 这个命题通过坐标卡归结到下列情形: $Y \in O(E), X = F$, 其中 E, F 是有限维向量空间, 并且应用定理 0.2.24, 这个定理指出局部地通过微分同胚问题归结为考虑典范单射 $E \to E \times \{0\} \subset E \times F$ 的这种情形, 此时, $E \times \{0\}$ 明显是 $E \times F$ 的子流形, 而 $E \to E \times \{0\}$ 是一个嵌入, 甚至是从 E 到 $E \times \{0\}$ 上的微分同胚.

2.6.11 推论

设 f 是从 Z 到 X 内的一个嵌入. 则 $f(Z)$ 是 X 的一个子流形, 并且 f 是从 Z 到 $f(Z)$ 的一个微分同胚.

根据 2.6.10, f 处处局部地是一个微分同胚. 根据假设, f^{-1} 存在并且连续, 由于 f^{-1} 连续并且是处处局部可微的, 根据 2.3.2(iii), f^{-1} 是从 $f(Z)$ 到 Z 内的一个态射.

要格外留意以下事实: 一般说来, 一个单射的浸入并非是一个嵌入: 注释 2.1.5. 不过障碍是非紧致性, 因为我们有:

2.6.12 定理

若 Z 是一个紧致流形,f 是一个从 Z 到流形 X 内的单射的浸入, 则 f 是从 Z 到 X 内的一个嵌入, 并且 $f(Z)$ 是 X 的一个子流形.

事实上, 一般拓扑学的一个定理断言: 一个从紧致集到一个分离性的拓扑空间内的连续的双射是一个同胚.

2.6.13 例子

2.6.13.1 流形 $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ (参见 2.4.12.1) 微分同胚于圆周 S^1.

事实上, 映射 $\bar{f} : \mathbf{R} \ni t \mapsto (\cos \pi t, \sin \pi t) \in \mathbf{R}^2$ 过渡到 $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$, 定义映射 $f : \mathbf{R}/\mathbf{Z} \to \mathbf{R}^2$, 这是因为 $f(t+k) = f(t)$, $\forall k \in \mathbf{Z}$.

2.6.13.1′



另外, $f(\mathbf{R}/\mathbf{Z}) = S^1$, f 是单射, 并且借助 2.4.11, 得 $f \in C^\infty(\mathbf{R}/\mathbf{Z}; \mathbf{R}^2)$. 由于 $[0,1]$ 是紧致的, 而 $\mathbf{R}/\mathbf{Z} = p([0,1])$, 故 $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ 是紧致的. 如果我们证明了 f 是一个浸

入, 定理 2.6.12 将蕴涵 f 是从 $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ 到 $f(\mathbf{R}/\mathbf{Z}) = S^1$ 上的微分同胚. 由于 p 是平展的, 只需验证 $\bar{f}$ 是一个浸入, 或 $\bar{f}'(t) \neq 0$, 由于 $\bar{f}'(t) = (-\pi\sin\pi t, \pi\cos\pi t)$, 所以这是平凡的.

2.6.13.2 射影空间 $P^2(\mathbf{R})$. 第二种生成方法.2.4.12.3 中的映射 $\underline{f}$ 是从 $P^2(\mathbf{R})$ 到 $\mathbf{R}^6$ 内的嵌入.

事实上, $P^2(\mathbf{R})$ 是紧致的 (参见 2.4.12.2), 并且 $\underline{f}$ 是单射的, 如果证明了 $\underline{f}$ 是一个浸入, 命题的结论将从定理 2.6.12 得到. 由于 $p: S^2 \to P^2(\mathbf{R})$ 是平展的, 所以只需指出 f 是一个浸入. 由于 $S^2 \subset \mathbf{R}^3$ 是子流形, 并且 f 是

$$f: (x,y,z) \mapsto (x^2, y^2, z^2, \sqrt{2}yz, \sqrt{2}zx, \sqrt{2}xy)$$

在 S^2 上的限制, 故只需证明 (定义 2.6.9) $T_{(x,y,z)}f$ 限制在 $T_{(x,y,z)}S^2$ 上是单射. 由于 $f: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^6$, 切映射的定义 2.5.13.1 指出只需考察 $f'(x,y,z)$ 是否是单射. 而 f 在 (x,y,z) 的雅可比矩阵 (参见 0.2.8.8) 是

$$\begin{bmatrix} 2x & 0 & 0 \\ 0 & 2y & 0 \\ 0 & 0 & 2z \\ 0 & \sqrt{2}z & \sqrt{2}y \\ \sqrt{2}z & 0 & \sqrt{2}x \\ \sqrt{2}y & \sqrt{2}x & 0 \end{bmatrix}$$

如果 $(x,y,z) \neq 0$, 这个矩阵的秩是 3, 于是 $f'(x,y,z)$ 是一个单射, 它在 $T_{(x,y,z)}S^2$ 的限制自然也如此.

2.6.13.3 在第八章和第九章将详细研究从实直线 $\mathbf{R}$ 及从 S^1 到 $\mathbf{R}^n$ 的浸入和嵌入, 它们本质上就是 1 维流形: 见 8.1 和 9.1.

2.6.14 命题

设 X, Y 是两个流形, $f: X \to Y$ 在 $x \in X$ 是一个浸没; 则存在 $U \in O_x(X)$, 使得 $f^{-1}(f(x)) \bigcap U$ 是 X 的一个子流形. 反之, 设 $Y \subset X$ 是一个子流形, $y \in Y$, 则存在 $U \in O_x(X)$ 和一个浸没 $f: U \to \mathbf{R}^{d-e}$(其中 $d = \dim X, e = \dim Y$), 使得 $Y \bigcap U = f^{-1}(0)$.

证明: 利用定理 0.2.26.

表达 2.6.14 的另一种方式 (参见 2.1.2(iii)) 是:

2.6.15 命题

给定一个 C^p 类的 d 维流形 X, $x \in X, U \in O_x(X)$, 给定 k 个函数

$$f_i \in C^q(U) \quad (1 \leqslant q \leqslant p, i = 1, \cdots, k)$$

满足条件, $f_i(x) = 0, \quad \forall i$, 并且在 x 的 (作为 T_xX 上的线性形式的 (参见 2.5.23)) 微

分 $\mathrm{d}\,f_i(x)(i=1,\cdots,k)$ 是线性无关的. 则存在 $V\in O_x(U)$, 使得

$$V\bigcap\bigcap_{i=1}^{k}f_i^{-1}(0)$$

是看作 C^q 类流形的 X 的 $d-k$ 维子流形.

只需构造态射

$$F:U\ni x\mapsto(f_1(x),\cdots,f_k(x))\in\mathbf{R}^k,$$

由于 $\mathrm{d}\,f_i(x)(i=1,\cdots,k)$ 是线性无关的, 所以 F 在 x 是一个浸没, 从而命题 2.6.14 表明 $F^{-1}(F(x))=F^{-1}(0)$ 是一个开集 $V\in O_x(U)$ 的子流形. 对于一个更完备的叙述, 参见习题 2.8.20. 至于 2.6.15 的逆, 这从定义 2.6.1 立即推出, 只需把 $\mathbf{R}^d$ 的 $d-e$ 个坐标函数 $x_{e+1},\cdots,x_d$ 转移到 U 上.

2.7 单位法丛. 管形

设 X 是一个抽象流形, E 是一个欧几里得空间, 而 f 是从 X 到 E 内的一个浸入. 在整个这一节里假定: X 和 f 是 C^p 类的, $p\geqslant 2$. 对于每个点 $x\in X$, 考虑 $\theta_{f(x)}((T_xf)(T_xX))$ 的正交子空间 (参见 2.5.22.1).

2.7.1 $$N_xX=[\theta_{f(x)}((T_xf)(T_xX))]^{\perp},$$

这里 $\perp$ 表示在欧几里得空间 E 内的正交.

2.7.2 定义

$$N_xX=\{z\in E:(z|u)=0,\quad\forall u\in\theta_{f(x)}((T_xf)(T_xX))\}$$

称为 (X,f)在 x 的**法空间**; 若已经暗示了浸入 f, 则简单地称为 X 在 x 的**法空间**, 还可以称为 $f(X)$ 在 $f(x)$ 的**法空间**. N_xX 中的非零向量称为 $f(X)$ 在 $f(x)$ 的**法向量**, 长度为 1 的法向量称为**单位法向量**.

注意 $\dim N_xX=\dim E-\dim X$.

更一般地, 引入下列相对于乘积 $X\times E$ 的子集的记号和定义.

2.7.3 记号

$$NX=\{(x,v)\in X\times E:v\in N_xX\},$$
$$N^{\varepsilon}X=\{(x,v)\in NX:\|v\|<\varepsilon\},$$
$$\overline{N^{\varepsilon}X}=\{(x,v)\in NX:\|v\|\leqslant\varepsilon\}$$
$$NU^{\varepsilon}X=\{(x,v)\in NX:\|v\|=\varepsilon\},$$
$$NUX=\{(x,v)\in NX:\|v\|=1\}=NU^1X.$$

2.7.4 定义

NX 称为 (X,f) 的**法丛**. NUX 称为 (X,f) 的**单位法丛**.

我们还引进一个从 NX 到 E 内的叫做典范映射的映射 can:

2.7.5 $$\mathrm{can}\,(x,v)=f(x)+v,$$

并且给出

2.7.6 定义

$TUB^{\varepsilon}X=\mathrm{can}\,(N^{\varepsilon}X)$ 称为 (X,f) 的 ε- **管形邻域**, 或围绕 (X,f) 的半径 ε 的**管形**.

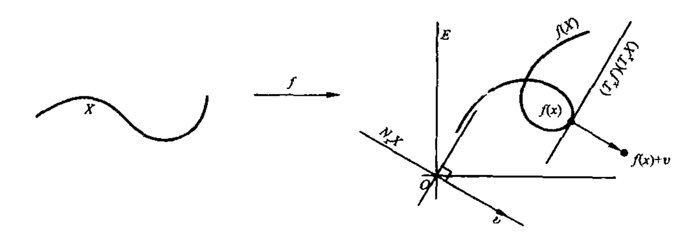


图 2.7.6.1

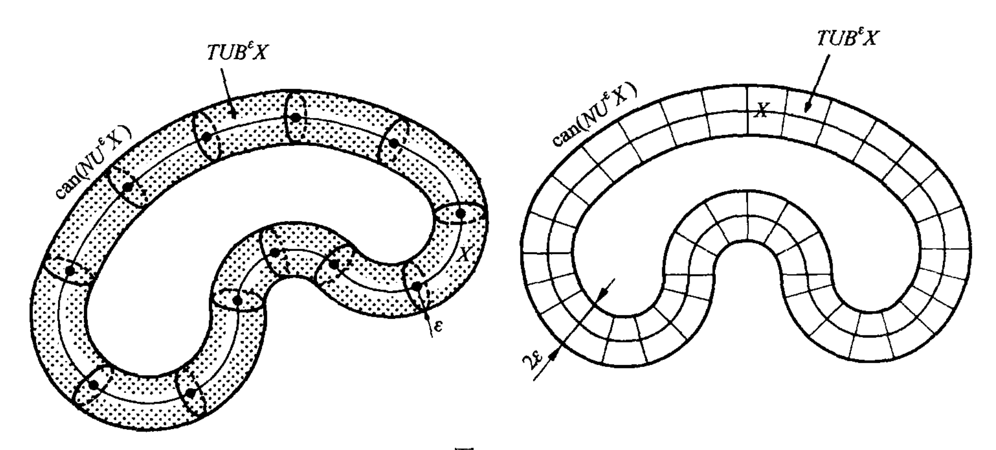


图 2.7.6.2

这个术语的合理性解释如下: 为了简单起见, 我们考虑 X 是 E 的子流形的情形, f 是从 X 到 E 内的典范单射, 那么 $(T_xX)^{\perp}$ 就用 E 的捆绑在 x 的并且正交于 T_xX 的向量表示 (参见 2.5.12.4); 于是 $\mathrm{can}\,(x,v)=x+v$ 就是这样的法向量的末端, 而 $TUB^{\varepsilon}X$ 就是 x 遍历 X 时所有模 $<\varepsilon$ 的法向量末端的集合. 如果 X 是 $\mathbf{R}^3$ 的曲线, 我们就得到围绕 X 的半径为 ε 的管形; 如果 X 是 $\mathbf{R}^2$ 的曲线, 我们就得到围绕 X 的宽度为 2ε 的带形. 不过提醒注意: $TUB^{\varepsilon}X$ 未必是与 X 距离小于 ε 的点的集合; 参见习题 2.8.29 和下文 2.7.12. 我们看到 $\overline{N^{\varepsilon}X}$ 是 $N^{\varepsilon}X$ 的闭包, 而 $NU^{\varepsilon}X$ 是 $N^{\varepsilon}X$ 的边界.

2.7.7 定理

设 X 是一个 C^p 类 d 维抽象流形, E 是一个 n 维欧几里得空间. 又设 f 是从 X 到 E 内的 C^p 浸入. 则 $NX, N^\varepsilon X, NUX$ 是 C^{p-1} 类的流形, 它们的维数分别是 $n, n, n-1$.

由于 E 是 C^∞ 类流形, $X \times E$ 是一个流形 (2.2.10.3), 我们要指出 $NX, N^\varepsilon X$ 和 NUX 是 $X \times E$ 的子流形, 方法是用方程定义它们, 并且利用命题 2.6.15.

NX的情形. 设 $(x,v) \in NX$, 而 (U,φ) 是 X 在 x 的坐标卡, 则当且仅当 $y \in U$, 并且 $w \in N_yX$, 我们有

$$(y,w) \in (U \times E)\bigcap NX.$$

问题在于解释这后一个条件.

引入与 y 和坐标卡 (U,φ) 关联的同构 θ_y(参见 2.5.10) 和 (2.5.22.1) 中引入同构 $\theta_{f(y)}$; 对于 $z \in T_yX$, 如果 $u = \theta_y(z) \in \mathbf{R}^d$, 则根据 (2.5.13.1) 得

$$\theta_{f(y)}[(T_yf)(z)] = (f \circ \varphi^{-1})'(\varphi(y))(u).$$

设 $\{e_1, \cdots, e_d\}$ 是 $\mathbf{R}^d$ 的典范基底, 则 E 的子空间 $\theta_{f(y)}((T_yf)(T_yX))$ 由向量 $(f \circ \varphi^{-1})'(\varphi(y))(e_i)$ $(i = 1, \cdots, d)$ 生成. 由此得出

2.7.8 $$w \in N_yX \Leftrightarrow (w|(f \circ \varphi^{-1})'(\varphi(y))(e_i)) = 0 \quad \forall i = 1, \cdots, d.$$

考虑 d 个从 $U \times E$ 到 $\mathbf{R}$ 由

2.7.9 $$h_i : h_i(y,w) = (w|(f \circ \varphi^{-1})'(\varphi(y))(e_i)), \quad i = 1, \cdots, d$$

定义的函数, 则

$$(U \times E)\bigcap NX = \bigcap_{i=1}^{d} h_i^{-1}(0).$$

如果证明了 h_i 是 C^{p-1} 类的, 并且 $\mathrm{d}\,h_i(x,v)$ 是线性无关的, 就将推出 (定理 2.6.15) NX 是 $X \times E$ 的 C^{p-1} 类的子空间, 其维数为 $n+d-d=n$. 由于从 $E \times E$ 到 $\mathbf{R}$ 内的映射 $(\alpha,\beta) \mapsto (\alpha|\beta)$ 是 C^∞ 的, 而从 U 到 E 内映射

$$y \mapsto (f \circ \varphi^{-1})'(\varphi(y))(e_i)$$

是 C^{p-1} 类的, 函数 h_i 必然是 C^{p-1} 类的.

下面来考虑从 $T_{(x,v)}(X \times E)$ 到 $\mathbf{R}$ 内的映射 $\mathrm{d}\,h_i(x,v) = \theta_{h_i(x,v)} \circ T_{(x,v)}h_i$, 这里 $\theta_{h_i(x,v)}$ 是从 $T_{h_i(x,y)}\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}$ 上的与 $\mathbf{R}$ 的在 $h_i(x,v)$ 的坐标卡 $(\mathbf{R}, \mathrm{id}_{\mathbf{R}})$ 关联的典范同构 (参见 2.5.23.2). 而在 $U \times E$ 里, 我们找到作为 E 的向量子空间的子流形 N_xX 和 $X \times E$ 的子流形 $\{x\} \times E$; 在 $(x,v) \in N_xX$, 在 $T_{(x,v)}(X \times E)$ 里 (参见 2.5.18), 我

们找到子空间 T_vE. 如果微分 $\mathrm{d}\,h_i(x,v)(i=1,\cdots,d)$ 限制在 T_vE 已经是线性无关的, 那么在 $T_{(x,v)}(X\times E)\supset T_vE$ 上自然也是线性无关的. 而

$$\mathrm{d}\,h_i(x,v)|_{T_vE}=\mathrm{d}\,(h_i|_E)_v$$

(应用 2.5.23.3 到包含关系 $\{x\}\times E\subset X\times E$), 而 $h_i|_E$ 是与固定向量

$$(f\circ\varphi^{-1})'(\varphi(x))(e_i)(i=1,\cdots,d)$$

关联的线性形式 $(\cdot|(f\circ\varphi^{-1})'(\varphi(x))(e_i))$, 这些线性形式的微分以同构 θ_v 为模是等于自己的 (参见 0.2.8.3), 因为 $(f\circ\varphi^{-1})'(\varphi(x))(e_i)$ $(i=1,\cdots,d)$ 线性无关, 这些微分 (对于 $i=1,\cdots,d$) 是线性无关的. 而这对于所有 (x,v) 成立, 从而 $NX\subset X\times E$ 必然是 C^{p-1} 类的子流形 (参见 2.6.15).

对于$N^\varepsilon X$. 由于 $N^\varepsilon X=\{(x,v)|(x,v)\in NX,\|\,v\,\|<\varepsilon\}$, 这是 NX 的一个开集, 故这是一个 C^{p-1} 类的子流形, 并且维数是 n(参见例子 2.2.10.2).

对于$NUX=\{(x,v)|(x,v)\in NX,\|\,v\|=1\}$, 这是 NX 的一个子流形, 我们可以用一个方程定义它. 事实上, 从 NX 到 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x,v)=\|\,v\,\|^2-1$ 满足 $NUX=f^{-1}(0)$(这里我们有一个整体方程), 只需证明在 NUX 的所有点 $\mathrm{d}\,f(x,v)\neq 0$. 为了证明这一事实, 我们应用对于 NX 情形证明的最后用到的同一技术, f 在 $\{x\}\times E$ 的限制是二次型 $\|\,v\,\|^2-1$, 其在 v 的微分, 不计 θ_v 的话, 是 $2(v|\cdot)$, 如果 $v\neq 0$, 它不是零, 由于 $\|\,v\,\|=1$, 正是这种情形! 这就完成了定理 2.7.7 的证明.

现在要证明在 2.7.5 定义的映射 can 是 $N^\varepsilon X$ 在 E 内的嵌入. 为此需要:

2.7.10 定理

对于 X 的所有 x, 映射 can 在 $(x,0)$ 是平展的.

映射 can 在 NX 上由 $\mathrm{can}\,(x,v)=f(x)+v$ 定义. 因为 $\mathrm{can}\,(x,0)=f(x)$, 并且 NX 和 E 维数相同. 只需指出切映射 $T_{(x,0)}(\mathrm{can}\,)$ 从 $T_{(x,0)}NX$ 到 $T_{f(x)}E$ 上是满射的.$T_{f(x)}E$ 的子空间 $(T_xf)(T_xX)$ 有一个补子空间, 即 $[\theta_{f(x)}((T_xf)(T_xX))]^\perp$ 在 $\theta_{f(x)}^{-1}$ 下的像集, 我们把这个补空间就简单地记作 $[(T_xf)(T_xX)]^\perp$. 在这个约定下, $T_{f(x)}E$ 分解为正交的直和

$$T_{f(x)}E=((T_xf)(T_xX))\oplus((T_xf)(T_xX))^\perp.$$

为了证明 $T_{(x,0)}(\mathrm{can}\,)$ 是满射, 只需指出对于 $(T_xf)(T_xX)$ 的每个向量 u, 存在 $T_{(x,0)}NX$ 的一个 z 使得 $[T_{(x,0)}(\mathrm{can}\,)](z)=u$, 以及对于 $[(T_xf)(T_xX)]^\perp$ 的 v 有同样结果. 此外, 设 γ 是 NX 的一条曲线, 对于 $z\in T_{(x,0)}NX$ 满足 $\gamma'(t)=z$, 我们将有 $[T_{(x,0)}(\mathrm{can}\,)](z)=(\mathrm{can}\circ\gamma')(t)$ (参见 2.5.17.4). 给定 $u\in T_xf(T_xX)$, 则存在 $w\in T_xX$, 使得 $(T_xf)(w)=u$. 设 α 是 X 的 C^p 类曲线, 满足 $\alpha(0)=x$ 和 $\alpha'(0)=w$, w 是 X 在 x 的切向量. 令 $\gamma(t)=(\alpha(t),0)$, 这里 0 是 E 的零向量, 我们就定义了 NX 的一条 C^p 类的曲线 γ, 使得 $(\mathrm{can}\circ\gamma)(t)=\mathrm{can}\,(\alpha(t),0)=f(\alpha(t))$, 并且

$$(\mathrm{can}\circ\gamma)'(0)=(T_xf)(\alpha'(0))=(T_xf)(w)=u.$$

于是对于 $u \in T_x f(T_x X)$, 我们以 $z = \gamma'(0) \in T_{\gamma(0)}NX = T_{(x,0)}NX$ 与之关联, 使得

$$T_{(x,0)}\text{can}\,(z) = (\text{can} \circ \gamma)'(0) = u.$$

同样地, 设 v 属于 $[(T_x f)(T_x X)]^{\perp}$. 我们用 $\gamma(t) = (x, tv)$ 定义 NX 的曲线. 我们有

$$(\text{can} \circ \gamma)(t) = \text{can}\,(x, tv) = f(x) + tv,$$

于是 $(\text{can} \circ \gamma)'(0) = v$, 并且 $T_{\gamma(0)}NX = T_{(x,0)}NX$ 的向量 $z = \gamma'(0)$ 满足

$$(\text{can} \circ \gamma)'(0) = [T_{(x,0)}(\text{can}\,)](z) = v.$$

2.7.11 注释

映射 can 一般不是处处平展的, 例如考虑 $X = S^1 \subset \mathbf{R}^2$, 对于所有 $x \in S^1$, 我们有 $x \in N_x S^1$, 于是 $\text{can}\,(x, -x) = 0$ (我们说 0 是 S^1 的 "焦点").

另外, 不存在 $\varepsilon > 0$, 使得 $\text{can}: N^{\varepsilon}X \to E$ 是一个嵌入 (虽然定理 2.7.10 蕴涵 can 在 $(x,0)$ 的一个邻域内的每个点是一个嵌入 (参见 2.5.20)). 图 2.7.11 是一个反例:

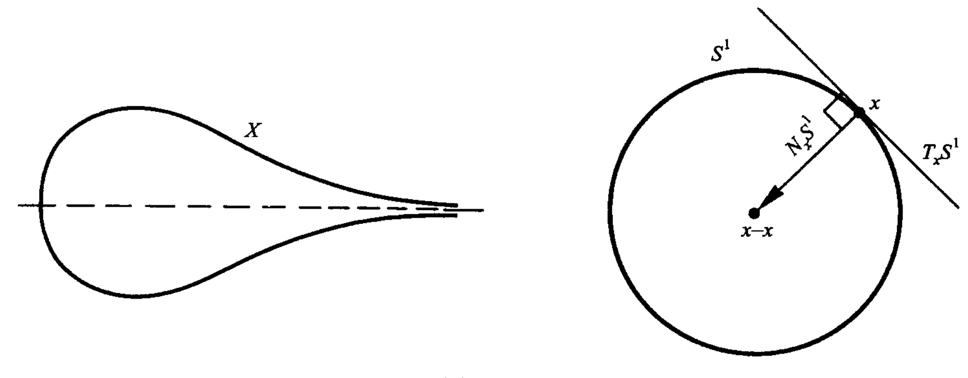


图 2.7.11

X 的趋于无穷远的点彼此逐渐靠近, 这就逼使 ε 越来越小. 但是如果 X 是紧致的, 则有:

2.7.12 定理

如果 X 是一个紧致流形, E 是一个欧几里得向量空间, f 是一个从 X 到 E 内的 C^p 态射, 并且是嵌入. 则存在 $\varepsilon > 0$, 使得从 $N^{\varepsilon}X$ 到 $TUB^{\varepsilon}X$ 上的映射 can 是一个微分同胚.

由于对于 X 的所有点 x, 映射 can 在 $(x, 0)$ 是平展的, $T_{(x,0)}(\text{can}\,)$ 是双射, 从而实现一个局部微分同胚 (参见命题 2.5.20). 于是存在 NX 的一个包含 $(x, 0)$ 的邻域 W_x, 使得 can 在 W_x 上的限制是从 W_x 到其像集上的微分同胚. 由于 NX 是 $X \times E$

的一个子流形, 可以找到一个数 $\varepsilon_x > 0$ 和 X 的一个包含 x 的开集 U_x, 使得

$$N^{\varepsilon_x}X\bigcap(U_x \times E) \subset W_x.$$

当 x 变动时, 诸 U_x 覆盖了紧致集 X, 所以存在有限数目的点 $x_1, \cdots, x_n$, 使得 $X = U_{x_1}\bigcup\cdots\bigcup U_{x_n}$. 设 $\varepsilon = \inf\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \varepsilon_{x_i}$, 考虑 $N^\varepsilon X$. 设 $(x, v) \in N^\varepsilon X$, 而 i 使得 $x \in U_i$, 由于 $\varepsilon \leqslant \varepsilon_{x_i}$, 我们有

$$(x, v) \in N^{\varepsilon_{x_i}}X\bigcap(U_{x_i} \times E) \subset W_{x_i}.$$

既然映射 can 实现从 W_x 到其像集上的一个微分同胚, 则上面的包含关系说明 can 是 $N^\varepsilon X$ 和其像集 $TUB^\varepsilon X$ 之间的局部微分同胚.

现在证明, 存在 $\varepsilon > 0$, 使得 can 在 $N^\varepsilon X$ 上是单射. 如果不然, 就不可能找到 $\varepsilon > 0$, 使得 can 在 $N^\varepsilon X$ 上是单射. 那么对于任意 n, 令 $\varepsilon_n = 1/n$, 存在 $N^{1/n}X$ 的不同的 p_n 和 q_n, 却有 $\mathrm{can}\,(p_n) = \mathrm{can}\,(q_n)$. 但是 p_n 和 q_n 包含在 $X \times \overline{B}(0,1)$ 里, 特别是包含在一个紧致集里. 于是存在 (p_n) 和 (q_n) 的子序列, 分别收敛到 p 和 q. 由于 $p_n \in N^{1/n}X$, p_n 表示为

$$p_n = (x_n, u_n), \text{其中} \ \| u_n \| < \frac{1}{n}.$$

令 n 趋于无穷, 我们看到 p 有形式 $(x, 0)$, 而 q 有形式 $(y, 0)$. 由于 can 是连续的, 所以我们有

$$\mathrm{can}\,(p) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{can}\,(p_n) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{can}\,(q_n) = \mathrm{can}\,(q).$$

于是 $f(x) = f(y)$.

但是由假设, f 是一个嵌入, 故 f 是单射, 于是 $x = y$. 由于 can 在 $(x, 0)$ 的一个邻域内是微分同胚, 而当 n 充分大时, p_n 和 q_n 将在 $(x, 0) = p = q$ 的这个邻域里, 由假设 $\mathrm{can}\,(p_n) = \mathrm{can}\,(q_n)$ 应该得到 $p_n = q_n$, 这是荒谬的.

于是找到一个 $\varepsilon > 0$ 回答了对于 can 提出的问题: can 限制在 $N^\varepsilon X$ 上是单射的和平展的. 由此就可以推出对于任意 $\varepsilon' < \varepsilon$, can 是整个 $N^{\varepsilon'}X$ 上的一个嵌入. 为了证明, 只需利用定理 2.6.12 的证明技巧, 并且注意到 $\overline{N}^{\varepsilon'}X \subset N^\varepsilon X$ (作为 $X \times \mathbf{R}^n$ 的紧致集 $X \times \overline{B}(0, \varepsilon)$ 的闭子集) 是一个紧致集. 于是 $(\mathrm{can}\,|_{\overline{N}^{\varepsilon'}X})^{-1}$ 是连续的, 自然 $(\mathrm{can}\,|_{N^{\varepsilon'}X})^{-1}$ 也是连续的.

2.7.13 例子

我们在 10.2.3.12 将会碰到特殊情形 $d = 1, n = 3$, 其称谓是槽形曲面; 在 10.2.3.11 将会碰到特殊情形 $d = 2, n = 3$ (平行曲面, 还可以参见 10.6.8).

2.8 习 题

2.8.1 对于下面定义的各个集合, 判断它们是否是子流形. 在肯定回答的情形,

给出最大可能的 p, 使得这个子流形是 C^p 类的:

$$\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 : x^3+y^3+z^3-3xyz=1\};$$
$$\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 : x^2+y^2+z^2=1, \text{并且 } x^2+y^2-x=0\};$$
$$\{(t,t^2) : t\in\mathbf{R}_-\}\bigcup\{(t,-t^2) : t\in\mathbf{R}_+\};$$
$$\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 : x=0 \text{ 或 } y=0\};$$
$$\{(t^2,t^3)\in\mathbf{R}^2 : t\in\mathbf{R}\};$$
$$\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 : y=|x|\};$$
$$\left\{\left(\cos t, \cos\frac{t}{3}+\sin\frac{t}{3}\right)\in\mathbf{R}^2 : t\in\left(0, 4\pi+\frac{3\pi}{4}\right)\right\}.$$

2.8.2 验证 S^2 的形如

$$(x,y)\mapsto(x,y,\sqrt{1-x^2-y^2})$$

的参数表示的相容性.

2.8.3 利用 2.1.2 的条件, 用多种方式证明, 如果 $V\subset\mathbf{R}^n$ 和 $W\subset\mathbf{R}^m$ 是子流形, 则 $V\times W\subset\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^m=\mathbf{R}^{n+m}$ 是子流形.

2.8.4 证明

$$\{(\cos(\sqrt{2}t)(2+\cos t), \sin(\sqrt{2}t)(2+\cos t), \sin t)\in\mathbf{R}^3 : t\in\mathbf{R}\}$$

不是 $\mathbf{R}^3$ 的一个子流形. 证明这个子集在子集 (环面)

$$\{(\cos t(2+\cos s), \sin t(2+\cos s), \sin s)\in\mathbf{R}^3 : s\in\mathbf{R}, t\in\mathbf{R}\}$$

内处处稠密.

2.8.5 a) 借助由

$$\begin{aligned}F(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6)=(&2x_1x_2-x_6^2, 2x_2x_3-x_4^2, 2x_3x_1-x_5^2,\\ &x_4x_5-\sqrt{2}x_3x_6, x_5x_6-\sqrt{2}x_1x_4, x_4x_6-\sqrt{2}x_2x_5)\end{aligned}$$

定义的映射 $F:\mathbf{R}^6-\{0\}\to\mathbf{R}^6$, 证明

$$\{(x^2,y^2,z^2,\sqrt{2}yz,\sqrt{2}zx,\sqrt{2}xy)\in\mathbf{R}^6 : x\in\mathbf{R}, y\in\mathbf{R}, z\in\mathbf{R}\}$$

是 $\mathbf{R}^6$ 的一个子流形.

b) 再证明

$$\{(x^2,y^2,z^2,\sqrt{2}yz,\sqrt{2}zx,\sqrt{2}xy)\in\mathbf{R}^6 : x^2+y^2+z^2=1\}$$

是 $\mathbf{R}^6$ 的一个子流形.

c) 证明对于所有的 n:

$$\{(\underbrace{\cdots,x_i^2,\cdots}_{n};\underbrace{\cdots,\sqrt{2}x_ix_j,\cdots}_{n(n-1)/2})\in\mathbf{R}^{n(n+1)/2}:x_1^2+\cdots+x_n^2=1\}$$

是 $\mathbf{R}^{n+n(n-1)/2}=\mathbf{R}^{n(n+1)/2}$ 的一个子流形.

d) 对于

$$\{(\underbrace{\cdots,|z_i|^2,\cdots}_{n};\underbrace{\cdots,\sqrt{2}\mathrm{Re}\,(z_i\overline{z}_j),\cdots}_{n(n-1)/2};\underbrace{\cdots,\sqrt{2}\mathrm{Im}\,(z_i\overline{z}_j),\cdots}_{n(n-1)/2})$$
$$\in\mathbf{R}^{n^2}:|z_1|^2+\cdots+|z_n|^2=1\}$$

证明同样问题. 其中, 对于复数 z, $|z|$ 表示其模 (对应地 $\mathrm{Im}(z)$ 和 $\mathrm{Re}(z)$ 表示虚部和实部).

e) 同问题 d), 只是复数用四元数代替.

2.8.6 详细证明2.2.10.3

2.8.7 球极投影

设 i_N 和 i_S 是分别对于极 $N=(0,0,1)$ 和 $S=(0,0,-1)$ 的反演, 把 $S^d-\{N\}$ (对应地 $S^d-\{S\}$) 映射到 $\mathbf{R}^{d+1}$ 的平面 $x_{d+1}=0$. 明确表示 i_N 和 i_S, 证明它们是 S^d 的 C^∞ 图册, 并且给出 S^d 的通常流形结构.

2.8.8 格拉斯曼 (流形)

a) 证明 $\mathbf{R}^d$ 的 k 个向量的线性无关组的集合 $V_{k,d}$ 是 $(\mathbf{R}^d)^k$ 的一个开子集.

b) 把生成 $\mathbf{R}^d$ 的同一子空间的向量组视作等同, 这样得到一个等价关系, 设 $G_{k,d}$ 是 $V_{k,d}$ 关于这一等价关系的商集. 证明 $G_{k,d}$ 配备商拓扑是一个可分离的紧致空间这样, $G_{k,d}$ 等同于 $\mathbf{R}^d$ 的 k 维向量子空间的集合. (对于可分离性, 证明对于 $G_{k,d}$ 的不同点的每个配对 (X,Y), 存在一个在 $G_{k,d}$ 上连续的实值函数 ρ, 使得 $\rho(X)\neq\rho(Y)$. 对于紧致性, 考虑 $V_{k,d}$ 的由 k 个向量的规范正交组构成的子空间 $\widetilde{V}_{k,d}$, 正交性是对于 $\mathbf{R}^d$ 的典范欧几里得结构而言的. 证明 $\widetilde{V}_{k,d}$ 是紧致的, 并且构造一个从 $\widetilde{V}_{k,d}$ 到 $G_{k,d}$ 上的连续映射.) $G_{k,d}$ 称为格拉斯曼 (流形).

c) 设 X 是 $G_{k,d}$ 的一个元素, 而 U_X 是 $G_{k,d}$ 的满足 $Y\bigcap X^\perp=\{0\}$ 的 Y 的集合, 依下列方式定义从 U_X 到 $\mathscr{L}(X,X^\perp)$ 的一个映射 T_x: 如果 $Y\in U_X$, 并且 $x\in X$, 则 $T_{X_0}(Y)\cdot x$ 是 Y 的满足 $\pi(z)=x$(π 是在 X 上平行于 $X^\perp$ 的投影) 的唯一向量 z 平行于 X 的在 $X^\perp$ 上的投影. 证明 T_{X_0} 是从 U_X 到 $\mathscr{L}(X,X^\perp)$ 上的同胚. 可以如此着手: 设 $(x^i)_{1\leqslant i\leqslant k}$ 是 X 的一个正交基底, 而 $y^i(Y)$ 是 Y 的唯一满足 $\pi(y^i(Y))=x^i$ 的向量. 我们有 $y^i(Y)=x^i+T_X(Y)\cdot x^i$. 证明映射 $Y\to y^i(Y)$ 是连续的.

d) 证明 $(U_X,T_X)_{X\in G_{k,d}}$ 是 $G_{k,d}$ 上的 C^∞ 图册, 并且这样获得的 $G_{k,d}$ 的流形拓扑与 $V_{k,d}$ 的商拓扑是同样的.

2.8.9 设 H 是方程为

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant d} a_{ij}x_ix_j + \sum_{i=1}^{d} b_ix_i = 1$$

的超二次曲面, 对称矩阵 (a_{ij}) 是可逆的 (即 H 是 "有心超二次曲面"). 证明 H 是 $\mathbf{R}^d$ 的 $d-1$ 维 C^∞ 子流形, 并且 C^∞ 微分同胚于 $S^k\times\mathbf{R}^{d-k-1}$, $d-k$ 是与矩阵 (a_{ij}) 关联的二次型的指标 (负平方项的个数).

2.8.10 在这个习题和下一个习题里, E 表示一个 d 维实欧几里得空间, 用 $\mathrm{End}\,(E)$ 表示从 E 到 E 内的线性映射 u 的集合. 一般线性群 $GL(E)$ 是可逆线性映射的集合, 用 $SL(E)$ 表示行列式为 1 的 u 的集合, 用 $O(E)$ 表示满足条件 ${}^tu\cdot u=1$ 的 u 的集合. 证明 $GL(E)$, $SL(E)$ 及 $O(E)$ (正交群) 是 $\mathrm{End}\,(E)$ 的子流形, 并且计算它们的维数.

2.8.11 1° 设 $u\in\mathrm{End}\,(E)$, 证明级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{u^n}{n!}$ 依范数收敛, 用 $\exp u$ 表示级数的和.

a) 证明 $\det(\exp u)=\mathrm{e}^{\mathrm{Tr}\,(u)}$, 并且如果 u 和 v 是可交换的, 则有 $\exp(u+v)=\exp u\cdot\exp v$.

b) 证明 $u\mapsto\exp u$ 是 $\mathrm{End}\,(E)$ 到 $GL(E)$ 内的 C^∞ 映射.

c) 利用局部逆映射定理, 证明存在 0 在 $\mathrm{End}\,(E)$ 里的一个邻域 V, 0 在迹为 0 的映射组成的子空间里的一个邻域 V', 和 0 在满足 ${}^tu+u=0$ 的映射组成的子空间里的一个邻域 V'', 使得 $\exp|_V$, $\exp|_{V'}$ 和 $\exp|_{V''}$ 是 V (对应的, V', V'') 在 I 的含于 $GL(E)$ (对应的, $SL(E)$, $O(E)$) 的一个邻域上的参数表示. 如此重新得到 2.8.10 关于维数的结果.

2° 设 $S(E)$ 是 $\mathrm{End}\,(E)$ 的由对称映射 u 组成的子空间, 而 $S^+(E)$ 是与 u 关联的二次型的正定的对称映射 u 的集合.

a) 证明 $S^+(E)$ 是 $S(E)$ 里的开集, 并且映射 $u\mapsto u^2$ 是 $S^+(E)$ 到其自身上的 C^∞ 微分同胚.

b) 构造一个从 $GL(E)$ 到 $S^+(E)\times O(E)$ 上的 C^∞ 微分同胚.

2.8.12 设 $G\subset\mathrm{Diff}\,(X)$ 是无不动点真不连续的, $p:X\to X/G$, 而 Y 是一个流形. 证明

$$f\in C^p(X/G;Y)\Leftrightarrow f\circ p\in C^p(X;Y).$$

2.8.12.1

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ {\scriptstyle p}\downarrow & \searrow^{f\circ p} & \\ X/G & \xrightarrow[f]{} & Y \end{array}$$

2.8.13 设 $\mathbf{R}^2=\mathbf{C}$ (复数域), 映射 $z\mapsto z^3$ 是 $\mathbf{C}$ 到 $\mathbf{C}$ 的一个覆叠映射吗?

2.8.14 设 $X = \mathbf{R}^2 - \{0\}$, G 是由 $x \mapsto -x$ 生成的含两个元素的群. 证明 G 作为无不动点真不连续在群作用在 X 上. 证明商集 X/G 微分同胚于 X.

2.8.15 考虑 $S^{2d-1} \subset \mathbf{R}^{2d} = \mathbf{C}^d$, 又设 $(q_1, \cdots, q_d)$ 是带正负号的整数. 考虑由

$$(z_1, \cdots, z_d) = \left(\exp\left(\frac{2i\pi}{q_1}\right) z_1, \cdots, \exp\left(\frac{2i\pi}{q_d}\right) z_d\right)$$

定义的映射 $g : \mathbf{C}^d \to \mathbf{C}^d$.$G$ 是由 g 生成的群, 能否用定理 2.4.9 的方法给 S^{2d-1}/G 配备一个流形结构?

2.8.16 设 U 是 O 在 $\mathbf{R}^d$ 内的一个邻域. 在流形 $U \times P^{d-1}(\mathbf{R})$ 里, 设 U' 是这样的点 (x, z) 的子集, 对于 z 的一个齐次坐标组 $(z_1, \cdots, z_d)$, 对于所有指标配对 (j, k), 我们有 $x_j z_k - x_k z_j = 0$(在这种情形下, 这些关系对于 z 的所有齐次坐标组都成立).

a) 证明 U' 是 $U \times P^{d-1}(\mathbf{R})$ 的 d 维闭子流形.

b) 设 π_U 是 $U \times P^{d-1}(\mathbf{R})$ 在 U 上的投影在 U' 上的限制. 证明 $\pi_U^{-1}(0)$ 是 U' 的一个微分同胚于 $P^{d-1}(\mathbf{R})$ 的子流形, 而 π_U 在 $U' - \pi_U^{-1}(0)$ 上的限制是从这个开集到 $U - \{0\}$ 上的一个微分同胚.

2.8.17 对于一个 C^∞ 类的流形, 用 $C^\infty(X)$ 表示 C^∞ 函数, $X \to \mathbf{R}$ 的 $\mathbf{R}$- 代数, 并且用 $V(X)$ 表示 X 上的 C^∞ 向量场的 $\mathbf{R}$-向量空间, 这里的 C^∞ 向量场, 即是 C^∞ 态射 $\xi : X \to TX$, 满足条件 $p \circ \xi = \mathrm{id}_X$(参见 3.5.1). 一个 $\mathbf{R}$-线性映射 $D : C^\infty(X) \to C^\infty(X)$, 满足条件: 对于任意 $f, g \in C^\infty(X) : D(f \cdot g) = Df \cdot g + f \cdot Dg$, 所有这样的映射 D 称为 $C^\infty(X)$ 的导子; 这些映射的集合记作 $\mathrm{der}\,(C^\infty(X))$. 在学习 4.2.13 和 5.2.9 之后才来做这个习题.

I

1) 设 $\xi \in V(X)$, $f \in C^\infty(X)$, 对于所有 $x \in X$, 用 $(\mathrm{d}\,f(\xi))(x) = \mathrm{d}\,f(x)(\xi(x))$ 定义 $\mathrm{d}\,f(\xi) = \xi(f) \in C^\infty(X)$. 证明 $f \mapsto \xi(f)$ 属于 $\mathrm{der}\,(C^\infty(X))$. 在部分 I 里, 我们打算证明: 反之, 所有 $D \in \mathrm{der}\,(C^\infty(X))$, 都由某个 $\xi \in V(X)$ 用前面的方式得到. 设 $U \in O(\mathbf{R}^d)$, 而 $x_1, \cdots, x_d$ 是 $\mathbf{R}^d$ 上的典范坐标,

$$\xi = \sum a_i \frac{\partial}{\partial x_i}, a_i \in C^\infty(U),$$

是 U 上的向量场: 计算 $\xi(f)$.

2) 设 $D \in \mathrm{der}\,(C^\infty(X))$, 证明: 如果 f 是 X 上的一个常数, 则 $Df = 0$.

3) (局部化) 设 $D \in \mathrm{der}\,(C^\infty(X))$, 证明: 如果 $f, g \in C^\infty(X), U \in O(X)$, 满足 $f|_U = g|_U$ 则 $Df|_U = Dg|_U$.

4) 设 $U \in (\mathbf{R}^d)$, $x_1, \cdots, x_d$ 是 $\mathbf{R}^d$ 上的典范坐标; 若

$$D \in \mathrm{der}\,(C^\infty(X)), \quad u \in U,$$

证明对于所有 $f \in C^\infty(U)$ 有

$$(Df)(u) = \sum_i (Dx_i)(u) \frac{\partial f}{\partial x_i}(u).$$

由此推出存在 $\xi \in V(U)$, 使得对于任何 $f : Df = \xi(f)$.

5) 设 X 是任意流形, $D \in \mathrm{der}\,(C^\infty(X))$. 证明存在 $\xi \in V(X)$, 使得对于任何 $f \in C^\infty(X)$, 有 $Df = \xi(f)$.

II

1) 设 X 是一个流形, 而 $\xi, \eta \in V(X)$. 证明映射

$$f \mapsto \xi(\eta(f)) - \eta(\xi(f))$$

属于 $\mathrm{der}\,(C^\infty(X))$. 今后我们把在 I 中与 f 关联的 y 记作 $[\xi, \eta]$, 并且称之为向量场 ξ 和 η 的括号积.

2) 设 $\xi, \eta, \zeta \in V(X)$, 证明 $[\xi, [\eta, \zeta]] + [\eta, [\zeta, \xi]] + [\zeta, [\xi, \eta]] = 0$.

3) 设 $U \in \theta(\mathbf{R})$, 给定 $V(U)$ 的两个元素

$$\xi = \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \eta = \sum_i b_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad a_i, b_i \in C^\infty(U),$$

计算

$$[\xi, \eta] = \sum_i c_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

中的系数 c_i.

4) 设 Y 是 X 的一个子流形, $\xi, \eta \in V(X)$ 满足条件: 对于 Y 中的所有 y, 都有 $\xi(y)$ 和 $\eta(y) \in T_yY$. 证明对于 Y 中的所有 y, 都有 $[\xi, \eta](y) \in T_yY$, 有关这个命题的逆参见 3.5.15 (弗罗贝尼乌斯定理)

2.8.18 设 $X \subset Y$ 和 $X' \subset Y'$ 是子流形, 证明 $X \times X' \subset Y \times Y'$ 也是子流形.

2.8.19 给出 2.6.6 和 2.6.7 的详细证明.

2.8.20 设 X 是一个 C^p 类 d 维流形, $x \in X$, $U \in O_x(X)$, k 个函数 $f_i \in C^p(U)$ $(i = 1, \cdots, k)$ 的微分在 x 是线性无关的. 证明存在一个在 x 的坐标卡, 使得 f_i 是前 k 个局部坐标.

2.8.21 设 Ω 是由可逆矩阵组成的 2×2 实矩阵空间的开集, 而 G 是其行列式为 1 的矩阵的集合. 证明 G 是 Ω 的 C^∞ 子流形, 并且从 G 到 G 内的映射 $M \mapsto M^{-1}$ 和从 G^2 到 G 内的映射 $(M, N) \mapsto M \cdot N$ 是态射.

2.8.22 证明 $\mathbf{R}^3$ 的子集 $V = \{(t\cos z, t\sin z, z), t \in \mathbf{R}, z \in \mathbf{R}\}$ 是 $\mathbf{R}^3$ 的子流形. 设 $p : \mathbf{R}^3 \ni (x, y, z) \mapsto (x, y) \in \mathbf{R}^2$ 是典范投影. $p|_V$ 是一个浸没吗?

2.8.23 证明不存在从 S^1 到 $\mathbf{R}$ 内的 C^r 嵌入 (r 是正数或零). 存在从 S^1 到 $\mathbf{R}$ 内的 C^1 浸入吗?

2.8.24 设 X 是一个 d 维连通流形, Y 是它的一个余维数大于或等于 2 的闭子流形. 证明 $X-Y$ 是连通的.

2.8.25 证明公式 $h(u,v)=(2\mathrm{Re}\,(u\bar{v}),2\mathrm{Im}\,(u\bar{v}),|u|^2-|v|^2)$ (u 和 v 是复数, 满足条件 $|u|^2+|v|^2=1$) 定义一个从 S^3 到 S^2 内的 C^∞ 映射, 并且对于 S^2 的每个点 x, 存在包含 x 的一个开集 U 和一个从 $U\times S^1$ 到 $h^{-1}(U)$ 上的一个微分同胚 φ, 使得对于 U 的任意 y 和 S^1 内的任意 z 都有 $h(\varphi(y,z))=y$. 特别地, h 是一个浸入 (在 S^2 上可以利用与北极和南极的反演关联的坐标卡).

借助四元数, 寻找一个从 S^7 到 S^4 内的具有类似性质的映射.

2.8.26 在 $\mathbf{C}^{d+1}-\{0\}$ 里, 我们说两个 $(d+1)$ 元组 x 和 y 以 $\mathscr{R}$ 为模是等价的, 如果存在非零复数 λ, 使得 $x=\lambda y$. $\mathbf{C}^{d+1}-\{0\}$ 对于这个等价关系的商集称为 d 维 (复) 射影空间, 记作 $P^d(\mathbf{C})$. 如果 $X\in P^d(\mathbf{C})$, 而 $p:\mathbf{C}^{d+1}-\{0\}\to P^d(\mathbf{C})$ 是过渡到商集的映射, 那么一个使得 $p(x)=X$ 的 $(d+1)$ 元组 x 称为 X 的一个齐次坐标组.

a) 证明存在一个借助齐次坐标明晰表示的 C^∞ 图册, 从而在 $P^d(\mathbf{C})$ 上定义一个 $2d$ 维 (实) 紧致流形结构, 并且 p 对于它是一个浸没.

b) 同样的问题, 只不过 $\mathbf{C}$ 换成四元数域 $\mathbf{H}$; 记号: $P^d(\mathbf{H})$.

2.8.27 a) 沿用 2.8.26 的记号.

设 π 是 $\mathbf{C}^{d+1}-\{0\}$ 在 $P^d(\mathbf{C})$ 上的典范映射在 S^{2d+1} 上的限制, 这里 S^{2d+1} 看做是满足 $\sum\limits_{i=1}^{d+1}|u_i|^2=1$ 的 $(d+1)$ 元复数组 $(u_1,\cdots,u_{d+1})$ 的集合. 证明对于 $P^d(\mathbf{C})$ 的每个 X, 存在一个包含 X 的开集 U 和从 $U\times S^1$ 到 $\pi^{-1}(U)$ 上的一个微分同胚 φ, 使得对于 U 内的所有 y 和 S^1 内的所有 z, 都有 $\pi(\varphi(y,z))=y$.

b) 叙述和证明对于 $P^d(\mathbf{H})$ 的类似性质.

2.8.28 借助 2.8.26, 利用 2.6.13.2 的技巧证明习题 2.8.5 的结果 b),c),d).

2.8.29 设 $X\subset E$ 是欧几里得空间 E 的子流形, $\varepsilon>0$ 使得 $\mathrm{can}\in\mathrm{Diff}\,(N^\varepsilon X;TUB^\varepsilon X)$. 证明 $TUB^\varepsilon X=\{y\in E:\mathrm{d}\,(y,X)<\varepsilon\}$, 其中 $\mathrm{d}\,(y,X)=\inf\{\|y-z\|:z\in X\}$. 这里的 ε 能用任意 ε 代替吗?

2.8.30 设 $p:\mathbf{R}^{n+1}-\{0\}\to P^n(\mathbf{R})$ 是典范投影 (参见 2.4.12.2). 证明 $n+1$ 个映射

$$c_i:\mathbf{R}^n\ni(x_1,\cdots,x_n)\mapsto p(x_1,\cdots,x_i,1,x_{i+1},\cdots,x_n)\in P^n(\mathbf{R})\quad(i=0,\cdots,n)$$

使得 $n+1$ 个配对 $(c_i(\mathbf{R}^n),c_i^{-1})$ 形成 $P^n(\mathbf{R})$ 的一个图册 (参见习题 2.8.26 对于复数的情形).

第三章　单位分解. 密度. 曲线

在以阐明动机为目的, 证明了所有紧致流形嵌入到 $\mathbf{R}^n$ 之后 (3.1.1), 我们就将流形概念限制到这样的流形: 它们是紧致集的可数并集 (3.1.6). 接着本章就致力于开发在流形上工作所必须的分析工具: 最重要的工具是由单位分解构成的 (3.2.4).

借助单位分解, 我们定义流形上的密度概念并且证明它们的存在性 (3.3.8). 由此推出在一个流形上存在一族测度, 称为勒贝格测度 (3.3.11). 尽管一个流形一般不具备典范勒贝格测度, 零测度集的概念可以内蕴地在流形上定义 (3.3.13).

为了说明密度的应用, 我们证明了所有连通的一维流形是直线或圆周 (3.4.1).

最后引入的工具是流形上的向量场: 紧致流形的情形是特别令人感兴趣的 (3.5.13), 并且将在莫泽定理 (7.2.3) 的证明中得到典型的应用.

3.1　紧致流形的嵌入

3.1.1　定理

设 X 是一个紧致的 d 维抽象流形. 则存在一个整数 n 及从 X 到 $\mathbf{R}^n$ 内的一个

嵌入.

于是所有紧致流形微分同胚于 $\mathbf{R}^n$ 的一个子流形. 根据 2.6.12, 只需找到一个整数 n 和从 X 到 $\mathbf{R}^n$ 内的一个映射 F, F 是单射, 并且是一个浸入. 我们首先需要:

3.1.2 引理

*设 $x \in X$, 则存在 X 的使得 $x \in W_x \subset V_x$ 的两个开集 V_x 和 W_x 以及一个从 X 到 $\mathbf{R}$ 内的函数 f, 它是 C^p 态射, 在 $X - V_x$ 上为零, 在 W_x 上等于 1, 并且若 $z \in V_x - \overline{W}_x$, 则 $0 < f(z) < 1$. 换句话说, f 是一个在 x 的*普拉托函数.

由于引理所述性质在 $\mathbf{R}^d$ 成立, 所以只需通过坐标卡过渡到 $\mathbf{R}^d$. 事实上, 设在 $\mathbf{R}^d$ 里, g 是一个 C^∞ 函数, 在 $B(0,1)$ 上等于 1, 在 $\mathbf{R}^d - \overline{B}(0,2)$ 上为零, 并且对于 $\mathbf{R}^d$ 的所有 t, $0 \leqslant g(t) \leqslant 1$, 如果 $t \in B(0,2) - \overline{B}(0,1)$, 不等式是严格的.有关这样的 g 的存在性, 参见 0.2.16.

设 (U,φ) 是 X 在 x 的一个坐标卡, 实数 λ 使得 $B(0,3) \subset \lambda\varphi(U)$. 对于所有 $x \in U$, 令 $\psi(x) = \lambda\varphi(x)$.配对 (U,ψ) 是一个与图册相容的坐标卡, 并且使得 $B(0,3) \subset \psi(U)$. 由于 ψ 是从 U 到 $\psi(U)$ 上的一个同胚, 故可以取 $V_x = \psi^{-1}(B(0,2))$ 和 $W_x = \psi^{-1}(B(0,1))$. 这是 X 的开集, 并且 $x \in W_x \subset V_x$. 定义从 X 到 $\mathbf{R}$ 内的函数 f: 在 U 上, $f = g \circ \psi$, 而在 $X - U$ 上 $f = 0$. 我们已经有 $0 \leqslant f \leqslant 1$. 再者, 在 $W_x = \psi^{-1}(B(0,1))$ 上, 我们有 (由于 $W_x \subset U$):

$$f(y) = g(\psi(y)) = 1 \quad (\text{因为}\psi(y) \in B(0,1)).$$

如果 $y \in X - V_x$, 那么或者 $y \notin U$, 这时 $f(y) = 0$; 或者

$$y \in U, \text{但由于} y \notin V_x = \psi^{-1}(B(0,2)),$$

则有 $\psi(y) \notin B(0,2)$, 于是 $f(y) = g(\psi(y)) = 0$. 不等式 $0 < f(y) < 1$ 在 $V_x - \overline{W}_x$ 上自然成立.

最后, f 在 $X - \overline{V}_x$ 上是零, 故是 C^∞ 类的, 而在 U 上, $f = g \circ \psi$ 是 C^p 类的.X 的开集 U 和 $X - \overline{V}_x$ 覆盖 X, 故 f 是 C^p 类的. 注意到 $X - \overline{V}_x$ 是开集, 这是因为 X 是具有分离性的: 参见 2.2.11 的证明.

现在证明定理 3.1.1 对于 X 的每个点, 我们关联引理 3.1.2 提供的开集 W_x 和 V_x. X 被 $\{W_x : x \in X\}$ 覆盖, 于是由于 X 的紧致性, 则存在有限个点 $x_1, \cdots, x_n$, 使得 $X = \bigcup_{k=1}^n W_{x_k}$. 设 f_i 是与在 x_i 的坐标卡 (U_i, φ_i) 以及开集 V_{x_i} 和 W_{x_i} 关联的普拉托函数 (像在引理证明中那样的). 用

$$F(x) = (f_1(x), \cdots, f_n(x), f_1(x)\varphi_1(x), \cdots, f_n(x)\varphi_n(x))$$

定义从 X 到 $\mathbf{R}^{n(d+1)}$ 内的一个映射 F.

首先必须验证 F 有意义. 事实上, 虽然 φ_i 仅定义在 U_i 上, 但是由于 $\operatorname{supp}(f_i) \subset U_i$, 所以 $f_i\varphi_i$ 以显然的方式定义在整个 X 上 (证明类似 3.1.2 证明中使用过的). 现

在我们可以断言 F 实现了我们寻找的嵌入. 为此要验证 F 是一个 C^p 类的单射的浸入.

我们已经得到 F 是单射, 因为如果 $F(x)=F(y)$, 且 i_0 使得 $x\in W_{x_{i_0}}$, 我们有 $f_{i_0}(x)=1$, 于是 $f_{i_0}(y)=1$, 考虑到 f_{i_0} 的形式, 这蕴涵 $y\in W_{x_{i_0}}$. 因此有 x 和 y 都在 $U_{x_{i_0}}$ 里, 而等式 $f_{i_0}(x)\varphi_{i_0}(x)=f_{i_0}(y)\varphi_{i_0}(y)$ 蕴涵 $\varphi_{i_0}(x)=\varphi_{i_0}(y)$, φ_{i_0} 既然是单射, 必有 $x=y$.

由此只需证明 F 是一个浸入, 即对于任何 x, T_xF 是单射. 我们可以写出

$$TF=(Tf_1,\cdots,Tf_n,T(f_1\varphi_1),\cdots,T(f_n\varphi_n)),$$

只要 $T_x(f_k\varphi_k)$ 中有一个是单射, T_xF 就将是单射. 设 i 使得 $x\in W_{x_i}$, 我们断言 $T_x(f_i\varphi_i)$ 是单射. 事实上, 在 W_{x_i} 上, $f_i\varphi_i=\varphi_i$, 而 $T_x\varphi_i$ 是单射, 这是因为 φ_i 是一个坐标卡中的映射, $T_x\varphi_i$ 是微分同胚, 更是双射.

于是自然提出问题: 是否可以把任意抽象流形嵌入到一个空间 $\mathbf{R}^n$? 回答是否定的. 为此考虑下列概念:

3.1.3 定义

*如果拓扑空间 T 存在其子集的一个可数集 $\mathscr{B}$, 使得 T 的所有开集是 $\mathscr{B}$ 的某些元素的并集, 则称 T 是***可分的***. 也可以称 $\mathscr{B}$ 是拓扑的一个可数基底.*

3.1.4 例子

3.1.4.1 $\mathbf{R}^d$ 是可分的, 可以取 $\mathscr{B}=\{B(x,r):x\in\mathbf{Q}^d,r\in\mathbf{Q}\}$, 其中 $\mathbf{Q}$ 表示 $\mathbf{R}$ 的有理数集.

3.1.4.2 一个可数空间的拓扑子空间是可分的.

3.1.4.3 *$\mathbf{R}^n$ 的所有子流形是可分的.*

这个结果由前面两个例子和下列事实推出: $\mathbf{R}^n$ 的子流形拓扑是拓扑子空间的拓扑. 由此例可知非可分的流形不可能嵌入到 $\mathbf{R}^n$ 里, 因为一个微分同胚既然是同胚, 理应保持可分性.

而不可分的流形确实存在. 例如, 乘积 $\mathbf{R}\times E$, E 不可数, 并且配备在 2.2.10.5 引入的流形结构. 人们指出: $\mathbf{R}\times E$ 不是连通的; 我们将证明半直线不是可分的 (参见 2.2.10.6); 同样, 普吕弗曲面不是可分的, 参见习题 3.6.4. 但是, 对于嵌入到 $\mathbf{R}^n$ 里说来, 唯一的障碍是不可分性, 因为有:

3.1.5 定理

所有可分的抽象流形可以嵌入到一个 $\mathbf{R}^n$ 里.

这个结果的证明归功于惠特尼, 我们承认此结果, 证明比紧致情形更加困难, 例如参见 [11],63 页. 证明当中特别要用到可分流形上的单位分解, 我们马上建立其存在性, 今后会多次用到这个结果.

提醒注意, 分离性不蕴涵可分性.

为了避免怪异的流形, 我们约定

3.1.6 今后将默认地假定所有流形是分离的和可分的

3.1.7 切丛情形

事已至此, 我们应该验证如果 X 是一个满足约定 3.1.6 的流形, 那么它的切丛 TX 也应如此. 在 2.5.24, TX 已经以统一的方式捆绑在 X 上. 为此, 我们注意到, TX 是坐标卡的定义域的可数并集, 这是因为 X 正是这样的. 然而有:

3.1.7.1 如果一个流形 (不必预先假定是可分的) 是坐标卡的定义域的可数并集, 那么它是可分的. 事实上, $\mathbf{R}^n$ 是可分的, 而可数集的可数并集仍是可数的.

3.1.7.2 请读者验证如果 X 是一个可分的流形, 而 G 在 X 上是无不动点真不连续的 (参见 2.4.9), 则流形 X/G 是可分的.

3.2 单位分解

3.2.1 定义

设 $\mathscr{U}=\{U_i : i\in I\}$ 是拓扑空间 T 由开集 U_i 组成的一个覆盖. 我们称这个覆盖是**局部有限的**, 如果对于每个点 $x\in X$, 存在 T 的一个包含 x 的开集 U, 使得 U 仅与有限个 U_i 相交.

设 $\mathscr{U}=\{U_i : i\in I\}$ 和 $\mathscr{V}=\{V_j : j\in J\}$ 是两个覆盖, 如果对于 I 的每个 i, 存在 J 的 j, 使得 $U_i\subset V_j$, 则我们说 $\mathscr{U}$ 从属于 $\mathscr{V}$.

3.2.2 定义

设 X 是一个 C^p 类的流形. 设给定一族配对 $\{(U_i,\psi_i) : i\in I\}$, 使得诸 U_i 是 X 的开集, 并且覆盖 X, 而 ψ_i 是 X 到 $\mathbf{R}$ 内的 C^p 类函数. 如果满足下列公理:

(P.U.1) 对于 X 的所有 x 和 I 的所有 i, 我们有 $\psi_i(x)\geqslant 0$;

(P.U.2) $\psi_i(x)$ 的支集含于 U_i 内;

(P.U.3) $\mathscr{U}=\{U_i : i\in I\}$ 是 X 的局部有限的覆盖;

(P.U.4) 对于 X 的所有 x, $\sum\limits_{i\in I}\psi_i(x)=1$,

我们称 $\{(U_i,\psi_i) : i\in I\}$ 是 X 的**单位分解**.

3.2.3 注释

给定 X 的 x, 设包含 x 的开集 U 仅与有限个 U_i 相交, 根据 (P.U.2), 仅有限个 ψ_i 在 x 非零, 于是对于 X 的每个点, 出现在 (P.U.4) 的和是有定义的, 因为它仅涉及有限个非零项.

3.2.4 定理

设 X 是一个可分的及具有分离性的流形. 则对于 X 的每个开覆盖 $\mathscr{U}$, 存在一个从属于它的单位分解.

必须注意, 在这个陈述里,并未假定 $\mathscr{U}$ 是局部有限的. 我们把证明分为几步.

3.2.5 引理

设 X 是一个可分的流形. 则存在拓扑的一个可数基底 $\mathscr{B}=\{U_n : n\in\mathbf{N}\}$, 使得对于所有 n, $\overline{U}_n$ 是紧致集.

由于 X 是可分的, 存在其拓扑的可数拓扑基底 $\{W_n : n\in K\}$. 给定 X 的一个点 x 和 X 在 x 的一个坐标卡 (V,ψ). 由于 $\psi(V)$ 是局部紧致的 $\mathbf{R}^d$ 的开集, 所以存在 $\mathbf{R}^d$ 的一个包含 $\psi(x)$ 并且含于 $\psi(V)$ 的紧致邻域 L. 既然 ψ 实现从 V 到其像集上的一个同胚, 那么 $U=\psi^{-1}(\mathring{L})$ 是 X 的一个开集, 其闭包 $\overline{U}=\psi^{-1}(L)$ 是紧致的. 令 $\varphi=\psi|_U$, 则 (U,φ) 是 X 在 x 的一个坐标卡, 并且 $\overline{U}$ 是紧致的.

设 K' 是 K 中的这样的一些指标 n, 使得 W_n 含于一个坐标卡定义域 U 内, 而 U 的闭包是紧致的, 令 $\mathscr{B}'=\{W_n : n\in K'\}$. 如果 $n\in K'$, 则 $\overline{W}_n$ 是 $\overline{U}$ 的闭集, 从而是紧致的. 此外 $\mathscr{B}'$ 是可数的, 并且它是 X 的一个拓扑基底. 事实上, 设 S 是 X 的一个开集, 必须证明 S 是某些 W_n 的并集, 其中的 n 属于 K'. 如果 $x\in S$, 则存在 X 在 x 的一个坐标卡 (U,φ), 使得 $\overline{U}$ 是紧致的. 如果 $V\subset U$, 则 $\overline{V}$ 也是紧致的, 若有必要, 缩小 U, 可以设在 x 的坐标卡 (U_x,φ) 使得 $\overline{U}_x$ 是紧致的, 并且 $U_x\subset S$.

由于 U_x 是 X 的一个开集, 而 $\{W_n : n\in K\}$ 是 X 的可数拓扑基底, 于是存在 K 的子集 K_x, 使得

$$U_x=\bigcup_{n_x\in K_x} W_{n_x}.$$

但是这些指标 n_x 使得 $W_{n_x}\subset U_x$, U_x 的闭包是紧致的. 故事实上 $n_x\in K'$. 由于 S 是关联于 S 的元素 x 的 U_x 的并集, 终于得到 S 是 $\mathscr{B}'$ 的元素的并集, $\mathscr{B}'$ 确实是 X 的拓扑的一个基底.

3.2.6 引理

设 X 是一个可分的流形. 则存在 X 的子集的一个序列 $\{A_k : k\in\mathrm{N}\}$, 使得 $X=\bigcup\limits_{k\in\mathrm{N}} A_k$, A_k 是紧致的, 并且对于所有 k, $A_k\subset\mathring{A}_{k+1}$.

根据引理 3.2.5, 存在 X 的开集 U_n 的可数族, U_n 的闭包是紧致的. 令 $A_1=\overline{U}_1$. 给定 $x\in\overline{U}_1$, 存在 X 的包含 x 的一个开集 U, 随之存在指标集 I, 使得 $U=\bigcup\limits_{n\in I} U_n$. 由于这对于 $\overline{U}_1$ 的每个 x 成立, 最终产生由来自初始的可数族的 U_n 组成的 $\overline{U}_1$ 的一个覆盖. 既然 $\overline{U}_1$ 是紧致的, 从这个覆盖可以抽出一个有限覆盖, 即有一个指标 h_1, 使得

$$\overline{U}_1\subset A_1\subset\bigcup_{1\leqslant k\leqslant h_1} U_k.$$

或许可能 $h_1{=}1$, 由于我们希望得到一个序列 A_k, 它们的并集是 X, 我们令

$$A_2=\left(\bigcup_{1\leqslant k\leqslant h_1}\overline{U}_k\right)\bigcup\overline{U}_2.$$

用归纳法我们构造出紧致集的一个可数族 A_k, 满足

$$A_k \subset \mathring{A}_{k+1} \quad 和 \quad X = \bigcup_{k\in\mathbf{N}} A_k.$$

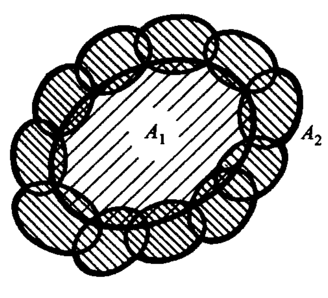


图 3.2.6

3.2.7 引理

对于 X 的每个覆盖 $\mathscr{U}$, 存在 X 的一个图册 $\{(V_k,\varphi_k): k\in K\}$, 使得覆盖 $\mathscr{V}=\{V_k: k\in K\}$ 从属于 $\mathscr{U}$, 是局部有限的, 对于所有 k, 我们有 $\varphi_k(V_k)=B(0,3)$, 并且 $\bigcup_{k\in K}\varphi_k^{-1}(B(0,1))=X$.

设 $x\in X$, (V,ψ) 是 X 在 x 的一个坐标卡, 使得 $B(0,3)\subset\psi(V)$(必要时利用 $\mathbf{R}^d$ 的一个位似变换). 令 $U=\psi^{-1}(B(0,3))$, $\varphi=\psi|_U$, 则配对 (U,φ) 是 X 在 x 的一个坐标卡, 使得 $\varphi(U)=B(0,3)$. 由于 $\mathscr{U}$ 是 X 的一个覆盖, 存在 $\mathscr{U}$ 的一个开集 W, 使得 $x\in W$, 一开始就要求 $V\subset W$, 则有

$$U\subset W.$$

设 $\{A_k: k\in\mathbf{N}\}$ 是引理 3.2.6 提供的紧致集序列. 则 $A_{k+1}-\mathring{A}_k$ 是紧致集中的闭集, 故是紧致集, 而 $\mathring{A}_{k+2}-A_{k-1}$ 是开集. 对于 $A_{k+1}-\mathring{A}_k$(认为 $A_{-1}=\varnothing$) 的每个 x, 可以找到中心在 x 的坐标卡 (V_x,φ_x), 使得

$$\varphi_k(V_k)=B(0,3),$$

并且 V_k 含于 $\mathscr{U}$ 的某个开集, 又含于 $\mathring{A}_{k+2}-A_{k-1}$ 内. 于是 $x\in\varphi_x^{-1}(B(0,1))$, 并且紧致集 $A_{k+1}-\mathring{A}_k$ 被有限个开集 $\varphi_x^{-1}(B(0,1))$ 覆盖. 由于

$$X=\bigcup_{k\in\mathbf{N}}A_k=A_1\bigcup\left(\bigcup_{k\in\mathbf{N}}(A_{k+1}-\mathring{A}_k)\right),$$

我们得到一些点 x, 与它们相应的 $\varphi_x^{-1}(B(0,1))$ 覆盖 A_1 或 $A_{k+1}-\mathring{A}_k$, 与这些 x 对应的 V_x 组成一个可数族, 记为 $\{V_r: r\in\mathbf{N}\}$, 而对于 $r\in\mathbf{N}$, 诸 (V_r,φ_r) 组成满足引理要求的图册.

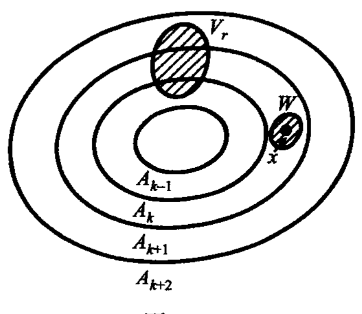


图 3.2.7

事实上, 这是一个图册, 因为它由坐标卡组成, 并且由构造过程可知诸 V_r 覆盖 X. 由于我们要求 V_r 含于 $\mathscr{U}$ 的某个开集, 故由 V_r 组成的覆盖 V 从属于 $\mathscr{U}$. 最后 $\mathscr{V}$ 是局部有限的. 我们可以要求序列 $\{A_k, k \in K\}$ 是严格增加的. 给定 X 的任意一个点 x, 存在 k, 使得 $x \in A_{k+1} - \mathring{A}_k$, 由于 $A_{k+1} - \mathring{A}_k$ 是一个开集, 存在 $W \in O_x(X)$, 使得 $W \subset \mathring{A}_{k+1} - A_k$. 由构造过程, V_r 含于某个 $\mathring{A}_{h+2} - A_{h-1}$, 于是

$$W \bigcap V_r \neq \varnothing$$

蕴涵 $h \in \{k-1, k, k+1\}$. 而含于 "皇冠" $\mathring{A}_{h+2} - A_{h-1}$ 内的 V_r 只有有限个, 故 W 仅与有限个 V_r 相交.

现在可以证明定理 3.2.4 了.

设 f 是 $\mathbf{R}^d$ 的普拉托函数, 它是 C^∞ 类的, $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$, 若 $x \in B(0,1)$, 则 $f(x) = 1$, 若 $x \notin B(0,2)$, 则 $f(x) = 0$. 设 (V_k, φ_k) 是引理 3.2.7 保证存在的图册中的一个坐标卡, 定义映射 θ_k 如下:

$$\text{在 } X - V_k \text{ 上 } \theta_k = 0, \quad \text{在 } V_k \text{ 上}, \ \theta_k = f \circ \varphi_k.$$

这个函数是 C^p 类的. 这是因为在 V_k 上, 作为 C^p 类函数 φ_k 和 C^∞ 类函数 f 的复合, θ_k 是 C^p 类的. 而在包含 $X - V_k$ 的开集 $X - \varphi_k^{-1}(\overline{B}(0,2))$ 上 θ_k 是零, 故是 C^p 类的. 对于 X 的每个 x, 存在 $W \in O_x(X)$, 使得 W 仅与有限个 V_k 相交, 因此仅有有限个 θ_k 非零. 由于 $\varphi_k^{-1}(B(0,1))$ 覆盖 X, X 的所有 x 在某个 $\varphi_k^{-1}(B(0,1))$ 内, 于是 $\theta_k(x)$ 是大于零的. 由此得到函数 $\theta(x) = \sum_k \theta_x(x)$ 是 C^p 类的, 并且是大于零的, 故由

$$\psi_k(x) = \frac{\theta_k(x)}{\theta(x)}$$

定义的函数 ψ_k 是 C^p 类的, 并且 ψ_k 的支集等于 θ_k 的支集, 从而含于 V_k (引理 3.2.7), 随之 ψ_k 的支集含于 $\mathscr{U}$ 的每个开集 U 内. 此外, 覆盖 $\{V_k, k \in \mathbf{N}\}$ 是局部有限的, 我们还有

$$0 \leqslant \psi_k(x) \leqslant 1 \quad \text{和} \quad \sum_k \psi_k(x) = 1.$$

3.3 流形上的密度

3.3.1 设 X 是一个 C^p 类流形, 我们用 $\mathrm{Dens}(X)$ 表示 $\mathrm{Dens}(T_xX), x \in X$ (参见 0.1.24) 的并集, 并且把 $\mathrm{Dens}(X)$ 称为 X 的密度丛. 投影 $p : \mathrm{Dens}(X) \to X$ 是 $\mathrm{Dens}(T_xX) \to \{x\}$ 的并集, 而一个映射 $\delta : X \to \mathrm{Dens}(X)$ 如果满足 $p \circ \delta = \mathrm{id}_X$, 换句话说如果对于所有 $x \in X, \delta(x) \in \mathrm{Dens}(T_xX)$, 则称 δ 为 X 上的密度. 用 $\Delta(X)$ 表示全体密度的集合.

3.3.2 如果 X 和 Y 是两个流形, $f \in C^p(X;Y)$ 是**平展的**, 而 $\delta \in \Delta(Y)$, 则根据 0.1.29.3 及 0.3.11, 密度 δ 的拉回像 $f^*\delta$ 是 X 上的密度, 并且总有

3.3.3
$$(g \circ f)^* = f^* \circ g^*.$$

3.3.3′ 对于 $X = U \in O(E)$, E 是向量空间, 上面的定义与 0.3.11.1 定义并非一致, 为了使它们一致, 必须通过 θ_x (参见 2.5.22.1) 把 T_xU 和 E 等同. 这就是为什么在 0.3.11.1 中的 Δ 加了下划线 .

3.3.4 设 X 是一个流形, (U, φ) 是 X 的一个坐标卡, 而 $\delta \in \Delta(X)$, 则根据 3.3.2 和通过 θ 的等同, 我们有 $(\varphi^{-1})^*\delta \in \underline{\Delta}(\varphi(U))$.

3.3.5 定义

设 X 是一个 C^p 类流形, $\delta \in \Delta(X)$, 如果对于 X 的所有坐标卡 (U, φ), 都有 $(\varphi^{-1})^*\delta \in \underline{\Delta}_q(\varphi(U))$, 则**称** δ **是** C^q **类的** $(0 \leqslant q \leqslant p-1)$.

3.3.6 在实际中, 只需对于一个图册的诸坐标卡验证 $(\varphi^{-1})^*\delta \in \underline{\Delta}_q(\varphi(U))$ 即可.

事实上, 只需验证如果 $(U, \varphi), (V, \psi)$ 是两个坐标卡, 满足条件 $V \supset U$ 及 $(\psi^{-1})^*\delta \in \underline{\Delta}_q(\psi(V))$, 则 $(\varphi^{-1})^*\delta \in \underline{\Delta}_q(\varphi(U))$. 这个结果立刻可由公式 0.3.11.3 应用到 $\psi \circ \varphi^{-1} = f$ 上, 由 (3.3.3) 得

$$(\varphi^{-1})^*\delta = (\psi \circ \varphi^{-1})^*((\psi^{-1})^*\delta).$$

设 $(\psi^{-1})^*\delta = b \cdot \delta_0$, 而 b 是 C^q 类的, $q \leqslant p-1$, 由于 f 是 C^p 类的, 故其雅可比行列式 $J(f)$ 是 C^{p-1} 类的, 将有

$$(\varphi^{-1})^*\delta = (b \circ f)|J(f)|\delta_0 \in \underline{\Delta}_q(\varphi(U)).$$

3.3.7 例子

设 $f : X \to Y$ 是一个态射, $\delta \in \Delta_q(Y)$, 则 $f^*\delta \in \Delta_q(X)$ (参见 3.3.3 和 3.3.8). 特别地, 当 $p : X \to Y$ 是一个覆叠映射时就是这种情形 (参见 2.4.1).

3.3.8 定理

设 X 是一个 C^p 类流形, $p \geqslant 1$. 则对于 $0 \leqslant q \leqslant p-1$, 存在 C^q 类密度, 它们的集合记作 $\Delta_q(X)$. 如果 $\delta, \delta' \in \Delta_q(X)$, 则存在 $g \in C^q(X; \mathbf{R}_+^*)$, 使得 $\delta' = g \cdot \delta$; 反之, 如果 $\delta \in \Delta_q(X)$, $g \in C^q(X; \mathbf{R}_+^*)$, 则 $g \cdot \delta \in \Delta_q(X)$.

设 $\{(U_k,\varphi_k,\psi_k)\}_{k\in K}$ 是单位分解, 其中每个 U_k 是 X 的一个坐标卡的定义域. 根据定理 3.2.4, 这样的单位分解是存在的. 用公式

3.3.9
$$\delta=\sum\psi_k\cdot\varphi_k^*\delta_0$$

定义 $\delta\in\Delta(X)$ (总是要注意 3.3.3, 至于 δ_0 的定义可参见 0.3.11). 由于 $\sum\limits_k\psi_k=1$, 对于 $\forall x\in X$, $\exists k$ 使 $\psi_k(x)>0$, 于是根据 0.1.29.2, 必然有 $\delta\in\Delta(X)$. 下面验证 $\delta\in\Delta_{p-1}(X)$. 把 3.3.6 应用到图册 $\{(U_k,\varphi_k)\}$, 并且根据 0.3.11.3, 对于任意 h,

$$\begin{aligned}(\varphi_h^{-1})^*\delta&=\sum_k(\varphi_h^{-1})^*(\psi_k\cdot\varphi_k^*\delta_0)\\&=\sum_k(\psi_k\circ\varphi_h^{-1})[(\varphi_k\circ\varphi_h^{-1})^*\delta_0]\\&=\sum_k(\psi_k\circ\varphi_h^{-1})\cdot\left|J(\varphi_k\circ\varphi_h^{-1})\right|\cdot\delta_0\\&=\left(\sum_k(\psi_k\circ\varphi_h^{-1})\cdot\left|J(\varphi_k\circ\varphi_h^{-1})\right|\right)\cdot\delta_0.\end{aligned}$$

乘在 δ_0 前面的函数正好是 C^{p-1} 类的.

定理的最后的断言涉及的是局部性的问题. 设 (U,φ) 是一个坐标卡, 考虑 $(\varphi^{-1})^*\delta',(\varphi^{-1})^*\delta$.我们有 $\delta'=g\cdot\delta$, $g:X\to\mathbf{R}_+^*$ (参见 0.1.29.1), 在 $\varphi(U)$ 上, $(\varphi^{-1})^*\delta'=a'\cdot\delta_0=(g\circ\varphi^{-1})\cdot a\cdot\delta_0$, 并且根据假设, $a,a'\in C^q(\varphi(U);\mathbf{R}_+^*)$, 于是 $a'=(g\circ\varphi^{-1})\cdot a$ 蕴涵 $g\circ\varphi^{-1}\in C^q(\varphi(U);\mathbf{R}_+^*)$, 于是 $g|_U\in C^q(U;\mathbf{R}_+^*)$. 而逆命题是平凡的.

3.3.10 注释

3.3.7 的结果, 特别指出一个流形上的密度远不是唯一的. 一个抽象流形可以没有任何密度. 反之, 在 6.6 节将看到欧几里得空间的子流形总具有典范密度.

我们有下列基本结果:

3.3.11 定理

设 X 是 C^p 类的, $\delta\in\Delta_0(X)$, 则 δ 确定 X 上的一个典范测度, 记作 $\mathrm{d}\delta$, 或者仍然记作 δ.

3.3.11.1 按照 0.4 节开头所说, 只需使 $\mathscr{K}(X)$ 上的一个正的线性形式 μ 典范地依附于 δ, 这是因为 X 是局部紧致的 (参见 2.2.11), 即它是紧致集的可数并集 (参见 3.1.6 和引理 3.2.6). 其实, 在 [6] 的 1.12.3 的开头, 要求 X 是可度量的, 这对于我们来说并不适宜. 一方面, [6] 之所有要求可度量性, 无非是为了有单位分解, 而这我们已经具有; 另一方面, 所有的流形都是可度量的. 例如这可以从 3.1.5 推导出来, 习题 3.6.3 提供了一个不用 3.1.5 的证明, 不过这个结果后面用不到.

3.3.11.2 首先对于这样的 $f\in\mathscr{K}(X)$ 定义 μ, $\operatorname{supp}f\subset U$, U 是一个坐标卡的

定义域. 如果 $(\varphi^{-1})^*\delta = a\delta_0$ (δ_0 是 $\mathbf{R}^d$ 的典范密度), 则令

3.3.11.3
$$\mu(f) = \int_{\varphi(U)} (f \circ \varphi^{-1}) a\delta_0.$$

由于 $(f \circ \varphi^{-1})a \in \mathscr{K}(\varphi(U))$, 并且是连续的 (定义 3.3.5), 所以积分有意义. 为了说明 $\mu(f)$ 只依赖于 f, 而不依赖坐标卡 (U,φ) 的选取, 设 (V,ψ) 是另一个坐标卡, 同样满足 $\operatorname{supp} f \subset V$. 设 $(\psi^{-1})^*\delta = b \cdot \delta_0$, 对于从 $\varphi(U)$ 到 $\psi(V)$ 上的微分同胚应用 0.4.6 和公式 0.3.11.3 即得

$$\int_{\varphi(U)} (f \circ \varphi^{-1}) \cdot a\delta_0 = \int_{\psi(V)} (f \circ \psi^{-1}) \cdot b\delta_0.$$

3.3.11.4 为了过渡到任意 $f \in \mathscr{K}(X)$, 跟 3.3.8 的证明一样, 只需取关联于坐标卡 (U_i, φ_i) 的单位分解 $\{(U_i, \varphi_i, \psi_i)\}_{i\in I}$, 并且令

3.3.11.5
$$\mu(f) = \sum_i \mu(\psi_i f).$$

由于 f 有紧支集, 根据 3.2.2 (P.U.3), 仅有限个函数 $\psi_i f$ 非零, 因此级数有意义. 公式 3.3.11.5 提供的 $\mu(f)$ 不依赖单位分解 $\{(U_i, \varphi_i, \psi_i)\}_{i\in I}$. 事实上, 设 $\{(V_i, \eta_i, \zeta_i)\}_{i\in I}$ 是另一个分解. 由于

$$\sum_i \psi_i = 1, \sum_j \zeta_j = 1,$$

和仅涉及有限个非零项, 而 μ 是可加的, 所以我们有

$$\sum_i \mu(\psi_i f) = \sum_i \mu\left(\psi_i\left(\sum_j \zeta_j f\right)\right) = \sum_i \mu\left(\sum_j \psi_i\zeta_j f\right) = \sum_{i,j} \mu(\psi_i\zeta_j f),$$
$$\sum_i \mu(\zeta_j f) = \sum_j \mu\left(\zeta_j\left(\sum_i \psi_i f\right)\right) = \sum_j \mu\left(\sum_i \psi_i\zeta_j f\right) = \sum_{i,j} \mu(\psi_i\zeta_j f).$$

(这里的计算在积分学里是经典的, 即所谓的 "测度的粘合", 参见 [6], 命题 1.15).

最后, μ 的正性由勒贝格测度的正性, 3.3.11.3 和 3.3.11.5 推导出来; 而线性性则平凡地由勒贝格测度的线性性得到.

3.3.12 定义

我们称由定理 3.3.11 从流形 X 的一个连续的 (即 C^0 类的) 密度诱导的一个测度为 X 上的**勒贝格测度**.

如果 $\mathrm{d}\,\delta', \mathrm{d}\,\delta$ 是 X 上的两个勒贝格测度, 根据 3.3.8, 我们有

$$\mathrm{d}\,\delta' = g \cdot \mathrm{d}\,\delta, \quad 且 \quad g \in C^0(X; \mathbf{R}_+^*).$$

由 0.4.4.3 得: 如果 $A \subset X$ 对于 $\mathrm{d}\,\delta$ 是零测度集, 则对于 $\mathrm{d}\,\delta'$ 亦如是, 由此得到

3.3.13 定义

如果流形 X 的一个子集 A 对于一个勒贝格测度是零测度的, 则说它是**零测度的**.

3.3.14 记号

设 X 是一个流形, 而 $\delta \in \varDelta_0(X)$. 我们把对于通过 3.3.11 与密度 δ 关联的测度是可积的 $X \to \mathbf{R}$ 的函数的空间记作 $C_\delta^{\text{int}}(X)$: 参见 0.4.1. 对于 $f \in C_\delta^{\text{int}}(X)$, 使用下列记号:

3.3.15
$$\mu(f) = \int_X f \cdot \delta = \int_X f \cdot \mathrm{d}\,\delta.$$

3.3.16 命题

设 X, Y 是两个流形, $f \in \operatorname{Diff}(X; Y)$, 而 ε 是 Y 上的一个连续密度, 又设 $\delta = f^*\varepsilon$ 是 ε 的拉回像 (连续) 密度 (参见 3.3.7). 则对于 $\forall b \in C_\delta^{\text{int}}(Y)$, 有 $b \circ f \in C_\delta^{\text{int}}(X)$, 并且

$$\int_X (b \circ f) \cdot \delta = \int_Y b \cdot \varepsilon.$$

用测度论的术语表达 ([6], 6.2.2), 此命题说的是在 Y 上关联于 ε 的测度是 X 上关联于 $\delta = f^*\varepsilon$ 的测度在 f 下的像. 此命题由 3.3.3 和 3.3.11 的同样证明得到.

3.3.17 例子

3.3.17.1 若 $f \in \operatorname{Diff}(X; Y)$, 而 A 是 X 内的零测度集, 则 $f(A)$ 是 Y 内的零测度集.

3.3.17.2 若 $Y \subset X$ 是一个子流形, $\dim Y < \dim X$, 则 Y 是 X 内的零测度集. 事实上, 用坐标卡 (U, φ) 的一个可数族覆盖 Y, 坐标卡 (U, φ) 满足 $\varphi(U \bigcap Y) = \varphi(U) \bigcap \mathbf{R}^e$ (参见定义 2.6.1), 这里 $\mathbf{R}^e \subset \mathbf{R}^d$, $d = \dim X, e = \dim Y$. 根据 0.4.4.3, $\varphi(U) \bigcap \mathbf{R}^e$ 在 $\varphi(U)$ 内对于一个测度 $a \cdot \delta_d$ 是零测度集, 或者说对于勒贝格测度也是零测度集. 再应用 0.4.4.1 和 3.3.17.1 即得结论.

3.3.17.3 命题

设 X 和 Y 是维数相同的两个流形, $f \in C^1(X; Y)$, 并且 A 在 X 内是零测度集, 则 $f(A)$ 在 Y 内也是零测度集.

借助 0.4.4.1 和坐标卡, 可以假定 $X = U \in O(\mathbf{R}^n), Y = \mathbf{R}^n$, 并且涉及的是勒贝格测度. 在这种情形, 利用 0.4.4.5.

推论 若 $\dim X < \dim Y$, $f \in C^1(X; Y)$,则 $f(X)$ 在 Y 内是零测度集.

只需将 f 拓广成 $\overline{f} : X \times \mathbf{R}^{d-e} \to Y, \overline{f}(x, y) = f(x)$, 其中 $d = \dim Y, e = \dim X$. 因为 X 是 $X \times \mathbf{R}^{d-e}$ 的零测度集, 故 $\overline{f}(X \times \mathbf{R}^{d-e}) = f(X)$ 在 Y 内是零测度集 (3.3.17.2).

这个推论表明, 像皮亚诺曲线这种从 $[0,1]$ 到 $[0,1] \times [0,1]$ 的连续映射的例子不可能由可微映射产生.

3.3.17.4 对于覆叠映射上的勒贝格测度, 参见习题 3.6.1.

3.3.17.5　微分几何的一个基本工具是萨德定理, 4.3.1, 它断言可微映射产生的某些子集是零测度的.

3.3.18　密度的乘积

设 E, F 是维数分别为 d, e 的两个有限维向量空间, $p: E\times F\to E, q: E\times F\to F$ 是典范投影. 给定 $\delta\in \mathrm{Dens}(E), \varepsilon\in \mathrm{Dens}(F)$, 于是 (0.1.25) 存在 $\alpha\in \Lambda^d E^*$ 和 $\beta\in \Lambda^e F^*$, 使得 $\delta=|\alpha|, \varepsilon=|\beta|$. 我们有 $p^*\alpha\wedge q^*\beta\in \Lambda^{d+e}(E\times F)^*-\{0\}$, 由此

3.3.18.1　定义

*$E\times F$ 上的密度 $\delta\otimes\varepsilon=|p^*\alpha\wedge q^*\beta|$ 称为 δ 和 ε 的**乘积密度**.*

(显然 $\delta\otimes\varepsilon$ 只依赖 δ 和 ε, 因为 δ 之间和 ε 之间差别仅在 ± 1).

3.3.18.2　例子

设 δ_d (对应的 δ_e) 是 $\mathbf{R}^d$ 的 (对应的 $\mathbf{R}^e$ 的) 典范密度 (参见 0.1.26), 则

$$\delta_d\otimes\delta_e=\delta_{d+e}$$

是 $\mathbf{R}^{d+e}=\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^e$ 的典范密度.

若 $\delta=a\cdot\delta_d,\quad \varepsilon=b\cdot\delta_e$, 则 $\delta\otimes\varepsilon=a\cdot b\cdot\delta_{d+e}$.

3.3.18.3　引理

设 E, E', F, F' 是四个维数有限的向量空间, $f\in \mathrm{Isom}(E;E'), g\in \mathrm{Isom}(F;F')$, 并且 $\delta'\in \mathrm{Dens}(E'), \varepsilon'\in \mathrm{Dens}(F')$. 则

$$(f\times g)^*(\delta'\otimes\varepsilon')=f^*\delta'\otimes g^*\varepsilon'.$$

这是定义 0.1.25 和下列外代数公式的直接推论: 设 $\alpha'\in\bigwedge E'^*, \beta'\in\bigwedge F'^*, p, q$ 表示 $E'\times F'$ 以及 $E\times F$ 的典范投影, 则

$$(f\times g)^*(p^*\alpha'\wedge q^*\beta')=p^*(f^*\alpha')\wedge q^*(g^*\beta').$$

这个公式本身是向量积和逆像定义的直接推论.

给定 X, Y 是两个流形, $\delta\in\Delta_0(X), \varepsilon\in\Delta_0(Y)$, 我们考虑乘积流形 $X\times Y$. 对于所有的 $(x,y)\in X\times Y$, 2.5.18 中的等同允许考虑 $\delta(x)\otimes\varepsilon(y)\in \mathrm{Dens}(T_{(x,y)}(X\times Y))$, 由此得记号 $(\delta\otimes\varepsilon)(x,y)=\delta(x)\otimes\varepsilon(y)$ 及映射 $\delta\otimes\varepsilon\in\Delta(X\times Y)$:

3.3.18.4　　$\delta\otimes\varepsilon: X\times Y\ni(x,y)\mapsto(\delta\otimes\varepsilon)(x,y)\in \mathrm{Dens}(T_{(x,y)}(X\times Y))$.

我们有

3.3.18.5　命题

$\delta\otimes\varepsilon\in\Delta_0(X\times Y)$, 并且 $X\times Y$ 上的关联于 $\delta\otimes\varepsilon$ 的测度是 X 上的关联于 δ 的测度与 Y 上的关联于 ε 的乘积测度 (参见 0.4.5).

根据 3.3.6, 只需对于一个特殊的图册验证 $\delta\otimes\varepsilon$ 的连续性. 无庸置疑, 我们取定义 2.2.10.3 中的图册. 如果

3.3.18.6　　$$(\varphi^{-1})^*\delta=a\cdot\delta_d,\quad(\psi^{-1})^*\varepsilon=b\cdot\delta_e,$$

由 2.5.18, 3.3.18.2 和 3.3.18.3, 对于坐标卡乘积 $(u \times V, \varphi \times \psi)$, 我们得

$$((\varphi \times \psi)^{-1})^*(\delta \otimes \varepsilon) = a \cdot b \cdot \delta_{d+e}.$$

由于 a 和 b 是连续的, 故它们的乘积也是连续的.

现在必须研究关联于 $\delta \otimes \varepsilon$ 的测度. 按照定理 3.3.11 的同一构造过程, 只需在乘积坐标卡 $(U \times V, \varphi \times \psi)$ 的定义域上进行讨论. 在这种情形下, 在

$$\varphi(U) \times \psi(V) \subset \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^e = \mathbf{R}^{d+e}$$

上关联于 $((\varphi \times \psi)^{-1})^*(\delta \otimes \varepsilon)$ 的测度正是关联于 $a \cdot b \cdot \delta_{d+e}$ 的测度 (公式 3.3.18.6).

接下来验证关联于 $a \cdot b \cdot \delta_{d+e}$ 的测度是关联于 $a \cdot \delta_d$ 和 $b \cdot \delta_e$ 的测度的乘积, 而这可由 δ_{d+e} 是乘积 $\delta_d \otimes \delta_e$ 和下列计算 (来源于 a 只是 x 的函数和 b 只是 y 的函数和 0.4.5.1) 立即推出 (参见 0.4.5):

$$\begin{aligned}
&\int_{\varphi(U)\times\psi(V)} f(x,y)(a(x)b(y)\delta_{d+e}) \\
&= \int_{\varphi(U)\times\psi(V)} (f(x,y)a(x)b(y))\delta_{d+e} \\
&= \int_{\psi(V)} \left[\int_{\varphi(U)} f(x,y)a(x)b(y)\delta_d\right]\delta_e \\
&= \int_{\psi(V)} b(y)\left[\int_{\varphi(U)} f(x,y)(a(x)\cdot\delta_d)\right]\delta_e.
\end{aligned}$$

3.3.18.7 推论

设 X, Y 是分别配备密度 δ, ε 的流形, $f \in C^{\text{int}}_{\delta\otimes\varepsilon}(X \times Y)$. 则对于 $\delta-$ 几乎所有的 $y \in Y$, 我们有 $\{x \mapsto f(x,y)\} \in C^{\text{int}}_{\delta}(X)$. $\varepsilon-$ 几乎处处定义的函数 $y \mapsto \int_X f(x,y)\cdot\delta$ 是 $\varepsilon-$ 可积的, 并且

$$\int_{X\times Y} f(x,y)\delta\otimes\varepsilon = \int_Y \left[\int_X f(x,y)\cdot\delta\right]\cdot\varepsilon.$$

这正是富比尼定理 (参见 0.4.5.1).

3.4 一维连通流形的分类

3.4.1 定理

所有 C^1 类的一维连通流形微分同胚于 $\mathbf{R}$ 或 S^1.

3.4.2 约定

*在本节, 我们称一维连通 C^1 类的一个流形为**曲线**, 简称连续密度为**密度**.*

在后面 (第八、九章) 将以更精细的方式使用术语 “曲线”.

证明的思路如下: 在 $\mathbf{R}^3$ 的一个子流形的情形下, 我们为之配置一个特殊的参数表示, 称之为曲线坐标. 在抽象流形的情形, 必须引进与曲线坐标类似的概念, 为此在 T_xX 内定义一个范数. 既然这里的向量空间是一维的, 这个范数其实是 T_xX 的一个密度 (根据 0.1.29.6).

3.4.3 定义

设曲线 X 配备了一个密度 δ, 给定从 $\mathbf{R}$ 的区间 I 到 X 内的一个映射 α, 如果 α 实现 I 和其像集间的微分同胚, 并且对于所有 t, $\delta(\alpha(t))[(T_t\alpha)(1_t)] = 1$, 则称 (I,α) 是**曲线的弧长参数表示**.

由于 $\delta(\alpha(t))$ 事实上是 $T_{\alpha(t)}X$ 的一个范数, 而且 $(T_t\alpha)(1_t) \in T_{\alpha(t)}X$, 所以等式 $\delta(\alpha(t))[(T_t\alpha)(1_t)] = 1$ 有意义.

3.4.4 引理

设 (I,α) 是配备了密度 δ 的曲线 X 的一个参数表示. 则存在 X 的相对于 δ 的一个弧长参数表示 (J,β).

由此推出, 所有曲线允许有弧长参数表示, 这是由于所有曲线都有一个密度 (定理 3.3.8) 和参数表示 (坐标卡映射的逆映射). 引理的证明类似于能够用曲线坐标给 ($\mathbf{R}^3$ 的初等意义的) 曲线以参数表示的证明.

设 (I,α) 是曲线 X 的一个参数表示, $t \in I$, 并且 θ_t 是典范同构 (2.5.12.3) $\theta_t : T_t\mathbf{R} \to \mathbf{R}$. 设 δ_0 是 $\mathbf{R}$ 的典范密度, 即绝对值 (参见 0.1.26). 由于 $(T_t\alpha \circ \theta_t^{-1})^*\delta(\alpha(t))$ 是 $\mathbf{R}$ 的一个密度, 故存在一个数 $g(\alpha(t)) > 0$, 使得 $(T_t\alpha \circ \theta_t^{-1})^*\delta(\alpha(t)) = g(\alpha(t))\delta_0$ (0.1.29.1), 并且 g 是连续的 (定义 3.3.5). 取 I 的一个固定点 t_0, 在 I 上用

$$\gamma(t) = \int_{t_0}^{t} g(\alpha(s))\mathrm{d}\, s$$

定义映射 γ. 我们看到 γ 定义在 I 上, 它是可导的, 并且其导数 $\gamma'(t) = g(\alpha(t)) > 0$. 于是 γ 建立了 I 和它的像集 $\mathbf{R}$ 的一个区间 J 之间的双射. 用 $\beta(s) = \alpha(\gamma^{-1}(s))$ 定义从 J 到 X 内的映射 β. 我们指出这正是相对于 δ 的弧长参数表示, 为了证明此结论, 只需应用公式 0.3.11.3. 我们有 $\psi \circ \varphi^{-1} = \gamma$, 于是 $J(\psi \circ \varphi^{-1}) = \gamma' = g$(积分对于其上限的导数), 由此, 由于 $g > 0$: $J(\psi \circ \varphi^{-1}) = |J(\psi \circ \varphi^{-1})|$, 于是若 $(T_t\beta \circ \theta_t^{-1})^*\delta(\beta(t)) = h(\beta(t))\delta_0$, 则 $g/h = g$, 故 $h = 1$, 这正是要证明的.

从上述计算同样得知 $T_s\beta$ 非零, 从而建立了从 $T_s\mathbf{R}$ 到 T_xX (一维空间) 上的一个同构. 这样 β 就是平直的, 从而是一个局部微分同胚 (参见 2.5.20): 如果有必要, 可缩小 J, 就得到一个弧长参数表示.

3.4.5 引理

设 (I,α) 和 (J,β) 是配备密度 δ 的曲线 X 的两个弧长参数表示. 假定 $\alpha(I) \bigcap \beta(J) \neq \varnothing$. 则有: 或者 $\alpha(I) \bigcap \beta(J)$ 有单独一个连通分支, 并且在这一情形下, 存在第三个弧长参数表示 (K,γ), 使得 $\gamma(K) = \alpha(I) \bigcup \beta(J)$; 或者 $\alpha(I) \bigcap \beta(J)$ 有两个连通分支, 并且在这一情形下, X 同胚于 S^1.

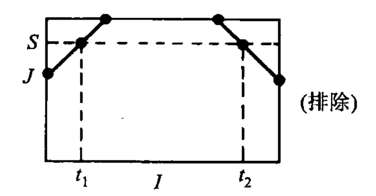
映射 $\alpha^{-1}\circ\beta$ 仅在 $s\in J$ 并且 $x=\beta(s)\in\beta(J)\bigcap\alpha(I)$ 时有定义, 此时我们令 $t=(\alpha^{-1}\circ\beta)(s)$. 既然 α 和 β 是微分同胚, 那么以下映射是连续的: 对于 $x\in\beta(J)\bigcap\alpha(I)$, 对应配对 (s,t), 其中 s 是 J 的使得 $\beta(s)=x$ 的唯一值, 而 t 是 I 的使得 $\alpha(t)=x$ 的唯一值.

于是 $\Gamma=\{(s,t);\exists x\in\beta(J)\bigcap\alpha(I)$ 使得 $x=\beta(s)=\alpha(t)\}$ 与 $\beta(J)\bigcap\alpha(I)$ 有同样多的连通分支. 由于 Γ 也是函数 $s\mapsto t=(\alpha^{-1}\circ\beta)(s)$ 的图像, 这就引导我们研究这个函数.

由于 (I,α) 是弧长参数表示, 如果用 δ_0 表示 $\mathbf{R}$ 上的绝对值, 仍然是根据公式 0.3.11.3, 因为这里 $g=h=1$, 我们得到 $|(\alpha^{-1}\circ\beta)'(s)|=1$. 于是 $\alpha^{-1}\circ\beta$ 的图像 Γ 就是由斜率为 $+1$ 或 -1 的线段组成. 此外, Γ 还是 $J\times I$ 的满足 $\beta(s)=\alpha(t)$ 的配对 (s,t) 的集合, 它在 $J\times I$ 中是闭集. 此外, 图像的这些线段不能停留在 $J\times I$ 内, 这是因为它们在 I 上的投影是 $\alpha^{-1}(\alpha(I)\bigcap\beta(J))$, 这是 I 上的一个开集; 于是这个图形的每个线段一直延续到 $J\times I$ 在 $\mathbf{R}^2$ 内的可能的边界.

再者, 由于 α 和 β 是双射, 对于 s (或 t) 的一个值, 至多存在 t (或 s) 的一个值, 使得 $\beta(s)=x=\alpha(t)$. 于是在 $J\times I$ 的每个边上至多一个线段开始 (或结束).

最后, 观察图 3.4.5.1 就可以明白不可能同时有斜率为 $+1$ 和 -1 的线段.



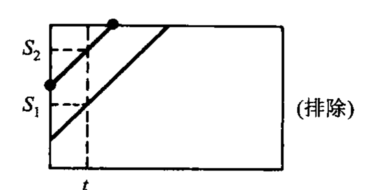
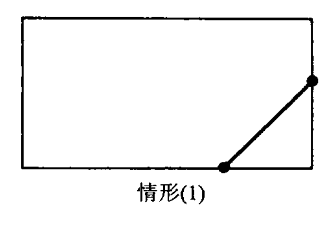


图 3.4.5.1

只遗下情形:



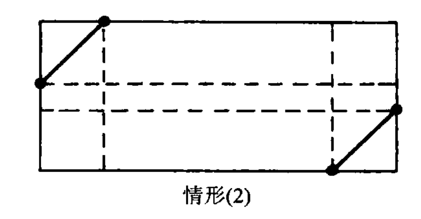


图 3.4.5.2

这已经指出 Γ 只能有一个或两个连通分支 ($\alpha(I)\bigcap\beta(J)$ 也是如此).

考虑情形 (1):

通过在 I 上的或 J 上的平移, 不妨设 $I=(a,b)$, $J=(0,c)$, 而 Γ 由连接点 $(0,0)$ 和 (a,a) 的单独一个线段组成 (有可能 $b=-\infty, a=+\infty, c=+\infty$), 其斜率为 $+1$ (必要时在 α 或 β 里, 把 t 换为 $-t$).

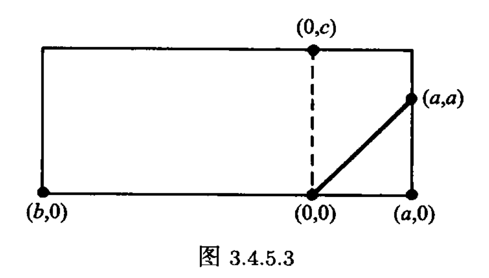


图 3.4.5.3

我们假设了 $a \leqslant c$. 为了定义一个弧长参数表示 (K, γ), 使得 $\gamma(K)=\alpha(I)\bigcup\beta(J)$, 我们取 $K=(b,c)$, 在这个区间上如下定义 γ:

$$\begin{cases}\gamma(t)=\alpha(t),\ \text{在 } (b,0) \text{ 上};\ \gamma(0)=\alpha(0);\\ \gamma(t)=\alpha(t)=\beta(t),\ \text{在 } (0,a) \text{ 上};\ \gamma(a)=\beta(a);\\ \gamma(t)=\beta(t),\ \text{在 } (a,c) \text{ 上}.\end{cases}$$

容易确定 $\gamma(K)=\alpha(I)\bigcup\beta(J)$ 和 γ 是从 K 到其像集上的微分同胚 (它在覆盖 K 的区间 (b,a) 和 $(0,c)$ 上是这样). 由于 $(T_t\gamma)(1_t)$ 或者是 $(T_t\alpha)(1_t)$, 或者是 $(T_t\beta)(1_t)$, 弧长参数表示的最后一个条件得以满足.

情形 (2):

由于 Γ 由两个线段组成, 可以设其图形有如下形式:

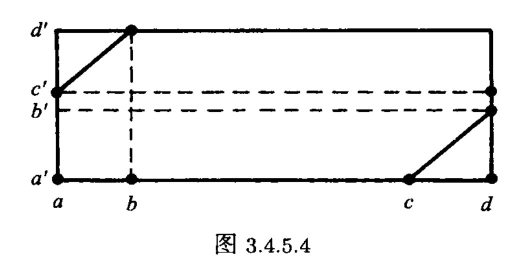


图 3.4.5.4

这种状况只有在 $I=(a,d)$ 和 $J=(a',d')$ 有界时才得以出现 (如果 $d=+\infty$, 两个线段将与平行于 ad 的直线相交). (通过平移) 可以要求 $a'=c$, 从而 $b'=d$. 于是有

$$a<b\leqslant c<d=b'\leqslant c'<d'.$$

定义从 (a,d') 到 X 上的一个映射 $\widehat{h}$ 如下:

$$\widehat{h}(t)=\begin{cases}\alpha(t), t\in(a,d),\\ \beta(t), t\in(c,d').\end{cases}$$

根据 Γ 的构造和定义, α 和 β 在 (c,d) 上重合, 并且当 $t\in(a,b)$ 时, $\widehat{h}(t+c'-a)=\widehat{h}(t)$. 于是可以延拓 $\widehat{h}$ 成一个映射 $\mathbf{R}\to X$, 并且要求 $\widehat{h}$ 是 $(c'-a)-$ 周期的. 根据 2.4 和下面的通过结构.

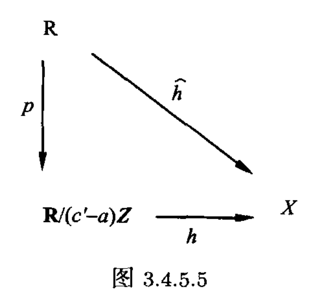


图 3.4.5.5

将 $\widehat{h}$ 转移到商 $Y = \mathbf{R}/(c' - d)Z$ 上就成为一个映射 $h \in C^1(Y; X)$. 根据在 2.6.13.1 所进行的研究, 我们业已知道 Y 微分同胚于 S^1. 由构造过程知道 h 是平直的及单射的. 由于 Y 是紧致的, 定理 2.6.12 保证 Y 微分同胚于它在 X 的像集 $h(Y)$. 而 h 是满射的, 这是因为 $h(Y) = \alpha(I) \bigcup \beta(J)$ 是 X 的一个开集, 作为紧致集 Y 在 h 下的像集又是 X 的一个闭集. 由于 X 是连通的, 故 $h(Y) = X$. 因此 h 终于建立了 Y 和 X 之间的微分同胚, 从而建立了 X 和 S^1 之间的微分同胚.

现在可以证明定理 3.4.1 了.

假定 X *不微分同胚于* S^1, 设 (I, α) 和 (J, β) 是两个弧长参数表示: 有第三个弧长参数表示 (K, γ), 使得 $\gamma(K) = \alpha(I) \bigcup \beta(J)$.

X 的子集按照包含关系是有序的, 故可以找到一个弧长参数表示 (L, ε), 使得 $\varepsilon(L)$ 在对于所有弧长参数表示 (I, α) 中 $\alpha(I)$ 的集合中是最大的. 但那样, $\varepsilon(L)$ 既是 X 的一个*开*集, 又是 X 的一个*闭*集; 如若不然, 则 $\varepsilon(L) \neq X$, 且存在 $x \in \overline{\varepsilon(L)}$, 使得 $x \notin \varepsilon(L)$. 我们可以围绕 x 构造一个弧长参数表示 (J, β) (参见 3.4.4), 而这时将有一个弧长参数表示 (K, γ), 使得 $\gamma(K) = \varepsilon(L) \bigcup \beta(J) \ni x$, 这是矛盾的. 由于 X 是连通的, 故 $\varepsilon(L) = X$. 由于 ε 是一个微分同胚, 故 X 微分同胚于 $\mathbf{R}$ 的一个区间, 从而 X 微分同胚于 $\mathbf{R}$.

3.4.6 推论

设 X 是一条曲线. 而 δ 是 X 上的密度. 则

(i) *或者 X 微分同胚于 $\mathbf{R}$, 并且存在 X 的一个***整体弧长参数表示** *(从而存在从 I 到 X 上的微分同胚)*;

(ii) *或者 X 微分同胚于 S^1, 并且存在一个***周期弧长参数表示** *(即存在 $f: \mathbf{R} \to X$ 和 $T \in \mathbf{R}_+^*$, 使得对于所有 t, $f(t+T) = f(t)$, $f|_{[0,T)}$ 是单射, 并且 $\delta(f'(t)) = 1$). 如果要求 $f(0) = x$, 这个参数表示不计反转 $t \mapsto -t$ 是唯一的.*

3.4.7 对于二维连续 (*曲面*), 请看 4.2.25.

3.5 流形上的向量场和微分方程

在整个这一节, 假定流形 X 是 C^p 类的, 这里 $p \geqslant 2$.

我们现在要把在第一章引进的向量场和微分方程的概念转移到流形上. 第一

章的局部性的定理保持为真, 因为流形局部微分同胚于 $\mathbf{R}^n$ 的一个开集, 而根据 2.5.17.4, 微分同胚保持积分曲线的概念. 这两个新的事实是全局唯一性 (3.5.4) 和紧致流形的情形: 3.5.9 和 3.5.13.

3.5.1 定义

给定一个 C^p 类的流形 X. 如果一个从 X 到 TX 内的 C^{p-1} 类的映射 ξ, 使得对于 X 的所有 x 都有 $\xi(x)\in T_xX$, 则称 ξ 为 X 上的**向量场**.

如果 π 表示投影映射, 它让 TX 的 z 对应 X 的点 $\pi(z)=x$, 这个 x 使得 $z\in T_xX$, 则有 $\pi\circ\xi=\mathrm{id}_X$. 例子: $\mathbf{R}$ 的典范向量场 (参见 2.5.17.1).

给定一个坐标卡 (U,φ). 如果 u 属于 $\mathbf{R}^d$ 的 $\varphi(U)$, 则有 $\xi(\varphi^{-1}(u))\in TX$, 并且 $(T_{\varphi^{-1}(u)}\varphi)(\xi(\varphi^{-1}(u)))\in T_u\mathbf{R}^d$, 而为了回到在 1.2.1 意义下的向量场, 我们定义从 $\varphi(U)$ 到 $\mathbf{R}^d$ 的映射

$$f: u\mapsto(\theta_u\circ T_{\varphi^{-1}(u)}\varphi)(\xi(\varphi^{-1}(u))).$$

这个映射无疑是 C^{p-1} 类的 (参见 2.5.26) (θ_u 是从 $T_u\mathbf{R}^d$ 到 $\mathbf{R}^d$ 上的同构 2.5.12.3).

我们有下列映射图:

3.5.1.1
$$\begin{array}{ccccc} TX\supset TU & \xrightarrow{T\varphi} & T(\varphi(U)) & \xrightarrow{\theta} & \mathbf{R}^d \\ \xi\uparrow\downarrow\pi & & \downarrow\pi & & \\ U & \underset{\varphi}{\overset{\varphi^{-1}}{\rightleftarrows}} & \varphi(U) & \xrightarrow{f} & \mathbf{R}^d \end{array}$$

3.5.2 注释

如果考虑 $\mathbf{R}^d$ 的一个看做流形的开集 W, 定义 3.5.1 并给不出如同 1.2.1 中的一个向量场. 事实上, 这里是一个属于 $C^p(W;TW)$ 的映射 (使得 $\pi\circ\xi=\mathrm{id}_W$), 而非属于 $C^p(W;\mathbf{R}^d)$ 的映射. 不过通过同构 $\theta_{\pi(\xi(w))}$ 可以把 $T_{(\pi\circ\xi)(w)}W$ 和 $\mathbf{R}^d$ 等同看待, 这样就可以认为两个定义是一致的. 现在可以模仿第一章所做的各个研究了.

3.5.3 定义

X 上的向量场 ξ 的**一条积分曲线**是 X 的一条曲线 (I,α), 其中 I 是 $\mathbf{R}$ 的区间, α 是从 I 到 X 内的映射, 使得对于 I 的所有 $t, \alpha'(t)=\xi(\alpha(t))$,其中 $\alpha'(t)=(T_t\alpha)(1_t)$ 是 2.5.17 定义的速度, 初始条件是 $\alpha(0)$.

跟第一章一样, 我们定义局部流, 并且与 2.2.6 一样建立局部流的存在性和唯一性定理.

为了谈论整体流, 我们需要:

3.5.4 定理 (整体唯一性)

给定 X 上的一个向量场上满足相同初始条件 $\alpha_1(0)=\alpha_2(0)$ 的两条积分曲线 (J_1,α_1) 和 (J_2,α_2). 则 $\alpha_1|_{J_1\cap J_2}=\alpha_2|_{J_1\cap J_2}$.

与在 1.3.1 的证明中一样, 我们指出

$$Q=\{t\in J_1\bigcap J_2:\alpha_1(t)=\alpha_2(t)\}$$

是 $J_1 \bigcap J_2$ 的一个开集. 它也是 $J_1 \bigcap J_2$ 的一个闭集, 这是因为流形 X 是分离性的 (参见 2.2.10.7), 如果用 Δ 表示 $X \times X$ 的对角线集, 则有

$$Q = (J_1 \bigcap J_2) \bigcap (\alpha_1, \alpha_2)^{-1}(\Delta),$$

而 Δ 是分离性拓扑开集的对角线集, 从而是 $X \times X$ 的闭集.

3.5.5 注释

当 X 不具有分离性时定理 3.5.4不成立. 取 2.2.10.4 中的例子作为 X, 它没有分离性, 为它配备一个典范向量场 ξ, 它是由 $\mathbf{R}$ 的向量场 $t \mapsto 1_t$ 诱导出的 (参见 2.5.17.1). 我们将有 ξ 的两条积分曲线, 当 $t < 0$ 时它们重合, 但在 $t = 0$ "分叉".



图 3.5.5

对于 X 的 x, 可以定义初始条件为 x 的最大开区间 $J(x)$ 和最大积分曲线 $(J(x), \alpha_x)$, 参见 1.3.1.1.

3.5.6 定义

给定 X 上的一个向量场 ξ. 令 $\mathscr{D}(\xi) = \{(t, x) \in \mathbf{R} \times X : t \in J(x)\}$, 我们称配对 $(\mathscr{D}(\xi), \alpha)$ 为全局流, 其中 α 是从 $\mathscr{D}(\xi)$ 到 X 的由 $\alpha(t, x) = \alpha_x(t) = G_t \cdot x$ 定义的映射.

这里的 $G_t \cdot x$ 采用的就是在 1.3.4 和 1.3.5 中引入的记号.

3.5.7 定理

设 ξ 是 X 上的一个向量场. 则 $\mathscr{D}(\xi)$ 是 $\mathbf{R} \times X$ 的一个开集, 并且如果 $\xi \in C^{p-1}(X; TX)$, 则 $\alpha \in C^{p-1}(\mathscr{D}(\xi); X)$.

证明与 1.3.6 的相同. 当 $G_{\cdot}$ 有意义时, 还有:

3.5.8 $$\boxed{G_t \cdot (G_{t_1} \cdot x_0) = (G_t \circ G_{t_1}) \cdot x_0 = G_{t+t_1} \cdot x_0}.$$

与向量空间的开集比较, 新现象是:

3.5.9 定理

设 ξ 是紧致流形 X 上的一个向量场. 则 $\mathscr{D}(\xi) = \mathbf{R} \times X$, 此外, 对于 $\mathbf{R}$ 的所有 t, 在 3.5.6 定义的 G_t 属于 $\operatorname{Diff}(X)$, 并且映射 $t \mapsto G_t$ 是从加法群 $\mathbf{R}$ 到群 $\operatorname{Diff}(X)$ 的同胚.

事实上, 给定 $x \in X$, 则存在 x 的局部流, 从而存在一个包含 x 的开集 U_x 和一个包含 0 的区间 I_x, 使得对于 U_x 的每个 z, 存在一条积分曲线 $\alpha : I_x \to X$, 满

足 $\alpha(0)=z$ (初始条件 z). 故有 $I_x \times U_x \subset \mathscr{D}(\xi)$. 而 X 是紧致的, 被诸 U_x 所覆盖, 故可以抽取一个有限覆盖, 使得 $X=\bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}$. 这样就存在 $\varepsilon>0$, 使得对于所有 i, $(-\varepsilon,\varepsilon)\subset I_{x_i}$, 于是对于所有满足 $|t|<\varepsilon$ 的 t 和 X 的所有 x, 存在一条初始条件为 x 的在 t 有定义的积分曲线 α_x, 即 $(-\varepsilon,\varepsilon)\subset J(x)$.

现在考虑初始条件为 $\alpha_x(t)$ 的积分曲线, 记之为 $\alpha_{\alpha_x(t)}$. 它对于 $|t|<\varepsilon$ 有定义, 并且有 $\alpha_{\alpha_x(t)}(t)=\alpha_x(t+t)$. 于是第一条积分曲线 α_x 事实上对于所有满足 $|t|<2\varepsilon$ 的 t 有定义. 于是对于所有 x, $(-2\varepsilon, 2\varepsilon)\subset J(x)$. 逐步得到对于所有 x 和 $\mathscr{N}$ 的所有 $n, (-2^n\varepsilon, 2^n\varepsilon)\subset J(x)$. 于是 $J(x)=\mathbf{R}, \mathscr{D}(\xi)=\mathbf{R}\times X$. 公式 3.5.8 随之对于所有 $t\in\mathbf{R}$ 适用. 把它应用到 $t_1=-t$ 得

$$(G_t\circ G_{-t})(x_0)=G_0(x_0).$$

这里一如既往 (定义 3.5.3) 令 $G_0(x)=\alpha(0,x)=x$. 故

$$G_t\circ G_{-t}=G_{-t}\circ G_t=G_0=\mathrm{id}_X.$$

这就证明了 $G_t\in \mathrm{Diff}(X)$, 并且映射 $t\mapsto G_t$ 是群的同态 (从加法群 $\mathbf{R}$ 到对于复合运算的群 $\mathrm{Diff}(X)$).

3.5.10 注释

换句话说, 紧致流形 X 上的一个向量场 ξ 确定 X 的微分同胚的一个单参数群. 如果 X 是任意的, 只能说定义在 $\mathscr{D}(\xi)$ 上的流 α 是 X 的局部微分同胚的一个单参数局部群 (参见 1.3.5).

为了推广 1.4 节, 必须定义一个依赖于时间的向量场:

3.5.11 定义

设 X 是一个 C^p 类的流形, I 是 $\mathbf{R}$ 的一个包含 0 的区间, p 表示 $I\times X$ 到 X 上的投影. 如果一个映射 $\xi\in C^q(I\times X;TX)$ $(1\leqslant q\leqslant p-1)$ 满足 $\pi\circ\xi=p$, 则称 ξ 是 X 上的 C^q 类的**依赖时间的向量场 (相应的方程称为依赖时间的微分方程)**.

ξ 的一个解或积分曲线是一个配对 (I,α), 它使得对于 I 的所有 t 有 $\alpha'(t)=\xi(t,\alpha(t))$.

根据 1.4, 还有

- 解的局部存在唯一性
- 局部流的定义
- 整体唯一性 (类似于 3.5.4 的定理)
- 对应初始值 x 的积分曲线的最大区间 $J(x)$ 的概念
- 定义 $\mathscr{D}(\xi)=\{(t,x)\in\mathbf{R}\times X: t\in J(x)\}$, $\mathscr{D}(\xi)$ 是 $\mathbf{R}\times X$ 的开集. 整体流 α 的定义, α 是 $\mathscr{D}(\xi)$ 到 X 内的映射.

现在设 α 是整体流, 对于 $(t,x)\in\mathscr{D}(\xi)$, 令 $\alpha(t,x)=G_t\cdot x$. 再设向量场 η 由 $\eta(h,y)=\xi(s+h,y)$ 确定 ($s\in I$ 固定, $y\in X$). 对于这个场, 存在一个整体流 β, 对

于 $(t,z) \in \mathscr{D}(\eta)$, 令 $\beta(t,z) = G_t^s \cdot z$(上标 s 提醒涉及的是前面定义的 s 取定后的向量场); 特别地, 有 $G_t = G_t^0$.

下式中出现的运算一旦有意义, 则等式成立 (跟 1.5.4 一样):

3.5.12 $$G_{t+s}^r = G_t^{r+s} \circ G_s^r.$$

3.5.13 定理

设 X 是紧致的, 而 ξ 是一个定义在 $I \times X$ 上的依赖时间的向量场, 则 $\mathscr{D}(\xi) = I \times X$. 并且对于 I 的所有 t, $G_t \in \mathrm{Diff}\,(X)$.

如果 $\mathscr{D}(\xi) = I \times X$, 则对于 I 的所有 t, G_t 有定义, 并且根据 3.5.12, 我们有

$$G_{-t}^t \circ G_t^0 = G_0^0 = \mathrm{id}_X \quad 及 \quad G_t^0 \circ G_{-t}^t = G_0^t = \mathrm{id}_X,$$

这就推出 $G_t = G_t^0$ 是一个微分同胚, 其逆为 G_{-t}^t. 至于第一个结论, 我们用归谬法证明.

事实上, 取定 $x \in X$, 假定与它关联的最大区间 $J(x)$ 含于 I 内. 设 $b = \sup J(x)$. 由于 $J(x) \neq I$, 我们有: 或者 $\sup J(x) \in I$, 或者 $\inf J(x) \in I$; 不妨设 $\sup J(x) \in I$ (下确界的情形证明类似). 设 $[0,b)$ 的点的序列 $\{t_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = b$.

由于 X 是紧致的, 故序列 $\{\alpha(t_n,x)\}$ 有一个聚点 y, 过渡到子序列, 可以假定 $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha(t_n,x) = y$. 在 $I \times X$ 的点 (b,y), 存在一个关联于场 $\eta : (s,z) \mapsto \xi(s+b,z)$ 的微分方程的局部流 β, 它定义在 $(-\varepsilon,\varepsilon) \times U$ 上, 这里 U 是包含 y 的一个开集.

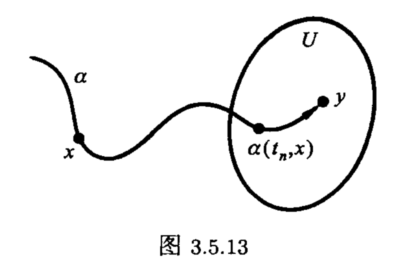


图 3.5.13

由于 $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = b$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha(t_n,x) = y$, 所以存在充分大的 n, 使得同时有 $|b - t_n| < \varepsilon$ 和 $\alpha(t_n,x) \in U$. 但此时由于

$$\beta(b - t_n, \alpha(t_n,x)) = \alpha(t_n + b - t_n, x) = \alpha(b,x),$$

这说明 $b \in J(x)$, 且同样有 $(t_n, t_n + \varepsilon) \subset J(x)$, 这与 $b = \sup J(x)$ 矛盾.

注意: 这里用另一种方式证明了 3.5.9 的第一部分.

3.5.14 *反之, 借助一个流形的微分同胚的单参数族* 可以重建向量场. 事实上, 设 $H \in C^p(I \times X; X)$, 其中 I 是 $\mathbf{R}$ 的一个包含 0 的区间, 而且若令 $H_t : x \mapsto H_t(x) = H(t,x)$, 则有 $H_0 = \mathrm{id}_X$, 并且对于所有 $t \in I$ 有 $H_t \in \mathrm{Diff}\,(X)$. 我们从给定的 H 依下列方式定义一个依赖时间的向量场:

如果 β 表示曲线 $s \mapsto H(s,(H_t)^{-1}(x))$, 令 $\xi(t,x) = \beta'(t) \in T_xX$.

由构造本身可知, 依赖时间的向量场 $\xi(t,x)$ 的全局流定义在 $\mathscr{D}(\xi) = I \times X$ 上.

请读者验证 $\xi \in C^{p-1}(I \times X; TX)$, 并且如果 H 满足 $H_{t+s} = H_t \circ H_s$, 则 ξ 不依赖时间 (习题 3.6.2).

3.5.15 有关知识:流的交换, 两个向量场的括号积, 弗罗贝尼乌斯定理

3.5.15.1 为了简单起见, 这里所有对象都将是 C^∞ 类的, 流形不必是紧致的. 各个结果只是叙述而不予证明, 读者可参考: [8], 304 页, [35], 42 页, [11], 130 页, [10] 6 至 19 页和 7 至 21 页, [117], 192 页.

3.5.15.2 设 ξ 和 η 是一个流形 X 上的两个向量场, 用 G_t 和 H_s 分别表示它们的流. 是否至少局部地有

$$G_t \circ H_s = H_s \circ G_t \text{ (对于所有实的 } t \text{ 和 } s)?$$

一般地说否, 没有任何理由要求等式成立. 回答与两个向量场 ξ, η 的括号积 $[\xi,\eta]$ 相关, 在习题 2.8.17 的第 II 部分中, 对于它给了定义和进行了研究. 问题的回答借助下列公式 (称做 “小平行四边形公式”) 可以猜测出来. 固定 X 中的一个 x 并且考虑起点为 x 的 (对于充分小的 t) 如下定义的曲线:

$$t \mapsto c(t) = (H_{-t} \circ G_{-t} \circ H_t \circ G_t)(x).$$

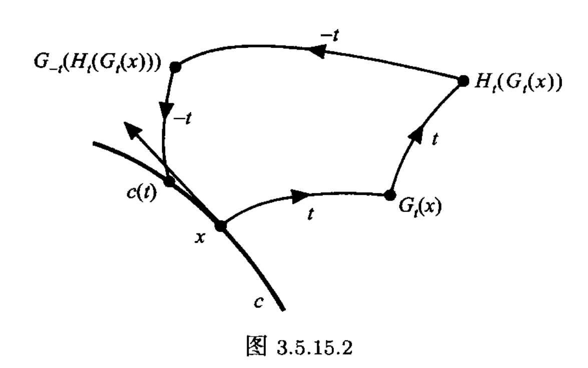


图 3.5.15.2

曲线 c 的确度量了 G_t, H_t 交换性的缺失, 我们有有限展开:

$$c(t) = x + \frac{t^2}{2}([\xi,\eta](x)) + o(t^2).$$

如果原意的话, 此式可写成

$$c'(0) = 0 \quad \text{及} \quad c''(0) = [\xi,\eta](x).$$

特别地, 如果流是交换的, 则处处有 $[\xi,\eta] = 0$. *逆命题成立*: 如果 $[\xi,\eta]$ 是零向量场, 则 (局部地) $G_t \circ H_s = H_s \circ G_t$ 对于所有实数 s 和 t 成立, 如果 X 是紧致的 (定理 3.5.9), 则 “局部地” 可以改为 “整体地”.

3.5.15.3 现在来看习题 2.8.17 的 II.4 的逆命题, 原命题断言: 如果 Y 是 X 的一个子流形, 并且对于 Y 的所有 y, $\xi(y)$ 和 $\eta(y)$ 总是属于 T_yY, 则 $[\xi,\eta](y)$ 也属于 T_yY. 现在来讨论逆命题: 考虑 X 的两个向量场 ξ,η, 假定对于 X 的所有 x, $\xi(x)$ 和 $\eta(x)$ 在 T_xX 内都是线性无关的. 用 $P(x)$ 表示由它们生成的 T_xX 的线性子空间. 是否存在 (可能的话, 起点是 X 中的任意固定点) X 的子空间 Y, 使得对于 Y 的所有 y 有 $T_yY = P(y)$? 我们已经看到一个必要条件是对于所有 x, $[\xi,\eta](x) \in P(x)$. 这类问题归属于偏微分方程理论 (这里是两个自变量的), 而向量场的积分曲线的问题又归属于常微分方程理论. (更一般地) 回答由下一小节提供.

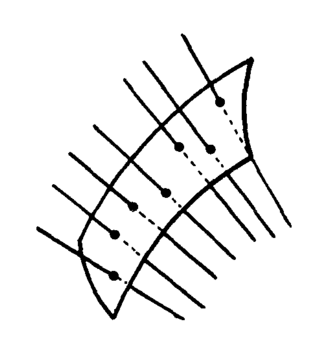
3.5.15.4 弗罗贝尼乌斯定理

设 d 是一个整数 (小于或等于流形 X 的维数), 而 $\xi_i(i=1,\cdots,d)$ 是 X 的向量场, 满足条件: 在 X 的每个点 x, 诸 $\xi_i(x)$ 在 T_xX 内是线性无关的. 用 $V(x)$ 表示它们生成的向量子空间. 则条件

$$\forall x \in X, \forall i,j=1,\cdots,d : [\xi_i,\xi_j](x) \in V(x)$$

对于下列事实的成立是充分必要的: 过 X 的每个点 x, 通过 X 的一个 d 维子流形 Y, 使得对于 Y 的所有 y 有 $T_yY = V(y)$. 此外, y 给定后, 这个 Y 局部地是唯一的.

3.5.15.5 虽然本书用不到这个定理, 但是这个定理对于微分几何是基本的. 在 10.2.2.7 和 10.4.9.5 仅窥其一斑. 一般来说, 空间 $\mathbf{R}^3$ 的双参数直线族不是一张曲面的法线族. 做肯定回答的充分必要条件正是垂直于该直线族的平面族的场满足弗罗贝尼乌斯定理的条件. 而一旦这个条件满足, 找到的是平行曲面的单参数族, 特别参见 10.2.2.12 和 10.6.8.



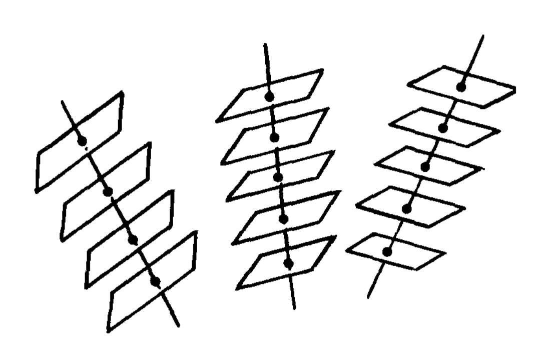


图 3.5.15.5

另外, 在本书中, 弗罗贝尼乌斯定理是基本定理 10.7.3 的证明的一个关键点.

弗罗贝尼乌斯定理还可用来证明关于 2- 微分形式的达布定理: 如果一个 2- 形式 ω 的秩是 r (即 $\omega^r = \omega\wedge\cdots\wedge\omega \neq 0$, 而 $\omega^{r+1}=0$), 并且它是封闭的, 则处处存在局部坐标 $\{x_i\}_{i=1,\cdots,n}$, 使得在此坐标系里, 它可以写成

$$\omega = \mathrm{d}\,x_1 \wedge \mathrm{d}\,x_2 + \mathrm{d}\,x_3 \wedge \mathrm{d}\,x_4 + \cdots + \mathrm{d}\,x_{2r-1} \wedge \mathrm{d}\,x_{2r} \text{ (参见 [11], 140 页)}.$$

弗罗贝尼乌斯定理出现在群论和李代数中, 参见例如 [35]. 在黎曼几何里, 它出现在对称空间, 完全测地线子流形和完整群等理论中, 有关内容请特别参见 [32], [126] 和 [127] 第十章.

3.5.15.6　现在提及弗罗贝尼乌斯定理的对偶说法. 这是一个等价的结果, 但是用微分形式的术语表达. 在 X 的每个点 x, 定义 T_xX 的一个子空间 $P(x)$, 它有一个常维数为 d, 并且是 $n-d$ 个处处线性无关的 1 阶微分形式 $\omega_i(i=1,\cdots,n-d)$ 的公共核. 也就是说

$$P(x)=\bigcap_{i=1}^{n-d}(\omega_i(x))^{-1}(0).$$

那么这里与 3.5.15.4 的条件等价的条件是: 在每个点 x, 每个外微分形式 $\mathrm{d}\omega_i(x)$ 是向量积 $\omega_i(x)\wedge\omega_j(x)$ 的线性组合. 读者容易验证这个等价性. 而弗罗贝尼乌斯定理本身的证明说来实在是更加困难.

3.6　习　　题

3.6.1　设 $p:X\to Y$ 是一个覆叠映射, $\varepsilon\in\Delta_0(Y)$, 而 $\delta=p^*\varepsilon$ (参见 3.3.7). 假定 X 和 Y 是紧致的. 证明对于 Y 的所有 y, $p^{-1}(y)$ 是有限的, 并且对于 X 上的所有连续函数 f, 我们有

$$\int_X f\cdot\delta=\int_Y\left[\sum_{x\in p^{-1}(y)}f(x)\right]\cdot\varepsilon.$$

特别地, 若 Y 是连通的, 用 k 表示覆叠映射的层数 (参见 2.4.4), g 是 Y 上的流形函数, 则

$$\int_X(g\circ p)\cdot\delta=k\int_Y g\cdot\varepsilon.$$

3.6.2　证明 3.5.14 末尾的断言.

3.6.3　我们打算证明所有流形是可度量的, 而不利用 3.1.5.

a) 设 E 是一个向量空间, 我们用 $B(E)$ 表示 E 上的对称双线性形式的集合; 对于 $f\in L(E;F)$, 我们如下定义 $f^*:B(F)\to B(E)$:

$$(f^*\alpha)(x,y)=\alpha(f(x),f(y)).$$

对于一个流形 X, 我们称一个映射 g 为 X 上的一个黎曼结构, 如果对于 X 的每个 x, 对应 $g(x)\in B(T_xX)$, 并且

(i) 对于 X 的所有 (U,φ), 映射

$$U\ni u\mapsto((\theta_u\circ T_{\varphi(u)})(\varphi^{-1}))^*(g(\varphi(u)))\in B(\mathbf{R}^n)$$

是可微的.

(ii) $\forall x \in X, g(x)$ 是正定的.

证明所有流形 (参见 3.1.6) 拥有黎曼结构.

这道习题的下半部分, 假定 X 配备了一个固定的黎曼结构 g, 并且 X 是连通的.

b) 设 $([a,b],f)$ 是 X 的一条曲线, 我们用 $\mathrm{long}\,(f)$ 表示数值 $\int_a^b \sqrt{g(f'(x),f'(x))}\cdot \mathrm{d}\,t$, 并且称其为 f 的长度. 称 $\mathrm{d}\,(x,y) = \inf\{\mathrm{long}\,(f)$: 满足 $f(a)=x, f(b)=y$ 的曲线 $f\}$ 为两个点 $x,y \in X$ 的距离. 证明对于所有 x,y,z, 我们有 $\mathrm{d}\,(x,y) = \mathrm{d}\,(y,x)$, $\mathrm{d}\,(x,z) \leqslant \mathrm{d}\,(x,y) + \mathrm{d}\,(y,z)$.

c) 证明 $\mathrm{d}\,(x,y) = 0$ 蕴涵 $x = y$ (首先证明如果 $\mathrm{d}\,(x,y) = 0$, 则存在在 x 的坐标卡 (U,φ), 使得 $y \in U$; 然后证明, 对于 $\mathbf{R}^n$ 的一个开集上的黎曼结构 g, 对于 U 内的所有紧致集, 存在 $k > 0$, 使得 $g(x,x) \geqslant k\,\|x\|^2$, 这里的范数是 $\mathbf{R}^n$ 的范数).

3.6.4 普吕弗曲面

在 $E = \mathbf{R}^3$ 里, 方程为 $z = a$ 的平面记作 $\mathbf{R}_a^2$, 并且配备通常的拓扑. $\mathbf{R}_a^2$ 的一个点记作 $(x,y)_a$. 把 E 看做当 a 遍历 $\mathbf{R}$ 时, 诸 $\mathbf{R}_a^2$ 的并集, 并且给它配备并集拓扑 (即: E 的一个子集是开集, 当且仅当它与每个 $\mathbf{R}_a^2$ 的交集是开集). 设 $\mathscr{R}$ 是如下定义的等价关系:

$$(x,y)_a \mathscr{R} (x',y')_b \Leftrightarrow \{a = b \text{ 并且 } (x,y) = (x',y), \text{ 或者 } y = y' > 0 \text{ 并且 } xy + a = x'y + b\}.$$

令 $P = E/\mathscr{R}$, 并且设 p 是从 E 到 P 上的典范映射.

a) 证明 P 是分离性的, 局部紧致的 (为了教学法的缘故, 故意同义叠用) 和连通的; 还证明 p 在 $\mathbf{R}_a^2$ 的限制是 $p(\mathbf{R}_a^2)$ 上的一个同胚.

b) 设 $X = p((x,y)_a)$, 并且令 $f_a(X) = (x,y)$. 证明 $(p(\mathbf{R}_a^2), f_a)_{a\in\mathbf{R}}$ 是一个 C^∞ 图册, 并且与这样定义的流形相应的所谓花岗岩拓扑与商拓扑是一样的.

c) 证明集合 $p((0,0)_a)$ 在 P 内是离散的. 由此推出 P 不是可分的. P 称为普吕弗曲面.

3.6.5 设 G 是一个李群, 即一个 C^∞ 流形, 并且映射 $(x,y) \mapsto xy$ 和 $x \mapsto x^{-1}$ 是 C^∞ 类的. 用 L_a 表示左平移 $x \mapsto ax$.

a) 设 δ_e 是 G 在单位元素 e 的切空间 $T_e(G)$ 上的非零密度. 若 $a \in G$, 令 $\delta_a = (T_a L_{a^{-1}})^* \delta_e$. 证明这样就定义了 G 上的一个密度.

b) 设 $\mathrm{d}\,\delta$ 是与这个密度关联的测度, 证明对于 G 上的所有实连续函数 f 和 G 中的所有 a, 我们有

$$\int_G f(x)\mathrm{d}\,\delta = \int_G f(ax)\mathrm{d}\,\delta.$$

(我们说 $\mathrm{d}\,\delta$ 是一个左哈尔测度.)

c) 在 $G = GL(2;\mathbf{R}) = \mathrm{Isom}\,(\mathbf{R}^2;\mathbf{R}^2)$ 的情形, 明确解释 $\mathrm{d}\,\delta$.

第四章　临界点

在对两个流形间的态射 $f: X \to Y$ 定义临界点和正则值之后, 我们研究两个特殊情形: $Y = \mathbf{R}$ 和 $\dim X = \dim Y$.

流形 X 上的数值函数 $f: X \to \mathbf{R}$ 这一情形, 引出非退化临界点和 f 在这类点的指标的概念 (4.2.11). 在非退化临界点, 我们证明了, 不计一个微分同胚的差别, f 是一个非退化二次型 (4.2.12). 这个结果有两个重要推论. 我们仔细研究其中的一个, 这有关 $\mathbf{R}^3$ 曲面相对于它在非退化临界点的切平面的状况 (4.2.20). 另外一个推论是莫尔斯理论, 尽管它不在本书的范围之内, 我们还是叙述了有关结果, 这既是为了拓宽读者的视野, 又是因为在 7.5 节要用到此类结果.

$\dim X = \dim Y$ 这一情形是萨德定理的对象, 它断言 $f: X \to Y$ 的几乎所有值都是正则的 (4.3.1). 正则值的存在性后面多次援引 (7.3.1, 7.5.4, 9.2.8).

4.1　定义. 例子

4.1.1　定义

*给定两个流形 X 和 Y 和从 X 到 Y 内的一个态射 f. 我们说 X 的一个点 x 对于 f 是***临界的** *(对应的,* **正则的***), 如果 f 在 x 不是浸没的 (对应的, 是浸没的).*

我们称 Y 的一个点 y 是 f 的**临界值** (对应的,**正则值**), 如果存在 $x\in f^{-1}(y)$, 使得 x 对于 f 是临界的 (对应的, 对于所有 $x\in f^{-1}(y)$, x 是正则的). 特别说来, 如果 $f^{-1}(y)=\varnothing$, 则 y 是正则值.

在本章, 我们关心以下两个特殊情形.

4.1.2 如果 $Y=\mathbf{R}$, $f\in C^p(X)$, 那么 x 是临界点, 当且仅当 T_xf 不是满射的. 由于到达空间是一维的, 根据定义 2.5.23:

$$\boxed{x\text{ 是临界点 }\iff \mathrm{d}\,f(x)=0}\,.$$

4.1.3 设 $\dim X=\dim Y$, $x\in X$, 那么当且仅当 $T_xf\in\mathrm{Isom}\,(T_xX;T_{f(x)}Y)$, x 对于 f 是正则的, 换言之 (定义 2.6.9):

$$\boxed{x\text{ 是正则点 }\iff f\text{在 }x\text{ 是平展的}}\,.$$

4.1.4 例子

4.1.4.1 设 E 是一个欧几里得空间, 配备标量积 $(\cdot|\cdot)$, 取定 $u\in E, u\neq 0$. 设 $V\subset E$ 是一个子流形, 而 $f:V\to\mathbf{R}$ 是态射 $x\mapsto(u|x)$. 用 N_xV 表示 V 在 x 对于嵌入 $V\to E$ 的法空间 (参见 2.7.2), 则有

4.1.4.2
$$\boxed{x\text{ 对于}f\text{是临界点 }\iff u\in N_xV}\,.$$

为了证明上述结论, 应用 4.1.2. 根据 0.2.8.3 和图表 2.5.23.2, 并且把 f 看做 $(u|\cdot)$ 在子流形 V 上的限制, 微分 $\mathrm{d}\,f(x)$ 正是 T_xX 上的线性形式: $\mathrm{d}\,f(x)=(u|\theta_x(\cdot))$. 而 $(u|\theta_x(\cdot))$ 在 T_xX 上是零, 当且仅当 $u\in(\theta_x(T_xX))^{\perp}=N_xV$.

如果认为 u 是 "竖直的", 函数 $(u|\cdot)$ 就是高度, 而条件 4.1.4.2 就可解释为: 如果 V 在 x 的切平面是 "水平的", 则高度在 x 是临界的.

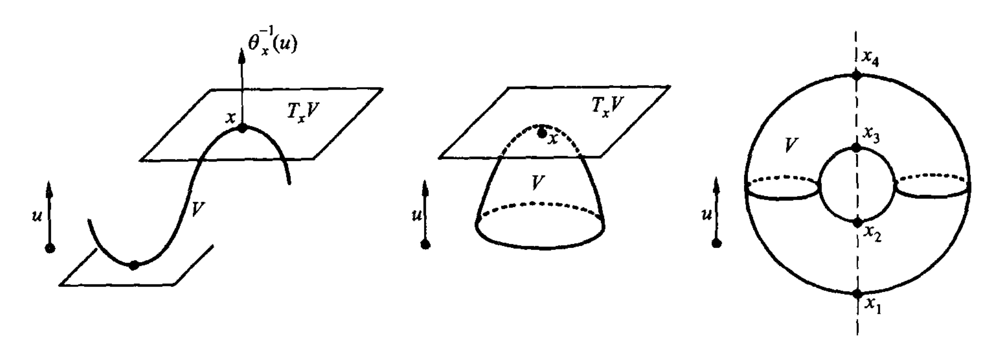


图 4.1.4.2

特殊情形:

4.1.4.3　在 $\mathbf{R}^{n+1}$ 里, 考虑球面 S^n, 设 $\{e_1, \cdots, e_{n+1}\}$ 是 $\mathbf{R}^{n+1}$ 的基底, 映射 $x \mapsto (x|e_i)$ 有两个临界点, 其坐标是 $x_i = \pm 1$, 当 $j \neq i$ 时, $x_j = 0$.

4.1.4.4　环面 $V = (S^1(1/\sqrt{2}))^2$, 像在图 4.1.4.2 中一样嵌入 $\mathbf{R}^3$ 中 (参见 2.1.6.3), 对于映射 $x \mapsto (x|e_3)$ 有四个临界点.

4.1.5　命题

设 X 和 Y 是维数相同的两个流形, X 是紧致的, 而 f 是一个从 X 到 Y 内的态射, 并且 y 是 f 的正则值. 则存在 y 的一个邻域 V, 使得 f 在 $f^{-1}(V)$ 的限制, 看作从 $f^{-1}(V)$ 到 V 上的映射, 是一个覆叠映射.

在 4.3.6 将会看到有 "许多" 正则值.

设 $y \in Y$ 是 f 的正则值, $f^{-1}(y)$ 的所有点 x 是正则点. 由于 $T_xf \in \mathrm{Isom}(T_xX; T_yY)$ (参见 4.1.3), 存在包含 x 的一个邻域 U_x, 使得 $f|_{U_x}$ 上的限制是从 U_x 到 $f(U_x)$ 上的一个微分同胚 (参见定理 2.5.20). 由此推知 $f^{-1}(y)$ 在 X 内是离散的, 因为如果存在 $f^{-1}(y)$ 的点的序列 (x_n) 以 x 为聚点, 则对于充分大的 n, 将有 $x_n \in U_x$, $f|_{U_x}$ 就不会是单射.

既然 $f^{-1}(y)$ 是紧致集 X 内的离散集, 则必然是有限集. 令

$$f^{-1}(y) = \{x_1, \cdots, x_n\}.$$

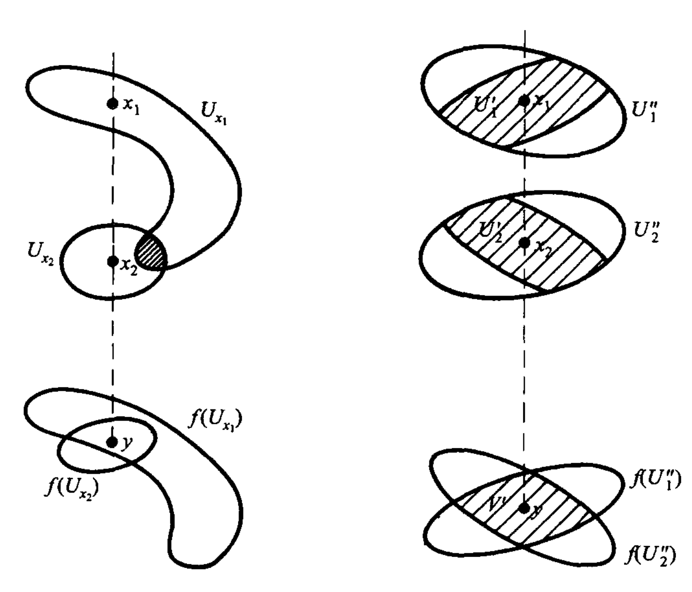


图 4.1.5.1

我们得到包含 x_i 的开集 U_{x_i}, 使得 f 是从 U_{x_i} 到 $f(U_{x_i})$ 上的微分同胚. 只不过 $f(U_{x_i})$ 未必相等, 诸 U_{x_i} 也未必不交, 必须修正它们, 以便适合定义 2.4.1.

由于 X 是分离性的, 存在开集 $U_i'' \subset U_{x_i}$, 两两不交. 但 $f(U_i'')$ 未必相等. 令

$$V' = \bigcap_{i=1}^{n} f(U_i''), \quad \text{并且令} \quad U_i' = U_i'' \bigcap f^{-1}(V').$$

由于 $f|_{U_i'}$ 是双射, 我们有 $f(U_i') = V'$, U_i' 是开集, 并且 f 在 U_i' 的限制是从 U_i' 到 V' 上的微分同胚. 为了谈论覆叠映射, 只差验证 $f^{-1}(V') = \bigcup_{i=1}^{n} U_i'$ 这一件事情了.

由于对于所有 i, $U_i' \subset f^{-1}(V')$, 故暂时仅有

$$\bigcup_{i=1}^{n} U_i' \subset f^{-1}(V').$$

不妨假定 $\overline{V'}$ 是紧致的 (这是合理的, 根据 2.2.11, Y 是局部紧致的, 于是如果有必要, 缩小 V', 就可以归结到这种情形). 令

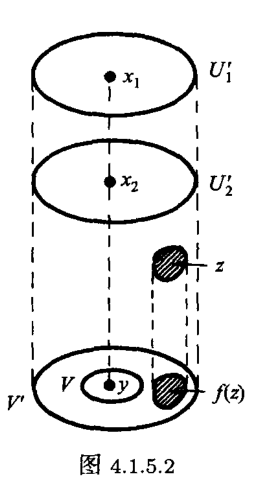


图 4.1.5.2

$$Z = f^{-1}(\overline{V'}) - \bigcup_{i=1}^{n} U_i'.$$

这个 Z 包含 $f^{-1}(V') - \bigcup_{i=1}^{n} U_i'$, 如果我们指出当缩小 V' 和 U_i' 时, Z 将变为空集, 证明即告完成.

而 Z 是 X 中的闭集, 从而是紧致的, 随之 $f(Z)$ 是 V' 中的紧致集, 从而是 V' 中的闭集, 而由于 $y \notin f(Z)$, 故存在 y 的一个邻域 V, 使得 $V \bigcap f(Z) = \varnothing$. 如果令 $U_i = f^{-1}(V) \bigcap U_i'$, 则必有 $f^{-1}(V) = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$, 这证明 f 在 $f^{-1}(V)$ 的限制是一个覆叠映射.

4.1.6　推论

在正则值的一个邻域里 $f^{-1}(y)$ 的基数是常数.

应用 2.4.4 立即得到此结论.

4.1.7　如果 X 不是紧致的, 结论不再成立, 在一个临界值也不成立. 事实上, 推论 4.1.6 在 y_1 和 y_2 的任何邻域内都不成立, 在靠左的图里, 基数总是 1 和 2, 而在靠右的图里, 基数总是 1,2 和 3.

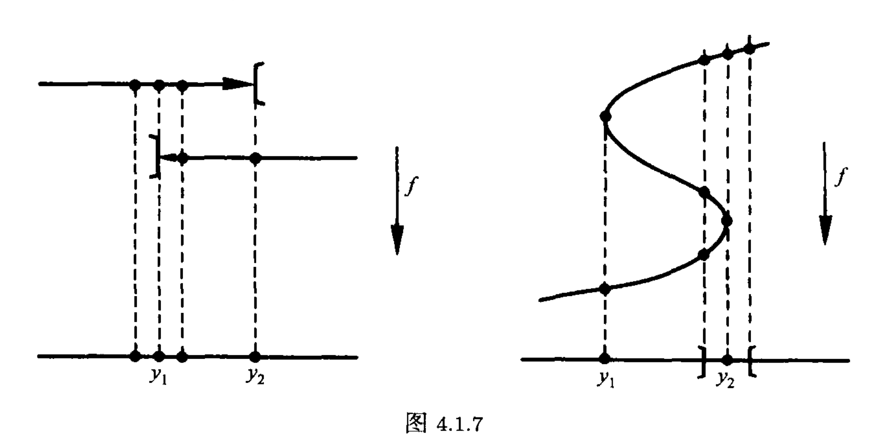


图 4.1.7

4.1.8　对于临界点的明晰计算, 请参见习题 4.4.3—4.4.6.

4.2　数值函数的非退化临界点. 莫尔斯的简约

设 X 是 d 维流形, 而 $f \in C^p(X)$, 这里 $p \geqslant 2$. 给定 $x \in X$, 那么 $\mathrm{d}f(x)$ 是从 T_xX 到 $\mathbf{R}$ 内的线性映射 (参见 2.5.23), 即事实上, $\mathrm{d}f(x) \in (T_xX)^*$, $(T_xX)^*$ 是 T_xX 的对偶空间. 此外, 如果 (U,φ) 是 X 的一个在 x 的坐标卡, 则 $f \circ \varphi^{-1}$ 是从 $\varphi(U)$ 到 $\mathbf{R}$ 内的 C^p 类映射, 于是它有二阶导数, 此二阶导数是从 $\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d$ 到 $\mathbf{R}$ 内的一个**对称双线性映射** (参见 0.2.13): $(f \circ \varphi^{-1})''$.

设 θ 是关联于 (U,φ) 的同构 $T_xX \to \mathbf{R}^d$ (参见 2.5.10); 用

4.2.1
$$B = (f \circ \varphi^{-1})''(\varphi(x)) \circ (\theta, \theta)$$

定义 T_xX 上的对称双线性映射 B. 即对于所有的 $u, v \in T_xX$, 令

$$B(u,v) = (f \circ \varphi^{-1})''(\varphi(x))(\theta(u), \theta(v)).$$

粗看起来 B 依赖坐标卡 (U,φ), 因为 $f \circ \varphi^{-1}$ 和 θ 都依赖于它, 但是我们证明:

4.2.2　命题

*设 X 是 C^p 类流形, $p \geqslant 2$, 而 $f \in C^p(X)$. 如果 x 对于 f 是临界点, 由 4.2.1 定义的在 T_xX 上的对称双线性形式不依赖所用的坐标卡. 把它记作 $\mathrm{Hess}_x f$, 并且称之为 f 在 x 的***黑塞映射**.

4.2.3　设 $(U,\varphi),(V,\psi)$ 是在 x 的两个坐标卡, $\theta: T_xX \to \mathbf{R}^d$(相应的, $\eta: T_xX \to \mathbf{R}^d$) 是在 2.5.10 定义的同构. 则只要 $\mathrm{d}\, f(x)=0$, 就有

$$(f\circ\varphi^{-1})''(\varphi(x))\circ(\theta,\theta)=(f\circ\psi^{-1})''(\psi(x))\circ(\eta,\eta).$$

这只不过是公式 0.2.13.2 和 2.5.11.1 的直接推论, 公式 0.2.13.2 是针对 $z=\varphi(x), h=f\circ\psi^{-1}$ 和 $g=\psi\circ\varphi^{-1}$ 而用的.

4.2.4　设 (I,α) 是 X 的一条曲线, 使得 $\alpha'(0)=u\in T_xX$, 而 x 对于 f 是临界点. 则

$$(\mathrm{Hess}_x f)(u,u)=\frac{\mathrm{d}^2(f\circ\alpha)}{\mathrm{d}\,t^2}(0).$$

这里涉及的是数值函数 $f\circ\alpha: I\to\mathbf{R}$ 的普通二阶导数. 参见习题 4.4.2.

这样就可以避免使用公式 0.2.13.2.

4.2.5　例子

对于图 4.1.4.2 右边的环面, 我们看到 $\mathrm{Hess}_{x_1} f$ 是正定的, $\mathrm{Hess}_{x_4} f$ 是负定的, 而 $\mathrm{Hess}_{x_3} f$ 和 $\mathrm{Hess}_{x_4} f$ 既可取正值, 也可取负值.

4.2.6　有限维向量空间上的对称双线性型复习

设 E 是 $\mathbf{R}$ 上的有限维向量空间. 把 E 上的对称双线性型的向量空间记作 $\mathrm{Bilsym}(E)$. 在 [2],35–37 页可以找到以下结果.

设 $\lambda\in\mathrm{Bilsym}(E)$. 如果 E 的两个向量 x 和 y 满足条件 $\lambda(x,y)=0$, 则称 x 和 y 对于 λ 是正交的. 存在由对于 λ 两两正交向量组成的 E 的基底 $\mathscr{B}$, 在这个基底 $\{e_1,\cdots,e_n\}$ 下, 由 $\lambda(e_i,e_j)$ 组成的 λ 的矩阵 $\Lambda_{\mathscr{B}}$ 是对角的:

$$\Lambda_{\mathscr{B}}=\begin{pmatrix} k_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & k_n\end{pmatrix},\quad k_i=\lambda(e_i,e_i).$$

$k_i{=}0$ 的数目, $k_i>0$ 的数目以及 $k_i<0$ 的数目都不依赖对角化 λ 的基底 $\mathscr{B}$ 的选择.

4.2.7　定义

如果没有为零的 k_i, 则说 λ 是**非退化的**.

4.2.8　定义

严格负的 k_i 的数目称为二次型 λ 的**指标**.

4.2.9　例子

4.2.9.1　还以例子 4.2.5 的环面为例, 其在 x_1 的指标为零, 在 x_4 的指标为 2, 而在 x_2 和 x_3, 指标为 1. 这些指标关系到 V 相对于其切平面的状况: 参见 4.2.20.

4.2.9.2　在 $\mathbf{R}^d$ 上, $\lambda(x_1,\cdots,x_n)=-x_1^2-\cdots-x_i^2+x_{i+1}^2+\cdots+x_d^2$ 是一个指标为 i 的非退化形式.

4.2.10 对于指标的明晰计算, 参见习题 4.4.3—4.4.6.

4.2.11 定义

设 f 是从 X 到 $\mathbf{R}$ 内的 C^p 态射, f 的临界点 x 说成是**非退化的**, 如果 $\mathrm{Hess}_x f$ 是非退化的, $\mathrm{Hess}_x f$ 的指标被定义为 x 的**指标**, 并且记作 $\mathrm{indice}_x f$.

4.2.12 定理

设 X 是一个 C^p 类的流形, $p \geqslant 3$, $f \in C^p(X)$, 而 x 是 f 的一个指标为 i 的非退化的临界点. 则存在一个中心在 x 的坐标卡 (U, φ), 使得若 $x_1, \cdots, x_d$ 是与之关联的局部坐标 (参见 2.2.3), 则

$$(f \circ \varphi^{-1})(x_1, \cdots, x_d) = -x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_i^2 + x_{i+1}^2 + \cdots + x_d^2.$$

我们仅对 $d = 2$ 的情形进行证明. 任意 d 的情形可以以完全相同的方式进行证明, 无丝毫附加的困难. 我们用到两个引理.

4.2.13 引理

设 U 是 $\mathbf{R}^2$ 在 $(0,0)$ 的星形开集, $f \in C^p(U; \mathbf{R})$, $f(0,0) = 0$. 则存在 g 和 $h \in C^{p-1}(U; \mathbf{R})$, 使得 $f = xg + yh$, 其中 x 和 y 是坐标函数.

我们假定 U 是星形的, 故对于任意 $(x, y) \in U$, 连接 $(0,0)$ 和 (x, y) 的线段在 U 内, 即 $\forall t \in [0,1]$: $(tx, ty) \in U$. 函数 $t \mapsto f(tx, ty)$ 定义在 $[0,1]$ 上, 并且

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(tx, ty) t = f(x, y) - f(0,0) = f(x, y).$$

而

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f(tx, ty)) = x \frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) + y \frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty),$$

故

$$f(x, y) = x \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) \mathrm{d}t + y \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty) \mathrm{d}t$$

必有形式

$$f = xg + yh, \text{其中 } g = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) \mathrm{d}t, \quad h = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty) \mathrm{d}t.$$

由于 f 是 C^p 类的, 其偏导数是 C^{p-1} 类的, 从而 g 和 h 是 C^{p-1} 类的. 引理得证.

4.2.14 注释

$$g(0,0) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \mathrm{d}t = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \quad h(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0).$$

4.2.15 引理

设 U 是 $\mathbf{R}^2$ 的星形开集, $f : (\xi, \eta) \mapsto f(\xi, \eta)$ 是从 U 到 $\mathbf{R}$ 内的 C^p 类的映射. 若 $f(0,0) = 0$, 并且 $f'(0,0) = 0$, 则存在函数

$$u, v, w \in C^{p-2}(U; \mathbf{R}) \text{ 使得 } f = x^2 u + 2xyv + y^2 w.$$

我们有 $f'(0,0)=0$, 即

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0.$$

根据引理 4.2.13, 存在 g 和 $h\in C^{p-1}(U;\mathbf{R})$, 使得 $f=xg+yh$. 而 $g(0,0)=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ (注释 4.2.14), 故 $g(0,0)=0$, 由于 $g\in C^{p-1}(U;\mathbf{R})$, 再次应用引理 4.2.13, 存在 $C^{p-2}(U;\mathbf{R})$ 中的 u 和 v_1, 使得 $g=xu+yv_1$.

同样存在 v_2 和 $w\in C^{p-2}(U;\mathbf{R})$, 使得 $h=xv_2+yw$. 最终得 $f=x^2u+xy(v_1+v_2)+y^2w$. 令 $v(x,y)=(1/2)(v_1(x,y)+v_2(x,y))$, 即得引理.

4.2.16 注释

引进常规记号

$$r=u(0,0)=\frac{\partial g}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0),\quad s=v(0,0)=\frac{\partial g}{\partial y}(0,0)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$$

及

$$t=w(0,0)=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0).$$

引理 4.2.15 的公式貌似泰勒展开, 但没有余项.

定理 4.2.12 的证明.

思路在于模仿二次型的配方:

$$ax^2+2bxy+cy^2=a\left(x^2+2\frac{b}{a}xy+\frac{c}{a}y^2\right)=a\left(x^2+\frac{b}{a}y\right)^2+\left(c-\frac{b^2}{a}\right)y^2.$$

不过这里的系数是函数, 必须谨慎处理.

借助在 x 的坐标卡, 问题归结到一个映射 $f\in C^p(U)$, U 是 $\mathbf{R}^2$ 的一个开集, 不妨假定它是星形的, 并且包含 0. 假定 0 是对于 f 的临界点, 并且 $f(0)=0$. 由于 $f'(0)=0$, 根据引理 4.2.15, 存在 $u,v,w\in C^{p-2}(U)$, 使得 $f=ux^2+2vxy+wy^2$.

沿用 4.2.16 的记号, 与 $\mathrm{Hess}_0 f$ 关联的矩阵是

$$\begin{pmatrix} r & s\\ s & t\end{pmatrix}.$$

由假设, $\mathrm{Hess}_0 f$ 是非退化的, 故 $rt-s^2\neq 0$.

第一种情形: $r\neq 0$, 比如 $r>0$; 我们有 $r=u(0,0)>0$. 存在一个开集 U', 使得 $0\in U'\subset U$, 当 $x,y\in U'$ 时 $u(x,y)>0$. 于是有

4.2.17
$$f=u\left(x+\frac{v}{u}\cdot y\right)^2+y^2\left(w-\frac{v^2}{u}\right)$$

首先假定 $rt-s^2>0$, 于是 $w(0,0)-v^2(0,0)/u(0,0)>0$. 随之存在 $\mathbf{R}^2$ 的包含 0 的开集 $U''\in O_{(0,0)}(\mathbf{R}^2)$, 使得在 U'' 上 $w-v^2/u>0$. 于是如果令

$$\xi=\sqrt{u}\left(x+\frac{v}{u}y\right),\quad \eta=\sqrt{w-\frac{v^2}{u}}\cdot y,$$

就有 $f=\xi^2+\eta^2$.

由于根号下的函数不取零值, 我们有 $\xi,\eta\in C^{p-2}(U'')$. 留下的任务是证明映射

$$F:U''\ni(x,y)\mapsto(\xi(x,y),\eta(x,y))\in\mathbf{R}^2$$

在 $(0,0)$ 定义一个坐标卡. 根据 2.5.20, 只需证明 F 在 $(0,0)$ 是平展的. 导数的直接的计算指出 F 在 $(0,0)$ 的雅可比矩阵是 (参见 0.2.8.8)

$$\begin{pmatrix} u(0,0) & v(0,0) \\ 0 & \sqrt{w(0,0)-\dfrac{v^2(0,0)}{u(0,0)}} \end{pmatrix},$$

它的行列式是 $r\sqrt{t-s^2/r}\neq 0$.

如果 $rt-s^2<0$, 有表达式 $f=\xi^2-\eta^2$, 现在 $\eta=y\sqrt{v^2/u-w}$.

第二种情形: $r=0$; 若 $t\neq 0$, 改变 x 和 y 的地位, 就同样进行论证.

留下的情形 $r=t=0$, 通过坐标变换

$$(x,y)\mapsto\left(\frac{x+y}{2},\frac{x-y}{2}\right)$$

就归结为前面的情形.

4.2.18 推论

如果 x 是 $f\in C^p(X)$ 的非退化临界点, 则它是孤立点.

根据定理 4.2.12, 局部地有

$$(f\circ\varphi^{-1})(x_1,\cdots,x_d)=-x_1^2-x_2^2-\cdots-x_i^2+x_{i+1}^2+\cdots+x_d^2,$$

其导数 $(f\circ\varphi^{-1})'(x_1,\cdots,x_d)=2(-x_1,\cdots,-x_i,x_{i+1},\cdots,x_d)$, 在 $(x_1,\cdots,x_d)\neq 0$ 时, 这是一个不等于零的线性型.

如果 x 是任意临界点,, 则没有任何理由是孤立的. 例如 $(x,y)\mapsto x^2$ 或干脆 $(x,y)\mapsto f(x,y)=0$!

4.2.19 例子

设 X 是紧致的, 并且 $f\in C^p(X)$ 仅有非退化临界点, 则它们的数目是有限的.

4.2.20 应用: 一张曲面 ($\mathbf{R}^3$ 的 2 维子流形) 相对于其切平面的位置

设 S 是 $\mathbf{R}^3$ 的一张曲面, 由定理 2.1.2 (iv) 推出, 局部地 S 作为函数 $z=f(x,y)$ 的图像来定义.

设 A 是 S 的坐标为 $(a,b,f(a,b))$ 的一个点, 切平面 T_AS 的方程是

$$(x-a)\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)+(y-b)\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)+(z-f(a,b))(-1)=0,$$

参见 2.5.7.1; 横坐标 x 纵坐标 y 处 T_AS 的高度是

$$(x-a)\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)+(y-b)\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)+f(a,b).$$

我们打算研究

$$h(x,y)=f(x,y)-f(a,b)-(x-a)\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)-(y-b)\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$$

的符号.

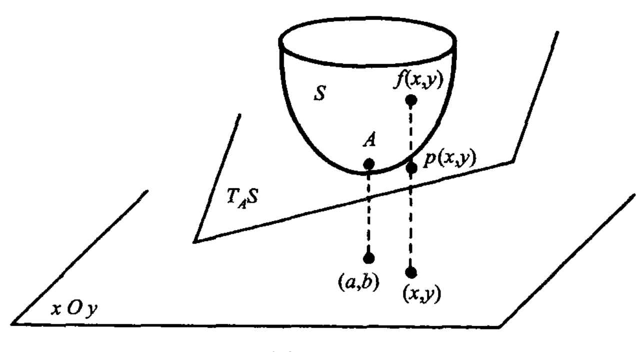


图 4.2.20.1

假定

$$rt-s^2=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b)\right)^2\neq 0;$$

由于

$$h(a,b)=\frac{\partial h}{\partial x}(a,b)=\frac{\partial h}{\partial y}(a,b)=0,$$

并且 h 和 f 有相同的二阶导数, 由定理 4.2.12 得知, 存在 $\mathbf{R}^2$ 的一个包含 (a,b) 的开集 U 和局部坐标 $\xi(x,y)$ 以及 $\eta(x,y)$, 使得 $h|_U=\pm\xi^2\pm\eta^2$.

如果指标是 0: $h|_U=\xi^2+\eta^2$, S 在切平面的上方, 并且除了切点, 是严格的上方.

如果指标是 2: $h|_U=-\xi^2-\eta^2$, S 在切平面的下方, 并且除了切点, 是严格的下方.

如果指标是 1: 比如 $h|_U=\xi^2-\eta^2$, 那么 S 在方程为 $\xi=\eta$ 和 $\xi=-\eta$ 的两曲线切割其切平面, 曲面在两个区域上在切平面的上方, 在另外两个区域上在切平面的下方 (严格地). 图 4.2.20.2 体现了这些状况.

在指标为 1 的情形, T_AS 上区域分界曲线在 A 的切线斜率是方程 $\mu^2r-2\mu s+t=0$ 的不同的两个根.

4.2.21 注释

在 4.2.20 里, 为了研究曲面 S 相对于其切平面的位置, 我们使用了一个特殊的标架, 以便把 S (局部地) 表示为一个图像, 在这个图像里, 我们有 $rt-s^2\neq 0$. 我们

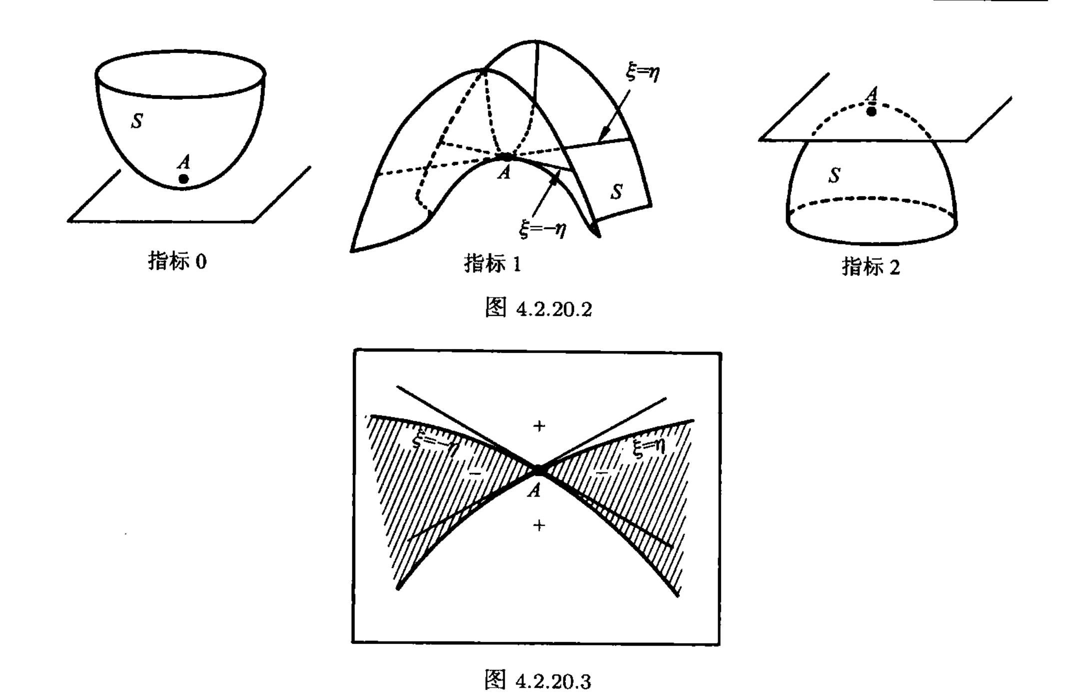


图 4.2.20.2

图 4.2.20.3

证明 (习题 4.4.9), 为了在一点 $A \in S, rt - s^2 \neq 0$, 把曲面表示为图像, 这件事仅依赖于配对 (S, A), 而与标架的选择无关. 我们将称 A 是曲面 S 的非退化点; 当 A 是曲面 S 的非退化点时, 前面的研究让我们知晓 $S \bigcap T_A S$ 的性质. 事实上, $rt - s^2 \neq 0$ 的符号也仅依赖 A (习题 4.4.9). 如果它的符号是正的 (负的), 就称 S 在 A 是正 (负) 曲率曲面. 参见 6.9.7.

4.2.22 注释

但是, 如果 A 不是非退化的, 关于 $S \bigcap T_A S$ 无话可说. 以下各个 $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ 的函数的图像相对于平面 xOy 状况各异:

$$f_1(x,y) = x^2, f_2(x,y) = x^2y^2, f_3(x,y) = x(x^2 - 3y^2) \quad (\text{猴鞍面}),$$
$$f_4(x,y) = \exp\left(-\frac{1}{x^2+y^2}\right)\sin\frac{1}{x^2+y^2}.$$

4.2.23 注释

在 $rt - s^2 > 0$ 的情形, 4.2.20 的结果可以借助泰勒公式用初等方法得到 (习题 4.4.7).

4.2.24 知识: 莫尔斯理论

我们叙述莫尔斯理论的几个基本结果, 而不予以证明, 理论的出发点是定理 4.2.12. 这个理论有十分众多几何方面的应用, 事实上它对于一些几何对象的存在性提供了方法. 有关应用, 参见 [12].

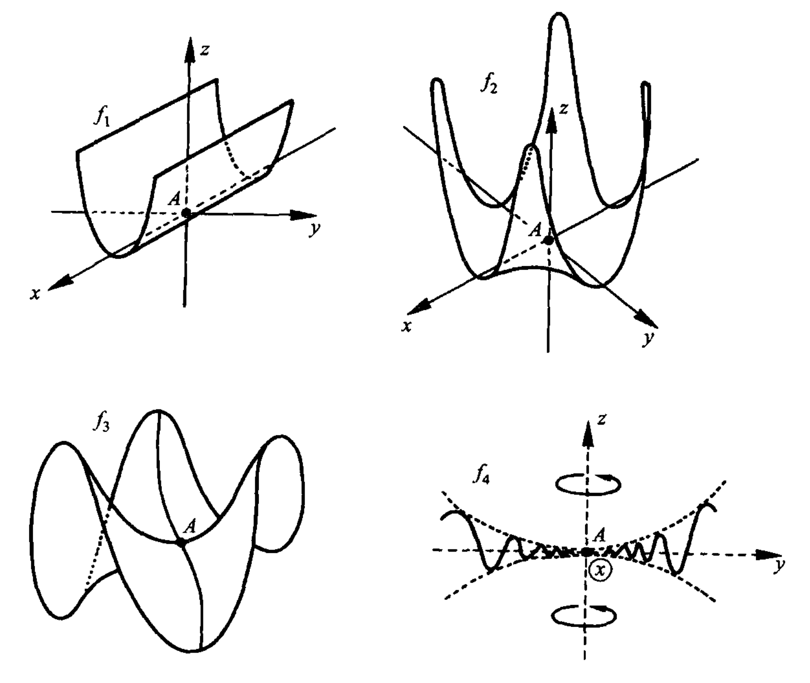


图 4.2.22

用到的系统的参考文献是 [12].

4.2.24.1 设 X 是 C^p 类的紧致流形. 所有 $f \in C^p(X)$ 可以用只有非退化临界点的 $g \in C^p(X)$ 一致逼近; 甚至在一个明确规定的意义下, 可以用这类函数一致逼近 f 的直到 p 阶的各阶 "导数" (参见 [12], 37 页以及习题 4.4.10).

4.2.24.2 对于所有 d 维紧致流形 X, 对于所有整数 $k = 0, 1, \cdots, d$, 可以关联一个有限维的实向量空间, 称为 X 的**实上同调群**, 记作 $H^k(X)$. $H^k(X)$ 的维数称为 X 的**第 k 个贝蒂数**, 记作 $b_k(X)$. 此外, 这个关联是 (反变) 函子的, 其含义是: 如果 $f \in C^0(X; Y)$, 则对于所有 k 存在 $f^* \in L(H^k(Y); H^k(X))$, 使得对于所有 X, 所有 k, 所有 $f \in C^0(X; Y)$ 和 $g \in C^0(Z; X)$ 都有 $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$ 和 $(\mathrm{id}_X)^* = \mathrm{id}_{H^k(X)}$. 交错和

$$\chi(X) = \sum_{k=0}^{d} (-1)^k b_k(X)$$

称为 X 的**欧拉示性数**. 参见 [13], 23 节.

函子性蕴涵两个同胚流形的 H^k 是同构的, 随之 b_k 和 x 是相等的. 如果流形是微分同胚的, 则更是如此. 关于同构于 H^k 的向量空间和在本书框架内定义的德拉姆群, 参见 5.4.10.

4.2.24.3 (参见 5.6, 5.7, 5.8 各节)

$X = S^d$ (球面): 所有 b_k 都是零, 除去

$$b_0 = b_d = 1, \quad 于是\ \chi = 1 + (-1)^d.$$

$X = P^d(\mathbf{R})$ (实射影空间): 所有 b_k 都是零, 除去 $b_0 = 1$, 而

$$b_d = 0, \quad 如果\ d\ 是偶数; \qquad b_d = 1, \quad 如果\ d\ 是奇数.$$

$X = T^d$ (环面): 对于所有 k, $b_k = \begin{pmatrix} d \\ k \end{pmatrix}$, 二项式系数, 由此

$$\chi = (1-1)^d = 0.$$

$X = K$ (克莱因瓶): $b_0 = b_1 = 1, b_2 = 0, \chi = 0$.
$X = T_g$ (g 孔曲面, 参见图 4.2.24.3.1): $b_0 = b_2 = 1$,

$$b_1 = 2g, \chi = 2(1-g).$$

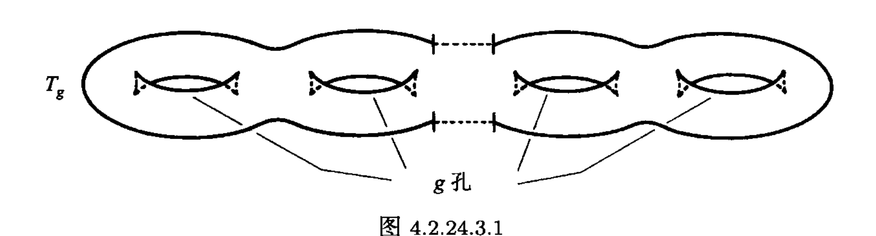


图 4.2.24.3.1

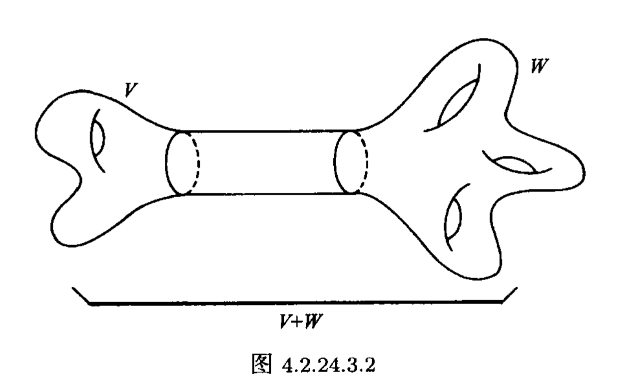


图 4.2.24.3.2

$X = U_g$, 这里 U_g 表示 $U_1 = P^2(\mathbf{R})$ 的 g 个样品的连通和. (维数任意的) 两个流形 V 和 W 的连通和是图 4.2.24.3.2 中描述的操作的结果, 记作 $V\#W$, 这样,

$$U_{g+1} = U_g \# U_1 = U_g \# P^2(\mathbf{R}).$$

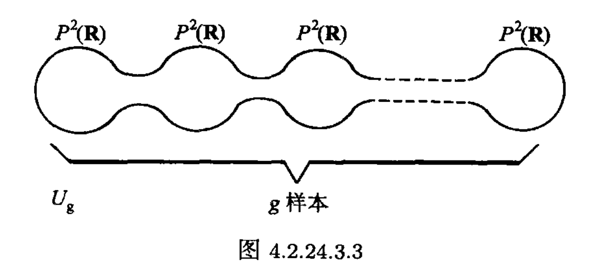


图 4.2.24.3.3

提请注意它与克莱因瓶 K 的关系 $K = U_2$ 以及关系 $U_3 = U_2 \# U_1 = T_1 \# U_1$. 由此推知 $U_{2n+1} = U_1 \# T_n$ (n 孔环面) 和 $U_{2n+2} = K \# T_n$. 因此 U_g 的各个贝蒂数和欧拉示性数是

$$b_0 = 1, \quad b_1 = g - 1, \quad b_2 = 0, \quad \chi = 2 - g.$$

各个 U_g 是非可定向的.

4.2.24.4 **莫尔斯理论的基本定理**

设 X 是紧致流形, $f \in C^1(X)$ 仅有非退化临界点, 用 $c_k(f)$ 表示 f 的指标为 k 的临界点数目 (根据 4.2.19, 它是有限的). 则对于所有的 k, $c_k(f) \geqslant b_k(X)$, 并且

$$\chi(X) = \sum_{k=0}^{d} (-1)^k c_k(f).$$

这个定理的价值在于把 X 的不变量 $b_k(X)$ 同关联于 X 上的任何一个函数 f 的不变量 $c_k(f)$ 联系起来. 至于证明, 参见 [12] 定理 3.5 和 1.5 节.

4.2.25 知识: 紧致曲面 (2 维连通流形) 的分类

看过 4.2.24.3 的诸多例子之后, 人们会揣摩到曲面情形的分类不像 3.4 节研究的曲线分类 (1 维流形) 那样简单, 在 [56], 可以找到基于莫尔斯理论的一个现代研究. 至于古典的证明, 请参见 [123]. 基本的结果是:

4.2.25.1 **定理**

所有可定向的紧致曲面微分同胚于一个 T_g, 所有非可定向的紧致曲面微分同胚于一个 U_g.

请注意这个定理蕴涵一个 U_g 的带两层的定向复叠正是 T_g.

4.2.26 知识其他流形

非紧致曲面的类型可以说是纷繁复杂的. 首先, 可以从紧致曲面挖去一个 (像康托集那样的, 骇人听闻的) 闭集, 其次, 存在图 4.2.26 所示的 "非有界" 的拓扑曲面. 再者, 还存在在无穷远处 "非可定向的" 曲面, 例如, 当我们作无穷多个 $P^2(\mathbf{R})$ 的连通和时, 就会遇到这种情形. 关于这个主题, 请参见 [123], 47 至 51 页.

对于维数 3, 4, 5, $\cdots$ 又如何呢? 即使在紧致曲面的情形, 问题也尚未解决. 这里列举几个标志性的问题. 第一个是所有生成元有限的群可以实现为维数等于或大

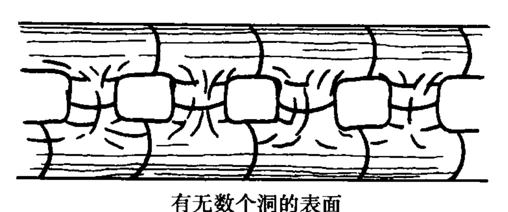

有无数个洞的表面

图 4.2.26

于 4 的一个紧致流形的基本群 (例如参见 [123], 143 页). 由于前一种群的分类逻辑上还没有解决, 故紧致曲面的分类问题也如是.

对于单连通流形, 当其维数大于或等于 5 时, 有一个一般性的结果. 利用同伦的类型和切丛, 可以考虑把紧致流形的分类归结为代数问题. 在维数为 3 和 4 的情形, 分类问题仍然悬而未决: 特别提到, 对于 3 维, 参见 [124]; 对于 4 维, 参见 [125].

4.3 萨 德 定 理

设 X 和 Y 是两个维数分别为 n 和 m 的 C^k 类流形, $k \geqslant 1$, $f \in C^r(X;Y)$. 萨德定理断言, 当 $r \geqslant \sup(n-m+1,1)$ 时, f 的临界点集合 A 的像集 $f(A)$ 在 Y 内是零测度的 (参见 3.3.13). 对于一般性的证明, 参见 [14], 161 页. 下面我们对于 $n=m$ 证明定理, 这是比较简单的, 而且恰是我们所需要的. 当 $n<m$ 时, 定理就是 3.3.17.3; 当 $n>m$ 时, 证明的难度显著增加.

萨德定理断言一个态射总是有少量的临界点的像, 换句话说, 有大量的正则值; 反之, 临界点可以是十分众多的: 看看取常数值的 f, 即可明白.

4.3.1　定理

设 X 和 Y 是有相同维数 d 的两个流形, $f \in C^1(X;Y)$. 则 f 的临界值的集合在 Y 内是零测度的.

由于 X 和 Y 有可数的图册 (参见 3.1.6 和 3.2.6), 根据 0.4.4.1 和 3.3.17.3, 我们满足于对于 $X=U$ 是 $\mathbf{R}^d$ 的开集和 $f \in C^1(U;\mathbf{R}^d)$ 的情形证明定理.

4.3.2　引理

设 U 是 $\mathbf{R}^d$ 的开集, $f \in C^1(U;\mathbf{R}^d)$. 对于每个紧致集 $K \subset U$, 存在从 $\mathbf{R}^+$ 到 $\mathbf{R}^+$ 的函数 λ, 使得对于 K 的所有 x,y,

$$\|f(x)-f(y)-f'(y)(x-y)\| \leqslant \lambda(\|x-y\|)\,\|x-y\|,$$

并且

$$\lim_{t\to 0}\lambda(t)=0.$$

事实上

$$\begin{aligned}&\|f(x)-f(y)-f'(y)(x-y)\|\\=&\left\|\int_0^1\left[\frac{\mathrm d}{\mathrm d t}f(y+t(x-y))-f'(y)(x-y)\right]\mathrm d t\right\|\\=&\left\|\int_0^1(f'(y+t(x-y))(x-y)-f'(y)(x-y))\mathrm d t\right\|\\\leqslant&\int_0^1\|(f'(y+t(x-y))-f'(y))(x-y)\|\,\mathrm d t.\end{aligned}$$

若 $t\in[0,1]$ 和 $(x,y)\in K^2$, 由于 K 是紧致集, $\|f'(y+t(x-y))-f'(y)\|$ 是有界的, 所以, 对于给定的 x 和 y, 存在一个数 $\lambda(\|x-y\|)$, 使得

$$\|f(x)-f(y)-f'(y)\cdot(x-y)\|\leqslant\lambda(\|x-y\|)\,\|x-y\|,$$

其中

$$\begin{aligned}&\lambda(\|x_0-y_0\|)=\sup\{\|f'(y+t(x-y))-f'(y)\|:\\&(x,y)\in K^2,t\in[0,1],\|x-y\|=\|x_0-y_0\|\}.\end{aligned}$$

由这个定义和 f' 在所有紧致集上的一致连续性, 我们有 $\lim\limits_{t\to0}\lambda(t)=0$.

4.3.3 定理 4.3.1 的证明

$\mathbf R^d$ 的开集 U 是紧致正方体的可数族的并集 (参见 3.1.4.1), 故可以假定 (0.4.4.1) U 包含正方体 $[0,1]^d=K$, 并且满足于证明: 若

$$A=\{a\in K:a\text{是 }f\text{的临界点}\},$$

则 $f(A)$ 是 $\mathbf R^d$ 的零测度集. 我们要应用覆盖准则 0.4.4. 令 $M=\sup\{\|f'(x)\|:x\in K\}$, 则 (有限增量定理) 对于所有 $x\in K,a\in A$, 有 $\|f(x)-f(a)\|\leqslant M\cdot\|x-a\|$, 于是

$$f(x)\in B(f(a),M\,\|x-a\|).$$

设 a 是 f 的一个临界点; 对于 $\mathbf R^d$ 的所有 z, $f'(a)(z)$ 属于 $\mathbf R^d$ 的一个严格子空间 $f'(a)(\mathbf R^d)$. 若 $f(a)+f'(a)(\mathbf R^d)$ 是该空间的过点 $f(a)$ 的平移. 对于 K 的所有点 x, $f(x)$ 到这个平移后的空间的距离

$$\mathrm d\,(f(x),f'(a)(\mathbf R^d)+f(a))\leqslant\|f(x)-(f(a)+f'(a)(x-a))\|,$$

(因为 $f(a)+f'(a)(x-a)\in f(a)+f'(a)(\mathbf R^d)$).
取定任何一个包含 $f(a)+f'(a)(\mathbf R^d)$ 的仿射超平面 H. 更有

$$\mathrm d\,(f(x),H)\leqslant\|f(x)-(f(a)+f'(a)(x-a))\|.$$

应用引理 4.3.2, 便得到

$$\mathrm{d}\,(f(x),H) \leqslant \lambda\,(\|x-a\|)\,\|x-a\|\,.$$

假定 $x\in K\bigcap B(a,\eta)$, 由 $\|x-a\|<\eta$, 得 $\mathrm{d}\,(f(x),H)\leqslant\lambda(\eta)\eta$, 又有

$$\|f(x)-f(a)\|\leqslant M\eta,$$

这样, $f(x)$ 就既在中心为 $f(a)$ 半径为 $M\eta$ 的球内, 又在以 H 为中心超平面的半宽度为 $\lambda(\eta)\eta$ 的带形内. 这个球和带形的交集在一个直方体内, 此直方体是 H 内一个棱长为 $2M\eta$ 的正方体和长度为 $2\lambda(\eta)\eta$ 的线段的乘积, 故

4.3.4
$$\mathrm{volume}\,(f(B(a,\eta)\bigcap K))\leqslant 2\lambda(\eta)\eta(2M\eta)^{d-1}.$$

把立方体 $K=[0,1]^d$ 分割成棱长为 $1/n$ 的 n^d 个小立方体. 如果一个小立方体包含一个临界点 a, 这个小立方体将包含在 $B(a,\sqrt{d}/n)$ 内, 根据 4.3.4,

$$\mathrm{volume}\,(f(\text{含 }a\text{ 的小立方体}))\leqslant 2^dM^{d-1}\left(\frac{\sqrt{d}}{n}\right)^d\lambda\left(\frac{\sqrt{d}}{n}\right).$$

最多 n^d 个小立方体包含临界点, 故 $f(A)$ 被一些立方体覆盖, 它们的体积总和不超过

4.3.5
$$n^d2^dM^{d-1}\left(\frac{\sqrt{d}}{n}\right)^d\lambda\left(\frac{\sqrt{d}}{n}\right)=2^dM^{d-1}\left(\sqrt{d}\right)^d\lambda\left(\frac{\sqrt{d}}{n}\right).$$

令 n 趋于无穷, 量 4.3.5 趋于零 (引理 4.3.2), 这正好说明 $f(A)$ 是零测度的.

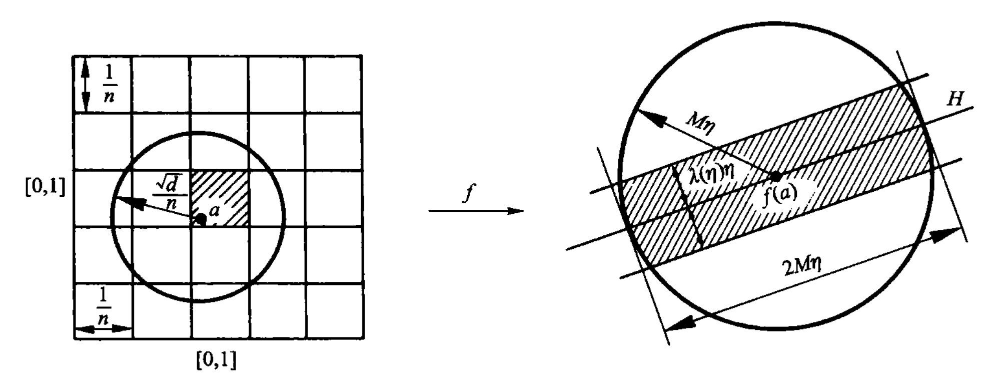


图 4.3.5

4.3.6　推论

如果 $\dim X=\dim Y$, 则态射 $f:X\to Y$ 的正则值集合在 Y 内处处稠密. 特别说来, 总存在正则值.

4.3.7 推论

如果 $f \in C^1(X;Y), \dim X = \dim Y$, A 是 f 的临界点集合, δ 是 Y 上的一个密度, 并且 $h \in C_\delta^{\text{int}}(Y)$, 则

$$\int_Y h \cdot \delta = \int_{Y-f(A)} h \cdot \delta.$$

4.4 习　　题

4.4.1 给定 $\mathbf{R}^d$ 的一个子流形 V, $p \in \mathbf{R}^d - V$. 设 f_p 是从 V 到 $\mathbf{R}$ 内的映射, 其定义是 $f_p(x) = \|x-p\|^2$. 通过 T_xV 刻画 f_p 的临界点的特征.

4.4.2 设 X 是一个流形, 而 f 是 X 上的 C^∞ 类实值函数, a 是它的一个临界点, 而 α 是 X 的一条曲线, $\alpha(0) = a$. 证明

$$\mathrm{Hess}_a f(\alpha'(0)\cdot 1, \alpha'(0)\cdot 1) = (f\circ\alpha)''(0).$$

4.4.3 设 p 是从 S^d 到 $P^d(\mathbf{R})$ 上的典范映射, f 是从 $P^d(\mathbf{R})$ 到 $\mathbf{R}$ 内的映射, 使得

$$f(p(x)) = \sum_{i=1}^{d+1} i x_i^2.$$

求 f 的临界点, 证明它们都是非退化的, 并且计算它们的指标.

4.4.4 设 g 是从 T^2 到 T^2 内的由 $(x,y) \mapsto (x+1/2, -y)$ 定义的映射, G 是群 $\{\mathrm{id}_{T^2}, g\}$. 对于从 $K = T^2/G$ (克莱因瓶) 到 $\mathbf{R}$ 内的函数 h, 跟 4.4.3 同样的问题, h 满足条件 $h(p(x,y)) = \cos 2\pi x \cdot \sin 2\pi y$ (不言而喻, 这里 p 表示从 T^2 到 K 的典范映射).

4.4.5 对于函数 $\sum\limits_{i=1}^{d+1} a_i x_i^2$, 跟 4.4.3 同样的问题; 针对 a_i 的值, 讨论退化性和指标.

4.4.6 a) 对于复射影空间 $P^d(\mathrm{C})$ (参见 2.8.26) 和函数 $\sum\limits_{i=1}^{d+1} a_i|z_i|^2$, 与 4.4.3 同样的问题; 研究退化性和指标.

b) 对于 $P^d(\mathbf{H})$ 和同一函数, 同样的问题.

c) 借助 4.2.24.2, 求 $\chi(P^d(\mathrm{C}))$ 和 $\chi(P^d(\mathbf{H}))$.

d) 跟 4.4.3 同样的问题, 但是针对球 S^d 和函数 $\sum\limits_{i=1}^{d+1} i x_i^2$.

4.4.7 仅仅借助泰勒公式, 证明当 $rt - s^2 > 0$ 时 4.2.20 的结果.

4.4.8 对于 4.2.22 的例子 f_1, f_2, f_3, f_4 确定 $S \bigcap T_A S$. 举出其他例子, 以说明 $S \bigcap T_A S$ 可能是十分复杂的集合.

4.4.9　设 $S \subset \mathbf{R}^3$ 是一个 2 维子流形, A 是 S 的一个点. 给定 $\mathbf{R}^3$ 的两个标架, 使得 S 局部地在 A 在第一个标架里表示成 f 的图像, 而在第二个里表示成 g 的图像; 设在第一个标架里 $A = (a, b, f(a, b))$, 而在第二个标架里, $A = (u, v, g(u, v))$.

试证明: 如果

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)\right)^2 \neq 0,$$

则

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(u,v) \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(u,v) - \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(u,v)\right)^2 \neq 0,$$

并且两个数符号相同.

4.4.10　设 $f \in C^\infty(\mathbf{R}^d; \mathbf{R})$, 并且 $f'(0) = 0$. 证明当 f 加上一个适当的二次函数后, 可以用一个函数 g 逼近, g 在 0 有非退化临界点, 逼近在下述意义下成立: 逼近的度量对应在一个 0 是内点的紧致集上直到 (任意) 给定的所有 k 阶导数的一致收敛.

第五章　流形上的微分法

继第二章之后, 本章对于本书是最基本的. 在流形上人们最常遇到的数学对象就是微分形式. 在实际情况里, 它自然地出现在几何, 力学和物理等学科里. 在对于微分形式下了定义并且引进外微分概念 (5.2.9) 之后, 我们阐述支配它们的运算 (拉回, 同 d 的交换, 局部坐标算法) 的规则.

借助体积形式, 本章系统研究了流形的定向 (5.3 节).

5.4 节引进流形的德拉姆群的概念, 它以函子方式依附于一个流形, 并且用该流形上的微分形式生成. 它出现在几何中, 也跻身于物理学中 (依赖势的力场). 对于平面上的星形开集, 球面, 实射影空间和环面, 我们给予明晰的计算.

最后提到一个重要的例子, 有关一个流形的区域和它的边界 (5.3.32), 此例是斯托克斯定理的基础.

5.1　从 $\Lambda^r T^* X$

5.1.1　我们打算推广 0.3 的概念到流形情形. 设 X 是一个 n 维 C^q 类流形 $(q \geqslant 2)$. 对于 $x \in X$, 引进记号

$$T_x^* X = L(T_x X; \mathbf{R}) = (T_x X)^*,$$

这里 $(T_x X)^*$ 是 $T_x X$ 的对偶空间. 对于 $r \in \{0, 1, \cdots, n\}$, 令

5.1.2
$$\Lambda^r T^* X = \bigcup_{x \in X} \Lambda^r (T_x^* X),$$

这是所有 $\Lambda^r(T_x^* X)$ 的并集. 定义映射 $p : \Lambda^r T^* X \to X$, 它使 $\alpha \in \Lambda^r T_x^* X$ 对应 $p(\alpha) = x$. 采用 2.5.24 对于 TX 的同样手法, 我们要把 $\Lambda^r T^* X$ 构建为一个流形.

5.1.3　为此, 设 (U, φ) 是 X 的任意一个坐标卡, 对于 $x \in U$, $\theta_x : T_x X \to \mathbf{R}^n$ 是与 (U, φ) 关联的典范同构: 参见 2.5.10. 由此诱导出一个映射

5.1.4
$$\tau_\varphi = ((\varphi \circ p), (\theta_{p(\cdot)}^{-1})^*) : p^{-1}(U) \to \mathbf{R}^n \times \Lambda^r (\mathbf{R}^n)^*,$$

其定义是 (参见 0.1.8).

$$\tau_\varphi(\alpha) = (\varphi(p(\alpha)), (\theta_{p(\alpha)}^{-1})^*)$$

5.1.5　定理

设 X 是一个 n 维 C^q 类流形 $(q \geqslant 2), r \in \{0, 1, \cdots, n\}$. 当 (U, φ) 遍历 X 坐标卡时, $\{(p^{-1}(U), \tau_\varphi)\}$ 构成 $\Lambda^r T^* X$ 的 C^{q-1} 类的 $\left(n + \begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix}\right)$ 维图册. 这个图册使 $\Lambda^r T^* X$ 成为 C^{q-1} 类的 $\left(n + \begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix}\right)$ 维的分离性的和可分的流形.

证明完全类似于 2.5.25 的证明. 仅仅必须补充可分性, 这跟 3.1.7 一样; 以及补充坐标卡的相容性. 给定 X 的两个坐标卡 (U, φ) 和 (V, ψ), 并且设 θ 和 η 是在 2.5.10 定义分别跟它们关联的同构. 与之对应的 $\Lambda^r T^* X$ 的坐标卡映射是

$$\tau_\varphi = (\varphi \circ p, (\theta_{p(\cdot)}^{-1})^*) \quad 和 \quad \tau_\varphi = (\psi \circ p, (\eta_{p(\cdot)}^{-1})^*).$$

根据 0.3.10.5 和 2.5.11.1, 我们得到

$$\begin{aligned} \tau_\psi \circ \tau_\varphi^{-1} &= (\psi \circ \varphi^{-1}, (\eta_{p(\cdot)}^{-1})^* \circ ((\theta_{p(\cdot)}^{-1})^*)^{-1}) \\ &= (\psi \circ \varphi^{-1}, (\theta_{p(\cdot)} \circ \eta_{p(\cdot)}^{-1})^*) \\ &= (\psi \circ \varphi^{-1}, ((\varphi \circ \psi^{-1})' \circ \psi \circ p)^*). \end{aligned}$$

而由假设 $\psi, \psi \circ \varphi^{-1}$ 和 $(\varphi \circ \psi^{-1})'$ 都是 C^{q-1} 类的, 从 $L(\mathbf{R}^n; \mathbf{R}^n)$ 到 $L(\Lambda^r(\mathbf{R}^n)^*, \Lambda^r(\mathbf{R}^n)^*)$ 的 $f \mapsto f^*$ 是 C^∞ 类的 (参见 0.3.7.1).

5.1.6 注释

更一般地, 从切丛 TX 出发, 可以构造关联于向量空间上的广泛的代数运算的流形, 只要这个运算跟 5.1.5 的一样, 保证从 E 过渡到 $\Lambda^r E^*$. 例如 $\otimes^r TX, \otimes^r T^*X$, $\mathrm{End}(TX)$.

5.2 流形上的微分形式

5.2.1 定义

设 X 是 n 维 $C^{q'}$ 类流形, 整数 q,r 满足 $0 \leqslant q \leqslant q'-1$ 和 $0 \leqslant r \leqslant n$. 如果一个态射 $\omega \in C^q(X; \Lambda^r T^*X)$ 使得 $p \circ \omega = \mathrm{id}_X$, 则称之为 X 上的 r 阶 C^q–**微分形式**. 它们的集合记作 $\Omega_q^r(X)$.

5.2.2 准则

设 $\omega : X \to \Lambda^r T^*X$, 使得 $p \circ \omega = \mathrm{id}_X$. 怎么知道 $\omega \in \Omega_q^r(X)$ 呢? 我们应用 2.3.2: $\omega \in C^2(X; \Lambda^r T^* X)$, 当且仅当对于 X 的所有坐标卡 (U,φ), $\tau_\varphi \circ \omega \circ \varphi^{-1}$ 是 C^q 类的, 或者更方便的办法是, 仅仅对于 X 的一个图册的所有坐标卡是这样的. 从 5.1.4 和 $p \circ \omega = \mathrm{id}_X$ 得到

5.2.2.1 $\tau_\varphi \circ \omega \circ \varphi^{-1} = (\varphi \circ p \circ \omega \circ \varphi^{-1}, (\theta^{-1})^*(\omega \circ \varphi^{-1})) = (\mathrm{id}_{\varphi(U)}, (\theta^{-1})^*(\omega \circ \varphi^{-1}))$.

这个配对是 C^q 类的, 当且仅当其第二个元素是 C^q 类的, 因为其第一个元素 $\mathrm{id}_{\varphi(U)}$ 是 C^∞ 类的. 注意 $(\theta^{-1})^*(\omega \circ \varphi^{-1}) : \varphi(U) \to \Lambda^r(\mathbf{R}^n)^*$ 是 $\varphi(U)$ 上的 r 阶微分形式. 对于 X 的一个坐标卡 (U,φ) 和 $\omega : X \to \Lambda^r T^*X$, 如果 $p \circ \omega = \mathrm{id}_X$, 则令

5.2.2.2 $$\boxed{\varphi}\, \omega = (\theta^{-1})^*(\omega \circ \varphi^{-1}) : \varphi(U) \to \Lambda^r(\mathbf{R}^n)^*.$$

我们有

5.2.2.3 命题

$\omega \in \Omega_q^r(X)$, 当且仅当对于 X 的一个图册的所有坐标卡 (U,φ) 有 $\boxed{\varphi}\, \omega \in \Omega_q^r(\varphi(U))$.

5.2.3 向量空间的代数结构

如果 $\omega, \sigma \in \Omega_q^r(X)$, 由对于每个 $x \in X$, 令 $(\omega+\sigma)(x) = \omega(x) + \sigma(x)$ 定义 $\omega + \sigma$. 如果 $k \in \mathbf{R}$, 同样定义 $k\omega$. 如果 $\omega \in \Omega_q^r(X), \sigma \in \Omega_q^s(X)$, 同样定义 $\omega \wedge \sigma$. 还需要确定 $\omega + \sigma, k\omega \in \Omega_q^r(X)$ 和 $\omega \wedge \sigma \in \Omega_q^{r+s}(X)$. 而这可以由

$$\boxed{\varphi}\, (\omega+\sigma) = \boxed{\varphi}\, \omega + \boxed{\varphi}\, \sigma, \boxed{\varphi}\, (k\omega) = k\left(\boxed{\varphi}\, \omega\right), \boxed{\varphi}\, (\omega \wedge \sigma) = \boxed{\varphi}\, \omega \wedge \boxed{\varphi}\, \sigma$$

直接得到 (参见 0.1.9 和 0.1.10). 随之有

5.2.3.1 命题

$\Omega_q^r(X)$ 是一个实向量空间;

$$\Omega_q(X) = \bigoplus_{r=0}^{n} \Omega_q^r(X)$$

是一个结合的,分次的和反交换的代数.

5.2.4 拉回像

设 X,Y 是两个流形, $f: X \to Y$ 是一个 $C^{q'}$ 同态, 而 $\omega \in \Omega_q^r(Y)$ $(q \leqslant q'-1)$. 用

5.2.4.1 $f^*\omega = (Tf)^*(\omega \circ f)$, 即 $(f^*\omega)(x) = (T_xf)^*[\omega(f(x))]$

定义 $f^*\omega: X \to \Lambda^r T^* X$.

5.2.4.2 命题

$f^*\omega \in \Omega_q^r(X)$ 叫做 ω 被 f 的**拉回像**. 此外

$$f^*: \Omega_q(Y) \to \Omega_q(X)$$

是一个代数同态.

取像 2.3.2 (iii) 那样的 X 的坐标卡 (U,φ) 和 Y 的坐标卡 (V,ψ). 那么 5.2.4.2 从 5.2.3.1 和公式

5.2.4.3 $$\boxed{\varphi}\,(f^*\omega) = (\psi \circ f \circ \varphi^{-1})^*\left(\boxed{\psi}\,\omega\right)$$

得到. 其中 $(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})^*$ 表示对于

$$\boxed{\psi}\,\omega \in \underline{\Omega}_q^r(\psi(V))$$

在 0.3.7 的意义下的拉回像.

公式 5.2.4.3 是 2.5.13.1 (其中 θ 关联于 (U,φ), η 关联于 (V,ψ)), 0.3.10.5 和 0.3.7 的直接推论. 因为, 我们依次有

$$f^*\omega = (Tf)^*(\omega \circ f), \quad \boxed{\psi}\,\omega = (\eta^{-1})^*(\omega \circ \psi^{-1})$$

和

$$\begin{aligned}
\boxed{\varphi}\,(f^*\omega) &= (\theta^{-1})^*[(Tf)^*(\omega \circ f) \circ \varphi^{-1}] \\
&= [(\theta^{-1})^* \circ (Tf)^*][(\omega \circ f) \circ \varphi^{-1}] \\
&= (Tf \circ \theta^{-1})^*[\omega \circ (f \circ \varphi^{-1})] \\
&= [\eta^{-1} \circ (\psi \circ f \circ \varphi^{-1})']^*[\omega \circ (f \circ \varphi^{-1})] \\
&= ((\psi \circ f \circ \varphi^{-1})')^*[(\eta^{-1})^*(\omega \circ (f \circ \varphi^{-1})] \\
&= ((\psi \circ f \circ \varphi^{-1})')^*[(\eta^{-1})^*[(\omega \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ f \circ \varphi^{-1})]] \\
&= (\psi \circ f \circ \varphi^{-1})^*((\eta^{-1})^*(\omega \circ \psi^{-1})) \\
&= (\psi \circ f \circ \varphi^{-1})^*\left(\boxed{\psi}\,\omega\right).
\end{aligned}$$

代数的同态是显然的. 此外, 从 0.1.11 得到, 对于 $f \in C^{q'}(X;Y), g \in C^{q'}(Y;Z)$, 有

5.2.4.4 $$(g \circ f)^* = f^* \circ g^*.$$

5.2.5 限制

设 X 是一个流形, $\omega \in \Omega_q^r(X)$, $Y \subset X$ 是 X 的一个子流形. 如果 $i: Y \to X$ 表示典范单射:

5.2.5.1 定义

$i^*\omega = \omega|_Y$ 叫做 ω 在 Y 的**限制**. 例如有时会考虑 ω 在 $Y = U \in O(X)$ 的限制.

5.2.5.2 经常会利用一种推理, 叫做 "由于阶的缘故". 设 $Y \subset X$ 是 X 的一个 m 维子流形, 而 $\omega \in \Omega^r(X)$. 那么只要 $r > m$, 就有 $\omega|_Y = 0$. 这是由于, 如果 E, F 是两个向量空间, 而 $\alpha \in \Lambda^r F^*$, $h \in L(E; F)$, 则

$$\text{当 } r > \dim E \text{ 时}, \ h^*\alpha = 0.$$

5.2.6 函数的微分

设 X 是一个 C^q 类的流形, $f \in C^q(X)$. 根据 2.5.29, 我们能够定义 $\mathrm{d}\, f: TX \to \mathbf{R}$; 由此推出 $X \ni x \mapsto \mathrm{d}\, f(x) \in T_x^*X$, 于是就得到一个映射, 仍然记作 $\mathrm{d}\, f$, 并且还是称为 f 的微分,

5.2.6.1
$$\mathrm{d}\, f : X \to T^*X = \Lambda^1 T^*X$$

使得 $p \circ \mathrm{d}\, f = \mathrm{id}_X$.

5.2.6.2 **命题**

$$\mathrm{d}\, f \in \Omega_{q-1}^r(X).$$

这个结论可以由以下两个引理和 5.2.2.3 推出.

5.2.6.3 **引理**

若 $f \in C^q(Y)$, $G \in C^q(X; Y)$, 则 $\mathrm{d}\,(f \circ G) = G^*(\mathrm{d}\, f)$.

事实上, 根据 2.5.29: $\mathrm{d}\,(f \circ G) = \mathrm{d}\, f \circ TG$; 但是 $\mathrm{d}\, f$ 是线性的, 定义 0.1.8 说明 $G^*(\mathrm{d}\, f) = \mathrm{d}\, f \circ TG$.

5.2.6.4 **引理**

如果 $U \in O(E)$, E 是有限维向量空间, $f \in C^q(U)$, 则

$$\mathrm{d}\, f \in \Omega_{q-1}^1(X).$$

事实上, 2.5.23.2 和 5.2.2.2 恰好说明, 对于坐标卡 $(U, \varphi) = (U, \mathrm{id}_U)$,

5.2.6.5
$$\boxed{\varphi}(\mathrm{d}\, f) = f'.$$

5.2.6.6 一个特殊情形是 $\mathrm{d}\, f = 0$ 等价于 f 局部是常数.

5.2.7 向量空间的开集的情形

读者无疑注意到 0.3.1 中定义的, 对于 E 的一个开集 U 的微分形式的概念与把 $U \in O(E)$ 看作流形时这里定义的微分形式的概念有所不同; 这就是为什么尽管名称

相同, 那里的 Ω 却都有下划线. 事实上, 对于 $X = U \in O(E)$, $\Omega(U)$ 和 $\underline{\Omega}(U)$ 的差别, 只是典范同构 $\theta: T_xE \to E, x \in U$ 而已. 今后, 即使对于 $U \in O(E)$, 我们讨论时, 最常使用的还是新概念, 即 $\Omega(U)$. 现在由于以下引理, 等式 0.3.6 的样子变得更惬意:

5.2.7.1 **引理**

设 $U \in O(E)$, E 是 n 维向量空间, $\{e_i\}_{i=1,\cdots,n}$ 是 E 的一个基底, 而 $\{x_i\}_{i=1,\cdots,n}$ 是与这个基底关联的 $U \to \mathbf{R}$ 坐标函数. 则 $\omega \in \Omega_q^r(U)$ 唯一地表示成

5.2.7.2
$$\omega = \sum_I \omega_I \mathrm{d}\, x_I = \sum_{i_1 < \cdots < i_r} \omega_{i_1 \cdots i_r} \mathrm{d}\, x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\, x_{i_r},$$

其中 $\omega_I \in C^q(U)$, 而 $\mathrm{d}\, x_i$ 是函数 x_i 的微分.

事实上, $\Omega_q^r(U)$ 和 $\underline{\Omega}_q^r(U)$ 之间的对应由 $\boxed{\varphi}$ 实现, 这里 $\varphi = \mathrm{id}_U$(5.2.6.4 的证明). 根据 0.3.6, $\boxed{\varphi}\,\omega$ 总可以表示为

$$\boxed{\varphi}\, \omega = \sum_I \alpha_I e_I^*.$$

而如果令

$$\omega = \sum_I \alpha_I \mathrm{d}\, x_I, \quad 其中 \mathrm{d}\, x_I = \mathrm{d}\, x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\, x_{i_r},$$

由于 $\boxed{\varphi}$ 保持代数结构 (参见 5.2.3), 并且 $\varphi = \mathrm{id}_U$, 我们有

$$\begin{aligned} &\boxed{\varphi}\left(\sum_{i_1 < \cdots < i_r} \alpha_{i_1 \cdots i_r} \mathrm{d}\, x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\, x_{i_r}\right) \\ &= \sum_{i_1 < \cdots < i_r} \alpha_{i_1 \cdots i_r} \boxed{\varphi}\,(\mathrm{d}\, x_{i_1}) \wedge \cdots \wedge \boxed{\varphi}\,(\mathrm{d} x_{i_r}) \\ &= \sum_{i_1 < \cdots < i_r} \alpha_{i_1 \cdots i_r} (x_{i_1})' \wedge \cdots \wedge (x_{i_r})', \end{aligned}$$

最后的等号用到了 5.2.6.5. 但 x_i 是线性形式, 必有 $(x_i)' = e_i^*$ (参见 0.3.12 的证明), 于是

$$\boxed{\varphi}\left(\sum_I \alpha_I \mathrm{d}\, x_I\right) = \sum_I \alpha_I e_I^*.$$

取 $\omega_I = \alpha_I$, 即证明了 5.2.7.1.

5.2.7.3 在特殊情形 $E = \mathbf{R}^n$, 我们将默认应用 5.2.7.2 时取 $\mathbf{R}^n$ 的典范基底.

5.2.8 局部表示

现在设 X 是一个 C^p 类的 n 维流形, (U, φ) 是 X 的一个坐标卡, 而 $\{y_i\}_{i=1,\cdots,n}$ 是在 (U, φ) 上的局部坐标 (参见 2.2.3), 即函数 $y_i = x_i \circ \varphi (i = 1, \cdots, n)$.

5.2.8.1 命题

所有的 $\omega \in \Omega^r(X)$ 有一个限制 (参见 5.2.5.1), 它以唯一的方式写成

5.2.8.2
$$\boxed{\omega|_U = \sum_I \omega_I^U \mathrm{d}\, y_I = \sum_{i_1 < \cdots < i_r} \omega_{i_1 \cdots i_r}^U \mathrm{d}\, y_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\, y_{i_r}}\,.$$

而 $\omega \in \Omega_q^r(X)$ $(q \leqslant p-1)$ 当且仅当对于 X 的一个图册的所有坐标卡 (U,φ), 有 $\omega_I^U \in C^q(U)$.

这可以从 5.2.2.3, 5.2.7.2, 5.2.4.2 和 5.2.6.3 应用到 $(\theta^{-1})^*\omega \circ \psi^{-1}\Omega^r(\varphi(U))$ 得到.

设 $\omega \in \Omega^r(Y), f: X \to Y$ 是一个态射, 有了表示 5.2.8.2, $f^*\omega$ 如下计算. 设对于一个坐标卡 (U,φ), 其局部坐标为 $\{y_i\}_{i=1,\cdots,n}$, 我们有

$$\omega|_U = \sum_{i_1<\cdots<i_r} \omega_{i_1\cdots i_r} \mathrm{d}\, y_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\, y_{i_r},$$

则

5.2.8.3 $$\boxed{(f^*\omega)|_{f^{-1}(U)} = \sum_{i_1<\cdots<i_r} (\omega_{i_1\cdots i_r} \circ f)\mathrm{d}\,(y_{i_1} \circ f) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\,(y_{i_r} \circ f)}.$$

这个公式是 0.3.8′ 的对应公式. 即使在向量空间的情形, 我们将使用现在的公式 5.2.8.3, 以代替过时的公式 0.3.8′.

5.2.8.4 例子

设 $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ 的定义是 $f(t) = (\cos t, \sin t)$, 而 $\beta = x\mathrm{d}\,y - y\mathrm{d}\,x \in \Omega_\infty^1(\mathbf{R}^2)$, 则有

$$f^*\beta = \cos t \cdot \mathrm{d}\,(\sin t) - \sin t \cdot \mathrm{d}\,(\cos t) = \mathrm{d}\,t.$$

5.2.9 外微分

5.2.9.1 **命题**

设 X 是一个 n 维 C^q 类的流形, 整数 p 满足 $1 \leqslant p \leqslant q-1$. 则存在一个这样的运算 d, 对于 $\{0,\cdots,n-1\}$ 的所有 r, 它把 $\Omega_p^r(X)$ 变到 $\Omega_{p-1}^{r+1}(X)$ 内, 并且满足以下 4 个公理:

(i) d *在 $\Omega_p^r(X)$ 上的限制是线性的;*

(ii) $\mathrm{d}\,(\alpha \wedge \beta) = \mathrm{d}\,\alpha \wedge \beta + (-1)^{\deg(\alpha)}\alpha \wedge \mathrm{d}\,\beta$;

(iii) $\mathrm{d} \circ \mathrm{d} = 0$;

(iv) *如果 $f \in C^p(X) = \Omega_p^0(X)$, 则 $\mathrm{d}\,f$ 就是 5.2.6 意义下的微分. 这个运算称为***外微分**, *而 $\mathrm{d}\,\alpha$ 称为* **α的微分**.

a) 首先注意到以下事实: 如果 $U \in O(X)$, 而 $\alpha|_U = 0$, 则对于满足 4 个公理的所有运算 d, 都有 $\mathrm{d}\,\alpha|_U = 0$. 事实上, 对于每个 $x \in U$, 存在 (引理 3.1.2) 一个函数 f, 其支集在 U 内, 在 x 的一个邻域内等于 1; 于是 $f\alpha = 0$, 从而 $\mathrm{d}\,(f\alpha) = 0$. 但是 $\mathrm{d}\,(f\alpha) = \mathrm{d}\,f \cdot \alpha + f \cdot \mathrm{d}\,\alpha$. 在 x, 由于 f 局部是常数, 所以 $\mathrm{d}\,f(x) = 0$, 又 $f(x) = 1$, 故 $(\mathrm{d}\,\alpha)(x) = 0$.

b) 满足 4 个公理的运算是唯一的. 事实上, 设给定 $x \in X$ 和 $\omega \in \Omega_p^r(X)$. 取在 x 的任意一个坐标卡 (U,φ), 那么根据 5.2.8.2, 有唯一表示

$$\omega|_U = \sum_{i_1<\cdots<i_r} \omega_{i_1\cdots i_r} \mathrm{d}\, x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\, x_{i_r}.$$

取一个函数 f, 其支集在 U 内, 在 x 的一个邻域内等于 1. 考虑微分形式

$$\widetilde{\omega}=\sum_{i_1<\cdots<i_r}(f\omega_{i_1\cdots i_r})\mathrm{d}(fx_{i_1})\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}(fx_{i_r}),$$

容易验证它属于 $\Omega_p^r(X)$. 由构造本身可知, 在 x 的一个邻域内, f 等于 1, $\omega-\widetilde{\omega}$ 是零, 由 a) 知 $(\mathrm{d}\omega)(x)=(\mathrm{d}\widetilde{\omega})(x)$.4 个公理指出必然有

$$\mathrm{d}\widetilde{\omega}=\sum_{i_1<\cdots<i_r}\mathrm{d}(f\omega_{i_1\cdots i_r})\wedge\mathrm{d}(fx_{i_1})\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}(fx_{i_r}).$$

特别地, 有

$$(\mathrm{d}\omega)(x)=(\mathrm{d}\widetilde{\omega})(x)=\sum_{i_1<\cdots<i_r}(\mathrm{d}(\omega_{i_1\cdots i_r})\wedge\mathrm{d}(x_{i_1})\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}(x_{i_r}))(x),$$

上式只依赖于 ω, 这就证明了 d 的唯一性. 我们注意到, 上面的推理还指出, 如果运算 d 在 X 上存在, 在其作为流形的开集 U 上也存在, 并且

$$(\mathrm{d}\omega)|_U=\mathrm{d}(\omega|_U).$$

c) 前面的公式和 a) 中的唯一性说明, 只需对于所有坐标卡的定义域 U 和所有 $\Omega_p^r(U)$ 构造运算 d. 对于一个坐标卡 (U,φ), 由于 $\boxed{\varphi}$ 是一个代数同态和 5.2.6.5, $\Omega_p^r(U)$ 上满足 4 个公理的算子 d 被 $\boxed{\varphi}$ 转换成一个运算

5.2.9.1′ $$\boxed{\varphi}\circ\mathrm{d}\circ\boxed{\varphi}^{-1}:\underline{\Omega}^r(\varphi(U))\to\underline{\Omega}^{r+1}(\varphi(U)),$$

它满足定理 0.3.12 的性质 (i), (ii), (iii) 和 (iv). 于是 $\mathrm{d}:\Omega^r(U)\to\Omega^{r+1}(U)$ 必然存在.

d) 如此 d 的存在性和唯一性已经保证, 接下来要确认的如果 ω 是 C^p 类的, 则 $\mathrm{d}\omega$ 是 C^{p-1} 类的. 而这可以由 5.2.2.3 和 5.2.9.1′ 直接得到, 5.2.9.1′ 说的是

$$\boxed{\varphi}(\mathrm{d}\omega)=\mathrm{d}\left(\boxed{\varphi}\,\omega\right).$$

(没有标明在 U 上的限制).

5.2.9.2 **命题**

设 X,Y 是两个流形, $f:X\to Y$ 是一个态射. 则

5.2.9.3 $$\boxed{\mathrm{d}\circ f^*=f^*\circ\mathrm{d}}.$$

即有以下交换图表:

5.2.9.4 $$\begin{array}{ccc}\Omega_p^r(X) & \xleftarrow{f^*} & \Omega_p^r(Y)\\ \downarrow{\scriptstyle\mathrm{d}} & & \downarrow{\scriptstyle\mathrm{d}}\\ \Omega_{p-1}^{r+1}(X) & \xleftarrow[f^*]{} & \Omega_{p-1}^{r+1}(y)\end{array}$$

这由 5.2.9.1′, 5.2.4.3 和 0.3.13 得到.

5.2.9.5 例子

设 $Y \subset X$ 是一个子流形, 而 $\omega \in \Omega_1^r(X)$, 则 5.2.5 中的限制运算满足

5.2.9.6
$$\mathrm{d}\,(\omega|_Y) = (\mathrm{d}\,\omega)|_Y.$$

5.2.9.7 局部表示

设 (U, φ) 是 X 的一个坐标卡, $\omega \in \Omega_1^r(X)$, 从公理 (i), (ii), (iii) 和 (iv) 得到

5.2.9.8
$$\boxed{\mathrm{d}\left(\sum_I \omega_I \mathrm{d}\,x_I\right) = \sum_I \mathrm{d}\,\omega_I \wedge \mathrm{d}\,x_I}.$$

5.2.10 微分形式的连续族

现在推广 0.3.15 到流形.

5.2.10.1 设 X 是一个 C^q 类流形, 整数 p 满足 $0 \leqslant p' \leqslant q-1$. 给定 $\mathbf{R}$ 的一个区间 I 和一个映射

$$\alpha : I \times X \to \Lambda^r T^* X,$$

如果:

(i) $p \circ \alpha : I \times X \to X$ 是典范投影;

(ii) 对于 X 的所有坐标卡 (U, φ), 由 5.2.2.2 的 $\boxed{\varphi}$ 诱导的映射 $\boxed{\varphi}\,\alpha : I \times \varphi(U) \to \Lambda^r(\mathbf{R}^n)^*$ 满足定义 0.3.15.1 的条件.

则称 α 是 I 上的 r 阶 **C^p-微分形式的单参数的连续族**.

5.2.10.2 勿庸置疑, 只需对于选定的一个图册的所有坐标卡验证 (ii) 即可.

5.2.10.3 如果 I 是开区间, $\alpha \in C^p(I \times X; \Lambda^r T^* X)$, 则条件 (ii) 自动满足.

5.2.10.4 如果 $I = [a, b]$, 由

$$\left(\int_a^b \alpha_t \mathrm{d}\,t\right)(x) = \int_a^b \alpha(t, x)\mathrm{d}\,t \in \Lambda^r T_x^* X$$

定义 $\int_a^b \alpha_t \mathrm{d}\,t \in \Omega_p^r(X)$, 上式右端的 $\int_a^b \alpha(t, x)\mathrm{d}\,t$ 按照 0.4.7 定义. 至于 $\int_a^b \alpha_t \mathrm{d}\,t \in \Omega_p^r(X)$, 这个事实则由 0.3.15.5 和定义 5.2.10.1 得到.

5.2.10.5 命题

如果 α 是 I 上的 r 阶 C^p- 微分形式的连续族, 则

$$\mathrm{d}\left(\int_a^b \alpha_t \mathrm{d}\,t\right) = \int_a^b \mathrm{d}\,\alpha_t \mathrm{d}\,t.$$

取定坐标卡后, 从 0.3.15.6 和 5.2.9.1′ 得到.

5.2.10.6 引理

设 X, Y 是两个 C^p 类流形, $F : [0,1] \times X \to Y$. 用 F_t 表示映射 $X \ni x \mapsto F(t,x) \in Y$, 用 $T \cdot F$ 表示映射 $[0,1] \times TX \to TY$, 使得 $T \cdot F|_{\{t\} \times TX} = T(F_t)$. 假定 F 满足:

(i) $\forall t \in [0,1], F_t \in C^p(X;Y)$;

(ii) $T \cdot F \in C^0([0,1] \times TX; TY)$.

则对于所有 $\beta \in \Omega^r_{p-1}(Y)$, 族 $t \mapsto F_t^*\beta$ 是 X 上的 C^{p-1}- 微分形式的连续族.

连续性是局部性质, 取定 $(t_0, x) \in [0,1] \times X$, 可以找到在 x 的一个坐标卡 (U, φ), 在 $f(x)$ 的一个坐标卡 (V, ψ) 和 $\varepsilon > 0$, 使得对于所有 $t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$, 都有 $F_t(U) \subset V$. 事实上, $T \cdot F$ 的连续性蕴涵 $F \in C^0([0,1] \times X; Y)$, 于是在开集 $F^{-1}(V) \in O_{(t_0,x)}([0,1] \times X)$ 里根据乘积拓扑的定义, 可以取 $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \times U \subset F^{-1}(V)$.

通过坐标卡 (U, φ) 和 (V, ψ) 转换 $F|_{[t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon] \times U}$ 和 $\beta|_V$, 利用 5.2.4.3, 我们可以认为引理的假设针对的是

$$U' \in O(\mathbf{R}^m), V' \in O(\mathbf{R}^n), G : [0,1] \times U' \text{和} \gamma \in \Omega^r_{p-1}(V'),$$

而要考虑的微分形式族是 $t \mapsto G_t^*\gamma$(在 0.3.7 的意义下). 2.5.26.1 指出转换后的映射 TG 正是 (G_t, G_t'). 假设条件 (ii) 蕴涵

$$G_t' \in C^0([0,1] \times U'; L(\mathbf{R}^m; \mathbf{R}^n)).$$

由于应用 0.3.7.1 得到 $G_t^*\beta = (G_t')(\beta \circ G_t)$, 上式恰好说明 $t \mapsto G_t^*\gamma$ 是 C^{p-1}- 微分形式的连续族 (参见 0.3.15.1).

5.3　最大阶的微分形式和定向

我们打算定义一个抽象流形的定向. 希望参照 0.1.13, 给每个 T_xX 定向, 而 x 遍历 X. 但是显然要以连续的方式选择定向. 0.1.13 的定义启发我们要通过微分形式过渡到定向.

5.3.3*　定义

设 X 是一个 C^p 类的 d 维流形, 这里 $p \geqslant 1$. 如果一个微分形式 $\omega \in \Omega_0^d(X)$ 满足: 对于所有 $x \in X$, 有 $\omega(x) \neq 0$, 则称此 ω 为 X 上的一个**体积形式**.

由于 $\omega(x) \in \Lambda^d T_x^* X - \{0\}$, 故 $\omega(x)$ 确定 T_xX 的一个定向, 并且映射 $x \mapsto \omega(x)$ 是连续的. $\omega(x)$ 关联 $\mathrm{Orient}(T_xX)$ 一个元素, 令 x 对应这个元素就得到一个映射, 但是暂时我们还不能谈论这个映射的连续性. 只有给

$$\bigcup_{x \in X} (\{x\} \times \mathrm{Orient}\,(T_xX)) = \mathrm{Orient}\,(X)$$

* 原书编号如此. —— 译者注

配备了拓扑结构才能谈及 (参见命题 5.3.28). 不过仅借助体积形式我们也可以做绝大部分事情.

给定两个体积形式 ω 和 ω'. 对于 X 的所有 x, 由于 $\dim \Lambda^d T_x^* X = 1$, 故存在 $f(x)$ 使得

$$\omega'(x) = f(x)\omega(x).$$

5.3.4 *如果在等式 $\omega'(x) = f(x)\omega(x)$ 中, 对于所有 $x \in X$ 有 $f(x) > 0$, 则称两个体积形式 ω 和 ω' 是等价的. 等价地说, $\omega(x)$ 和 $\omega'(x)$ 在 T_xX 上诱导同样的定向 (参见 0.1.13).*

5.3.5 定义

*X 的体积形式的一个等价类叫作流形 X 的一个***定向***. 一个流形 X 称作***可定向的***, 如果它有一个定向, 否则, 称作***不可定向的***.*

于是, x 是可定向的, 当且仅当它可以在 x 上定义一个体积形式.

5.3.6 *存在不可定向的流形:* 例如下图的默比乌斯带 (建议读者尝试启发性地证明, 甚至严格证明). 对于不可定向性的证明, 参见 5.3.18 以及习题 5.9.10 和 5.9.11.

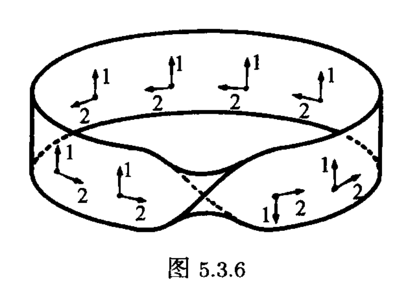


图 5.3.6

5.3.7 定理

设 X 是可定向的流形. 如果 X 有 k 个连通分支, 则 X 有 2^k 个定向.

设 ω 和 ω' 是两个定向 (由假设, 它们存在). 对于所有 x, 有 $\omega(x) = f(x)\omega'(x)$, 而 ω 和 ω' 既然属于 $\Omega_0^d(X)$, 则都是连续的, 函数 f 也是连续的 (应用 5.2.2.3). 从 X 到 $\{-1, +1\}$ 的映射

$$x \mapsto \text{signe}\,(f(x))$$

对于 $\{-1, +1\}$ 配备离散拓扑, 这个映射是连续的, 于是在每个连通分支上保持一个正负号. 有 k 次两个可能符号的选择, 故共有 2^k 个可能的定[illegible]

5.3.8 可定向流形的例子

5.3.8.1 R^d 是典范地用体积[illegible]

5.3.8.2 若 X 是一个可定向的流形, 则 X 的所有开集 U 都是可定向的子流形.

X 是可定向的, 则存在 $\omega \in \Omega_0^d(X)$, 对于所有 x, $\omega(x) \neq 0$, 于是 ω 在 U 的限制属于 $\Omega_0^d(U)$ (参见 5.2.5.1), 并且对于所有 $x \in U$, $\omega(x) \neq 0$.

5.3.8.3 给定两个流形 X 和 Y 和一个覆叠映射$p : X \to Y$, 如果 Y 通过体积形式 ω 是可定向的, 则 X 可以通过 $p^*\omega$ 典范地定向.

事实上, $(p^*\omega)(x) = (T_xp)^*(\omega(p(x))$ (参见 5.2.4), 而 p 是平直的, 故

$$T_xp \in \mathrm{Isom}(T_xX; T_{p(x)}Y), \quad \text{于是 } (p^*\omega)(x) \neq 0.$$

5.3.8.4 如果乘积流形 $X \times Y$ 是可定向的, 则流形 X 和 Y 也是可定向的. 如果 X 和 Y 是可定向的, 则 $X \times Y$ 亦然.

参见习题 5.9.8.

对于其他的例子, 我们利用以下引理 (以后还会用到):

5.3.9 引理

设 X 是 C^p 类流形, G 是 $\mathrm{Diff}(X)$ 的一个无不动点真不连续的子群, G 在 X 上的作用是 C^p 类的. 又设 $\alpha \in \Omega_p^r(X)$ 对于 G 是不变的, 即 $\forall g \in G, g^*(\alpha) = \alpha$. 则存在唯一的 $\beta \in \Omega_p^r(X/G)$, 使得 $p^*\beta = \alpha$, 其中 p 表示 X 到 X/G 上的典范映射.

α 对于 G 不变这个条件是必要的. 事实上, 设 $p^*\beta = \alpha$, 由于对于 G 的所有 g, $p \circ g = p$, 故 (参见 5.2.4.4)

$$(g^* \circ p^*)(\beta) = g^*\alpha = (p \circ g)^*\beta = p^*\beta = \alpha.$$

该条件是充分的. 事实上, 设 $y \in Y = X/G$, $x \in p^{-1}(y)$, 令

5.3.9.1 $$\beta(y) = ((T_xp)^{-1})^*\alpha(x).$$

由于 p 是平直的 (定理 2.4.9), $T_xp \in \mathrm{Isom}\,(T_xX; T_yY)$, 于是 $(T_xp)^{-1} \in \mathrm{Isom}(T_yY; T_xX)$, 从而 5.3.9.1 有意义. 再者, $\beta(y)$ 仅依赖于 y, 而不依赖于 x. 因为, 如果选择另一个 $x' \in p^{-1}(y)$, 则存在 $g \in G$, 使得 $g(x) = x'$. 于是有 $T_{x'}p = T_{g(x)}p$, 而 $p(x) = (p \circ g)(x)$, 故

$$T_x(p \circ g) = T_xp = T_{g(x)}p \circ T_xg.$$

因为 T_xg 是一个同构, 遂得

$$T_{g(x)}p = T_xp \circ (T_xg)^{-1} \quad \text{和} \quad ((T_{g(x)}p)^{-1} = T_xg \circ (T_xp)^{-1}.$$

进而得到

$$\begin{aligned}((T_{x'}p)^{-1})^*\alpha(x') &= ((T_{g(x)}p)^{-1})^*\alpha(g(x)) \\ &= [T_xg \circ (T_xp)^{-1}]^*\alpha(g(x)) \\ &= ((T_xp)^{-1})^*(g^*(\alpha)(x)) = ((T_xp)^{-1})^*\alpha(x).\end{aligned}$$

最后的等号用到 α 对于 G 是不变的这个假设. 于是 5.3.9.1 确切定义了 $\beta(y)$, 随之定义了 β.

由构造本身, 必有 $\alpha = p^*\beta$. 还需要验证当 α 是 C^p 类时, β 也如是. 为此, 对于定理 2.4.9 中 X/G 的那种类型的坐标卡中的映射 $\psi = \varphi \circ p^{-1}$, 应用判别准则 5.2.2.3 即可.

5.3.10 例子

5.3.10.1 环面 $T^d = \mathbf{R}^d/\mathbf{Z}^d$ (参见 2.4.12.1).

$\mathbf{Z}^d$ (等同于 $\mathbf{R}^d$ 的一个平移子群) 是无不动点真不连续的.

微分形式 $\mathrm{d}\,x_i (i = 1, \cdots, d)$(在 5.2.7 中定义) 在 $\Omega^1_\infty(\mathbf{R}^d)$ 内, 它们对于 $\mathbf{Z}^d$ 是不变的 (可立即验证), 故存在 T^d 上的 1 阶典范微分形式 $\omega_i (i = 1, \cdots, d)$, 使得 $p^*(\omega_i) = \mathrm{d}\,x_i$.

根据 5.3.9, 所有微分形式 $\alpha \in \Omega^r_p(T^d)$ 都表示成

$$\alpha = \sum_I \alpha_I \omega_I, \quad \text{其中 } I = (i_1, \cdots, i_r), \omega_I = \omega_{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega_{i_r}, \alpha_I \in C^p(T^d).$$

必须注意不存在 T^d 上的函数 y_i 使得 $\mathrm{d}\,y_i = \omega_i$, 见习题 5.9.13.

5.3.10.2 *设 α 是 X 上的一个体积形式, G 是无不动点真不连续的, α 对于 G 是不变的. 则存在 X/G 上的体积形式 β, 使得 $p^*(\beta) = \alpha$.*

对于 $\alpha(x) \neq 0$ 应用 5.3.9, 由于 $T_x p$ 是同构, 公式 5.3.9.1 指出 $\beta(y) \neq 0$.

于是如果 X 是可定向的, 并且拥有一个对于 G 不变的定向, 则 X/G 是可定向的.

对于环面 T^d 正是这种情形, 它通过 $\omega = \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_d$ (5.3.10.1 的记号) 是典范地可定向的.

5.3.11 流形上的内积

为了给球面和某些射影空间定向, 我们要利用 0.1.18 定义的内积. 设 ξ 是 X 上的一个向量场: 参见 3.5.1; 假设 X 是 C^p 类的, 而 ξ 是 C^{p-1} 类的.

5.3.12 命题

对于 $\alpha \in \Omega^r_{p-1}(X)$ 用

$$(\mathrm{int}\,(\xi) \cdot \alpha)(x) = \mathrm{int}\,(\xi(x))(\alpha(x)), \quad \forall x \in X$$

定义映射 $\mathrm{int}\,(\xi)$. 则它把 α 对应到

$$\mathrm{int}\,(\xi)\alpha \in \Omega^{r-1}_{p-1}(X),$$

即

$$\mathrm{int}\,(\xi) : \Omega^r_{p-1}(X) \to \Omega^{r-1}_{p-1}(X).$$

并且对于所有 ξ, α, β, 有

$$\mathrm{int}\,(\xi)(\alpha \wedge \beta) = (\mathrm{int}\,(\xi) \cdot \alpha) \wedge \beta) + (-1)^{\deg(\alpha)} \alpha \wedge (\mathrm{int}\,(\xi) \cdot \beta)).$$

最后的公式由 0.1.20 直接得到. 现在要指出 $\operatorname{int}(\xi)\cdot\alpha$ 是 C^{p-1} 类的. 为此, 通过坐标卡转换到以下情形:

$$X = U \in O(\mathbf{R}^n), \quad \alpha \in \Omega^r_{p-1}(U), \quad \text{而 } \xi \in C^{p-1}(U;\mathbf{R}^n).$$

由公式 0.1.19 得知

$$\mathbf{R}^n \times \Lambda^r(\mathbf{R}^n)^* \ni (\xi,\alpha) \mapsto \operatorname{int}(\xi)\cdot\alpha \in \Lambda^{r-1}(\mathbf{R}^n)^*$$

是双线性的, 那么应用 0.2.8.3 和 0.2.15.1 并利用微分学的惯用手法就得到 $\operatorname{int}(\xi)\cdot\alpha$ 是 C^{p-1} 类的.

在 $r = d = \dim X$ 的情形, 我们看一看 $\operatorname{int}(\xi)\cdot\alpha$ 的明晰计算. 给定 X 的一个坐标卡 (U,φ), 用 $\{x_i\}$ 表示 U 上的局部坐标 (参见 5.2.8), 并且用

5.3.13
$$\frac{\partial}{\partial x_i} : U \to TX$$

表示 U 上的向量场, 使得对于所有 $x \in U$,

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}(x)\right\}_{i=1,\cdots,d}$$

是 T_x^*X 的基底 $\{\mathrm{d}\,x_i\}_{i=1,\cdots,d}$ 在 T_xX 中的对偶基底. 这个向量场是 C^{p-1} 类的, 因为它经过 φ 转换到 $\varphi(U)$ 上是常向量 $e_i \in \mathbf{R}^n$ 的向量场. 同样, 如果 ξ 是 C^{p-1} 类, 则有

5.3.14
$$\boxed{\xi = \sum_i \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}},$$

其中 $\xi \in C^{p-1}(U)$.

设 $\alpha|_U = a\cdot\mathrm{d}\,x_1 \wedge\cdots\wedge \mathrm{d}\,x_d$ (参见 5.2.8.2), 根据 0.1.22 和 5.2.7, 我们发现

5.3.15
$$\boxed{\operatorname{int}(\xi)\alpha|_U = \sum_i (-1)^{i-1} a\cdot\xi_i \mathrm{d}\,x_1 \wedge\cdots\wedge \widehat{\mathrm{d}}\,x_i \wedge\cdots\wedge \mathrm{d}\,x_d}.$$

此外, 这个公式表明, 如果 α 是一个体积形式, 由于对于所有 $x\in U$, $\alpha(x)\neq 0$, 则有:

5.3.16 推论

如果 α 是 X 上的一个 C^{p-1} 类的体积形式, 则它确定 X 上的 C^{p-1} 类的向量场到 $\Omega^{d-1}_{p-1}(X)$ 上的一个同构.

5.3.17 例子

5.3.17.1 *设 X 是 $\mathbf{R}^{d+1}$ 的 d 维 C^p 类的一个子流形, 含于 $\mathbf{R}^{d+1}$ 的一个开集 U 内.* 设 $\xi \in C^{p-1}(U;TU)$ 是 U 上的一个向量场, 使得对于所有 $x \in X$, $\xi(x) \notin T_xX$ (如果这是可能的, 例如, 在默比乌斯带的一个邻域 U 内, 这是不可能的).

再设 ω_0 是 $\mathbf{R}^{d+1}$ 的一个典范体积形式, 则

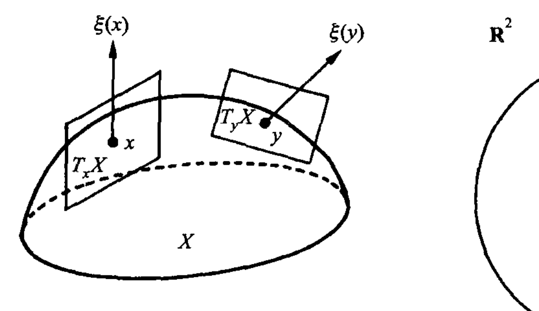
$$\operatorname{int}(\xi)\omega_0 \in \Omega^d_{p-1}(U),$$

并且

$$\boxed{\operatorname{int}(\xi)\omega_0|_X \text{ 是 } X \text{ 上的一个体积形式}}$$

事实上, 我们利用 T_xX 的一个基底 $\{\xi_1, \cdots, \xi_d\}$, 补充 $\xi(x)$ 得到 $T_x\mathbf{R}^{n+1}$ 的一个基底 $\{\xi(x), \xi_1, \cdots, \xi_d\}$. 由于 ω_0 是体积形式, 我们有

$$(\operatorname{int}(\xi)\omega_0)(\xi_1, \cdots, \xi_d) = \omega_0(\xi(x), \xi_1, \cdots, \xi_d) \neq 0.$$



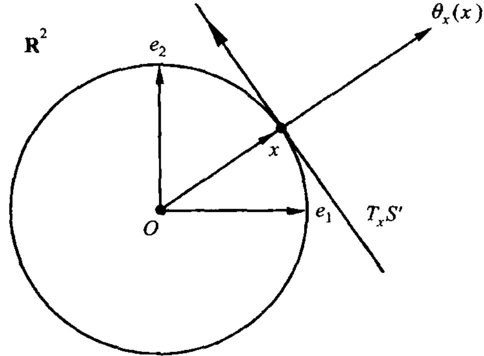


图 5.3.17

再者, 由于 $\operatorname{int}(\xi)\omega_0$ 在 U 上连续, 故在 X 上亦然. 在 6.4 节将看到, 如果取 $\xi(x)$ 为单位法向量, 就在 $\mathbf{R}^{d+1}$ 的子流形上发现了一个典范体积形式.

5.3.17.2 球面 $S^d \subset \mathbf{R}^{d\pm1}$ 的情形

取 $U = \mathbf{R}^{d+1}$, 而取向量场,

$$x \mapsto \xi(x) = \theta_x^{-1}(x) \in T_x\mathbf{R}^{d+1},$$

θ_x 是 $T_x\mathbf{R}^{d+1}$ 和 $\mathbf{R}^{d+1}$ 之间的典范同构, 参见 2.5.12.3.那么体积形式 $\sigma = \operatorname{int}(\xi)\omega_0\,|_{S^d}$ 定义 S^d 上的一个典范定向.

明晰的计算

根据 5.3.15, 我们有

$$\sigma(x_1, \cdots, x_{d+1}) = \operatorname{int}\left(\sum_{i=1}^{d+1} x_i e_i\right)(\omega_0)$$
$$= \sum_{i=1}^{d+1} (-1)^{i-1} x_i \mathrm{d}\, x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\,\widehat{x}_i \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\, x_{d+1}.$$

对于 S^1:

$$\sigma(x,y) = x\mathrm{d}\,y - y\mathrm{d}\,x.$$

对于 S^2:

$$\sigma(x,y,z) = x\mathrm{d}\,y \wedge \mathrm{d}\,z + y\mathrm{d}\,z \wedge \mathrm{d}\,x + z\mathrm{d}\,x \wedge \mathrm{d}\,y.$$

5.3.17.3 **注释**

如果用 $SO(d+1)$ 表示 $\mathbf{R}^{d+1}$ 的旋转群, 那么 σ 对于 $SO(d+1)$ 作用在 S^d 上是不变的.

事实上, 如果 $f \in SO(d+1)$, 则 $f^*(\omega_0) = (\det f)\omega_0 = \omega_0$ (参见 0.1.12), 故 ω_0 对于 $SO(d+1)$ 是不变的, 随之 ξ, 进而 σ 均如此.

5.3.17.4 所有曲线是可定向的

事实上, 一条曲线微分同胚于 $\mathbf{R}$ 或 S^1 (参见 3.4.1), 而根据 5.3.8.1 和 5.3.17.2, $\mathbf{R}$ 和 S^1 都是可定向的.

在 d 是奇数的情形, 我们要利用 5.3.9 证明 $P^d(\mathbf{R})$ 是可定向的. 更精确的表述是:

5.3.18 定理

$P^d(\mathbf{R})$ 当 d 是奇数时是可定向的, 当 d 是偶数时是不可定向的.

考虑 Diff (S^d) 的子群

$$G = \{\mathrm{id}_{S^d}, S\},\ \text{其中}\ S = -\mathrm{id}\,(\mathbf{R}^{d+1})|_{S^d}.$$

它作用在 S^d 上是真不连续的, 并且无不动点. 而 $P^d(\mathbf{R}) = S^d/G$ (参见 2.4.12.2). 此外, 有$S^*\sigma = (-1)^{d+1}\sigma$. 我们有

$$S^*\sigma = S^*(\mathrm{int}\,(\xi)\cdot\omega_0) = \mathrm{int}\,(\xi\circ S)(S^*\omega_0),$$

而 $\xi \circ S = \xi$, 并且 $S^*\omega_0 = (\det S)\cdot\omega_0 = (-1)^{d+1}\omega_0$. 于是如果 d 是奇数, 则 σ 对于 G 是不变的. 从 5.3.9 推知 $P^d(\mathbf{R})$ 是可定向的.

若 d 是偶数, 而假定 $P^d(\mathbf{R})$ 是可定向的, 那么 $P^d(\mathbf{R})$ 上有一个体积形式 θ. 设 p 是从 S^d 到 $P^d(\mathbf{R})$ 上的典范映射, 我们将有一个 S^d 上的体积形式 $\eta = p^*(\theta)$ (参见 5.3.8.3). 但是 $p \circ S = p$, 故 $S^*\eta = S^*(p^*\theta) = (p\circ S)^*\theta = p^*\theta = \eta$. 如果用 σ 表示 S^d 上的典范体积形式, 将存在 $f \in C^0(S^d, \mathbf{R}^*)$, 使得 $\eta = f\sigma$. 由于 $S^*\eta = \eta$, 又有 $S^*\sigma = -\sigma$, 将有 $f\circ S = -f$. 而这是荒谬的, 因为由于 S^d 是连通的, f 应当保持固定的正负号.

5.3.19 *克莱因瓶 (参见 2.4.12.4) 不是可定向的: 习题 5.9.10.*

截止到目前, 我们仅依靠 5.3.5 来判断一个流形是否是可定向的. 现在提供一个涉及坐标卡的判别准则.

5.3.20 定义

设 X 和 Y 是两个维数相同的流形, 分别被体积形式 α 和 β 定向. 我们说从 X 到 Y 上的一个微分同胚 f **保持 X 和 Y 的定向**, *如果对于 X 的所有 x, 有*

$f^*(\beta)(x) = \lambda(x)\alpha(x)$, 其中 $\lambda(x) > 0$ (我们已经知道 $\lambda(x) \neq 0$, 这里要求 $\lambda(x) > 0$). 如果 $X = Y$, 则说 f **保持** X **的定向.**

例子: $f = -\mathrm{id}_{\mathbf{R}^{d+1}}|_{S^d}$ 保持 S^d 的定向 $\Leftrightarrow d$ 是奇数.

5.3.21 注释

设 X, Y, Z 是三个定向的流形, 并且 $f \in \mathrm{Diff}\,(X; Y)$ 和 $g \in \mathrm{Diff}(Y; Z)$ 保持定向, 则 $g \circ f$ 保持定向.

这由等式 $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$ (参见 5.2.4.4) 得到.

5.3.22 定义

设 X 是已经定向的流形. 我们说一个坐标卡是**正的**, 如果 $\varphi \in \mathrm{Diff}\,(U; \varphi(U))$ 保持定向, U 作为开集按 5.3.8.2 被定向, 而 $\mathbf{R}^d$ 的开集按照 5.3.8.2 和 5.3.8.1 被定向.

5.3.23 注释

设 (U, φ) 和 (V, ψ) 是定向的 X 的两个正的坐标卡, 则

$$\psi \circ \varphi^{-1} \in \mathrm{Diff}\,(\varphi(U \bigcap V); \psi(U \bigcap V))$$

保持 $\mathbf{R}^d$ 的典范定向, 从而根据 0.3.10.4, 我们有

5.3.23.1 $$J(\psi \circ \varphi^{-1})(u) > 0, \quad \forall u \in \varphi(U \bigcap V).$$

设 X 是一个定向流形, 而 (U, φ) 是一个坐标卡. 如果此坐标卡不是正的, 假定 U 是连通的, 取 $\mathbf{R}^d$ 的由

$$s(x_1, \cdots, x_d) = (-x_1, x_2, \cdots, x_d)$$

定义的自同构 s, 则 $(U, s \circ \varphi)$ 还是 X 的一个坐标卡, 并且是正的. 如果 U 不是连通的, 在 U 的每个连通分支上, 如果有必要的话, 进行如上的操作, 这样就可以得到 (定向的) X 的一个图册, 其坐标卡都是正的. 于是跟这些坐标卡关联的微分同胚 $\psi \circ \varphi^{-1}$ 保持 $\mathbf{R}^d$ 的开集的典范定向. 我们要证明这个必要条件也是充分的.

5.3.24 定理

流形 X 是可定向的, **当且仅当它**有一个图册, 其所有过渡微分同胚保持定向.

设 $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ 是一个这样的图册, 而 $\{(U_i, \varphi_i, \psi_i)\}_{i \in I}$ 是 X 的与之关联的单位分解. 取 $\mathbf{R}^d$ 的典范体积形式 ω_0, 并且令

$$\omega = \sum_i \psi_i(\varphi_i^* \omega_0).$$

由于 ω 是连续的 (φ_i 和 ψ_i 是连续的, φ_i 是 C^p 类的, $p \geqslant 1$), 所以只需证明 $\omega(x) \neq 0$.

取定 $x \in X$, 存在 i_0 使得 $\psi_{i_0}(x) \neq 0$. 而对于 $i \neq i_0$, 我们有

$$\begin{aligned}\psi_i \varphi_i^*(\omega_0)(x) &= \psi_i(x)(\varphi_i \circ \varphi_{i_0}^{-1} \circ \varphi_{i_0})^*(\omega_0)(x)\\ &= \psi_i(x)\varphi_{i_0}^*((\varphi_i \circ \varphi_{i_0}^{-1})^*(\omega_0)(x)).\end{aligned}$$

而根据 0.3.10.4,

$$(\varphi_i \circ \varphi_{i_0}^{-1})^*(\omega_0) = J(\varphi_i \circ \varphi_{i_0}^{-1})(\omega_0).$$

再由 5.3.23.1 得 $J(\varphi_i \circ \varphi_{i_0}^{-1}) > 0$. 改写 $\omega(x)$ 为

$$\omega(x) = \left(\psi_{i_0}(x) + \sum_{i \neq i_0} \psi_i(x) J(\varphi_i \circ \varphi_{i_0}^{-1}) \circ \varphi_{i_0}(x)\right) \varphi_{i_0}^*(\omega_0)(x).$$

括号里是非负项的有限和, 其中项 $\psi_{i_0}(x) > 0$, 故 $\omega(x) \neq 0$.

5.3.25 注释

为了论述严格, $\omega(x)$ 理应写作

$$\omega(x) = \sum_i \psi_i \varphi_i^*(\omega_0|_{\varphi_i(U_i)}),$$

并且尤其需要对在 5.2 节意义下的微分形式建立与公式 0.3.10.4 类似的公式. 这些就留给读者作练习.

我们还可以用另外的方式表征可定向的流形. 对于一个流形 X, 用集合的并集定义

5.3.26 $$\widetilde{X} = \text{Orient}\,(X) = \bigcup \{x\} \times \text{Orient}\,(T_x X).$$

并定义映射 $p : \widetilde{X} \to X$ 如下: 令 $\alpha \in \{x\} \times \text{Orient}\,(T_x X)$ 对应 $p(\alpha) = x$.

5.3.27 定理

设 X 是一个 C^p 类流形. 则 $\widetilde{X} = \text{Orient}\,(X)$ 可以配备一个定向的 C^p 类的流形结构, 使得映射 p 是从 $\widetilde{X}$ 到 X 的 2 层的覆叠映射.

我们依下列方式构造一个图册. 令 X 的所有坐标卡 (U, φ) 对应 $\widetilde{X}$ 的一个坐标卡 $(\widetilde{U}, \widetilde{\varphi})$, 其定义是

$$\widetilde{U} = \{(x, \alpha(x)) : x \in U, \alpha(x) \in \text{Orient}(T_x X) \text{ 并且 } (T_x\varphi)^*\omega_0 \in \alpha(x)\}, \widetilde{\varphi} = \varphi \circ p.$$

其中 ω_0 是典范体积形式, 而 $(T_x\varphi)^*\omega_0 \in \alpha(x)$ 表示在 $T_x X$ 上由 $(T_x\varphi)^*\omega_0$ 诱导的定向正是 $\alpha(x)$. 图册的公理必然满足, 我们来一一验证. $\widetilde{U}$ 的并集是 $\widetilde{X}$. 因为对于 $\omega = (x, \xi) \in \widetilde{X}$, 存在 X 的一个坐标卡 (U, φ), 使得 $x \in X$, 而如果 $(T_x\varphi)^*\omega_0 \notin \xi$, 则令 $\psi = s \circ \varphi$, 这里 s 是从 $\mathbf{R}^d$ 到 $\mathbf{R}^d$ 上的映射, 其定义是 $s(x_1, \cdots, x_d) = (-x_1, x_2, \cdots, x_d)$, 则有 $(T_x\psi)^*(\omega_0) \in \xi$, 故 ω 属于 $(\widetilde{U}, \widetilde{\psi})$ 的定义域 $\widetilde{U}$.

我们有

$$\widetilde{\varphi}(\widetilde{U}) = \varphi(p(\widetilde{U})) = \varphi(U)$$

是 $\mathbf{R}^d$ 的开集. $\widetilde{\varphi}$ 是从 $\widetilde{U}$ 到 $\varphi(U)$ 上的双射: 它当然是满射, 而如果对于

$$\omega_1 = (x_1, \xi_1) \in \tilde{u} \quad \text{及} \quad \omega_2 = (x_2, \xi_2) \in \tilde{u}$$

有 $\widetilde{\varphi}(\omega_1)=\widetilde{\varphi}(\omega_2)$, 则 $\varphi(p(\omega_1))=\varphi(p(\omega_2))$, 而 φ 是双射, 随之 $p(\omega_1)=p(\omega_2)$, 即 $x_1=x_2=x$. 由于 $(T_x\varphi)^*(\omega_0)$ 既在 ξ_1 内, 又在 ξ_2 内, $\mathrm{Orient}(T_xX)$ 的这两类必然重合.

接下来验证给定两个坐标卡 $(\widetilde{U},\widetilde{\varphi})$ 和 $(\widetilde{V},\widetilde{\psi})$, 映射 $\widetilde{\psi}\circ\widetilde{\varphi}^{-1}$ 是从 $\widetilde{\varphi}(\widetilde{U}\bigcap\widetilde{V})$ 到 $\widetilde{\psi}(\widetilde{U}\bigcap\widetilde{V})$ 的 C^p 类微分同胚. 为此, 必须验证 $\widetilde{\varphi}(\widetilde{U}\bigcap\widetilde{V})$ 是 $\mathbf{R}^d$ 的一个开集. 设 $\omega\in\widetilde{U}\bigcap\widetilde{V}$, 且 $x=p(\omega)$. 用 ω_0 表示 $\varphi(U\bigcap V)$ 的典范定向, 那么 $(T_x\varphi)^*(\omega_0)$ 和 $(T_x\psi)^*(\omega_0)$ 在 $\mathrm{Orient}(T_xX)$ 的同一元素类里, 必有 $J(\psi\circ\varphi^{-1})(\varphi(x))>0$. 于是存在一个开集 W, 使得 $x\in W\subset U\bigcap V$, 并且在整个 W 上 $J(\psi\circ\varphi^{-1})\circ(\varphi(x))>0$.

这样由 $p^{-1}(W)\bigcap\widetilde{U}\subset\widetilde{U}\bigcap\widetilde{V}$ 得到

$$\widetilde{\varphi}(p^{-1}(W)\bigcap\widetilde{U})=\widetilde{\varphi}(p^{-1}(W))\bigcap\widetilde{\varphi}(\widetilde{U})\subset\widetilde{\varphi}(\widetilde{U}\bigcap\widetilde{V}),$$

而由于 $\widetilde{\varphi}=\varphi\circ p$, 故 $\varphi(W)\bigcap\varphi(U)=\varphi(W\bigcap U)\subset\widetilde{\varphi}(\widetilde{U}\bigcap\widetilde{V})$.

而 W 是 X 的开集, 这蕴涵 $\varphi(W\bigcap U)$ 是 $\mathbf{R}^d$ 的一个开集, 终于得到对于所有元素 $\widetilde{\varphi}(\omega)\in\widetilde{\varphi}(\widetilde{U}\bigcap\widetilde{V})$, 存在一个开集 $\varphi(W\bigcap U)$, 使得

$$\widetilde{\varphi}(\omega)\in\varphi(W\bigcap U)\subset\widetilde{\varphi}(\widetilde{U}\bigcap\widetilde{V});$$

这恰好说明是 $\widetilde{\varphi}(\widetilde{U}\bigcap\widetilde{V})$ 显然是 $\mathbf{R}^d$ 的开集.

最后,

$$\widetilde{\psi}\circ\widetilde{\varphi}^{-1}=(\psi\circ p)\circ(\varphi\circ p)^{-1},$$

故

$$\widetilde{\psi}\circ\widetilde{\varphi}^{-1}|_{\widetilde{\varphi}(\widetilde{U}\cap\widetilde{V})}=\psi\circ\varphi^{-1}|_{\varphi(U\cap V)},$$

这个映射必然是 C^p 类的.

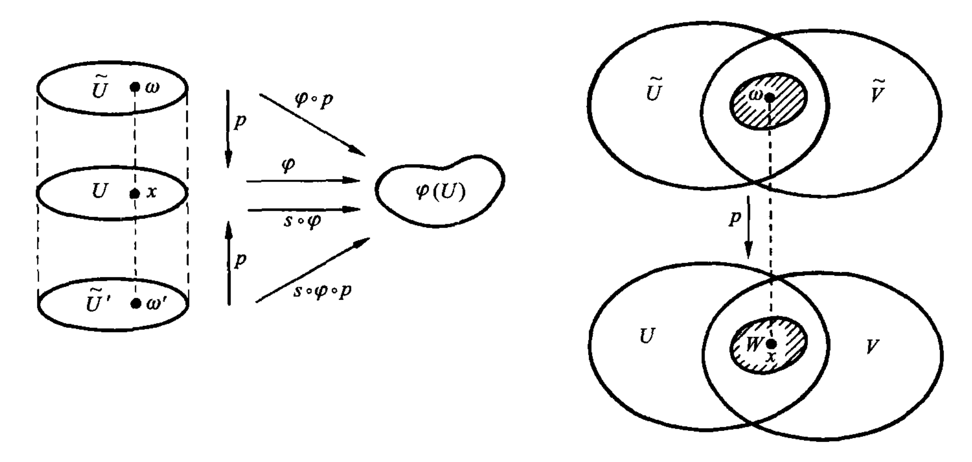


图 5.3.27

在验证 $\widetilde{X}$ 是分离性的和可分的之前, 先验证 $\widetilde{X}$ 是定向的, 并且 p 是一个覆叠映射. 根据前面的计算, 我们有

$$J(\widetilde{\psi}\circ\widetilde{\varphi}^{-1})=J(\psi\circ\varphi^{-1})>0,$$

故从 5.3.24 得到 $\widetilde{X}$ 是定向的. 现在考虑从 $\widetilde{X}$ 到 X 的映射 p. 对于 X 的所有 x, 如果考虑 X 的在 x 的坐标卡 (U,φ), 我们有 $p^{-1}(U)=\widetilde{U}\bigcup\widetilde{U'}$, 其中 $\widetilde{U}$ 是关联于 (U,φ) 的坐标卡, 而 $\widetilde{U'}$ 是关联于 $(U,s\circ\varphi)$ 的坐标卡, s 是前面已经引进的映射. 由构造过程知 $\widetilde{U}$ 和 $\widetilde{U'}$ 微分同胚于 U, 并且是不交的 (相反的定向), 故 p 是一个 2 层覆叠映射.

$\widetilde{X}$ 是分离性的. 给定 $\omega\neq\omega'$. 如果 $p(\omega)\neq p(\omega')$, 既然 X 是分离性的, 存在 X 的两个坐标卡的分别包含 $p(\omega)$ 和 $p(\omega')$ 的不交的定义域 U 和 U', 于是 $\omega\in\widetilde{U}$, 而 $\omega'\in\widetilde{U'}$, 并且 $\widetilde{U}\bigcap\widetilde{U'}=\varnothing$. 如果 $p(\omega)=p(\omega')$, 那么 $\omega\in\widetilde{U}$, $\widetilde{U}$ 是坐标卡 $(\widetilde{U},\widetilde{\varphi})$ 的定义域, $\omega'\in\widetilde{U'}$, $\widetilde{U'}$ 是关联于前面用过的坐标卡 $(U,s\circ\varphi)$ 的坐标卡的定义域, 并且 $\widetilde{U}\bigcap\widetilde{U'}=\varnothing$.

最后 $\widetilde{X}$ 是可分的, 这是因为 X 是可分的, 并且 $p:\widetilde{X}\to X$ 是 2 层覆叠映射, 必然存在 $\widetilde{X}$ 的开集的可数族, 使得 $\widetilde{X}$ 的每个开集都是这个族的若干元素的并集: 参见 3.1.7.1.

5.3.28　命题

X 的一个定向等价于给定 $f\in C^0(X;\widetilde{X})$, 使得

$$p\circ f=\mathrm{id}_X.$$

设 ω 是 X 的一个体积形式. 对于 X 的所有 x, 令 $f(x)=(x,\alpha(x))$, 其中 $\alpha(x)$ 是在 T_xX 上由 $\omega(x)$ 确定的定向. 我们有

$$p\circ f=\mathrm{id}_X,\quad f:X\to\widetilde{X}.$$

尚需证明 f 是连续的. 设 (U,φ) 是 X 的一个坐标卡, 对于 X 的由 ω 定义的定向是正的, 而 $(\widetilde{U},\widetilde{\varphi})$ 是 $\widetilde{X}$ 的与 (U,φ) 关联的在定理 5.3.27 的证明中所使用的坐标卡.

如果 $\widetilde{\varphi}\circ f\circ\varphi^{-1}$ 是连续的, 定理 2.3.2 的准则 (iii) 将保证 f 是连续的. 而这里

$$\widetilde{\varphi}\circ f\circ\varphi^{-1}=\varphi\circ p\circ f\circ\varphi^{-1}=\varphi\circ\varphi^{-1}=\mathrm{id}\,|_{\varphi(U)}$$

是 C^0 类的!

反之, 设 $f\in C^0(X;\widetilde{X})$, 使得 $p\circ f=\mathrm{id}_X$. 我们利用定理 5.3.24 证明 X 是可定向的. 设 $x\in X$, 而 $f(x)=(x,\alpha(x))\in\widetilde{X}$. 那么 $\alpha(x)$ 是 T_xX 的一个定向, 故存在 X 在 x 的一个坐标卡 (U,φ), 使得 $T_x\varphi$ 保持以下定向: T_xX 的定向 $\alpha(x)$ 和 $T_{\varphi(x)}\mathbf{R}^d$ 的典范定向. 设 $(\widetilde{U},\widetilde{\varphi})$ 是 $\widetilde{X}$ 的坐标卡. 映射 f 是连续的, 故 $U\bigcap f^{-1}(\widetilde{U})$ 是 X 的一个包含 x 的开集, 并且

$$(U\bigcap f^{-1}(\widetilde{U}),\varphi|_{U\cap f^{-1}(\widetilde{U})})$$

的集合是 X 的一个图册. 设 $(V\bigcap f^{-1}(\widetilde{V}),\psi|_{V\bigcap f^{-1}(\widetilde{V})})$ 是另一个坐标卡, 取定 $x\in U\bigcap V\bigcap f^{-1}(\widetilde{U})\bigcap f^{-1}(\widetilde{V})$, $T_x\varphi$ 保持 T_xX 的定向 $\alpha(x)$ 和 $T_{\varphi(x)}\mathbf{R}^d$ 的定向, $T_x\psi$ 保持 T_xX 的定向 $\alpha(x)$ 和 $T_{\psi(x)}\mathbf{R}^d$ 的定向, 由此根据注释 5.3.23 得到

$$J(\psi\circ\varphi^{-1})(\varphi(x))>0.$$

这个图册的过渡微分同胚 $\psi\circ\varphi^{-1}$ 保持定向:X 必是定向流形.

5.3.29 定理

设 X 是一个连通流形. 则当且仅当 $\widetilde{X}$ 是连通的, X 是可定向的.

为确立这个结果, 我们要利用下列引理.

5.3.30 引理

设 $p:\widetilde{X}\to X$ 是一个覆叠映射, 而 $\widetilde{X'}$ 是 $\widetilde{X}$ 的一个非空连通分支. 则 $p|_{\widetilde{X'}}:\widetilde{X'}\to p(\widetilde{X'})$ 是一个覆叠映射. 并且, 如果 X 是连通的, 则 $p(\widetilde{X'})$ 是连通的.

验证是容易的, 留作习题 5.9.14. 现在证明定理. 这归结为证明等价的命题: $\widetilde{X}$ 是不连通的 $\Leftrightarrow X$ 是可定向的. 设 $\widetilde{X}$ 是不连通的, 而 $\widetilde{X'}$ 是 $\widetilde{X}$ 的一个非空且不等于 $\widetilde{X}$ 的连通分支. 那么 (根据引理) $p:\widetilde{X'}\to p(\widetilde{X'})$ 还是一个覆叠映射, 并且 $p(\widetilde{X'})$ 是连通的 X 的一个非空连通分支, 必然是整个 X. 这个从 $\widetilde{X'}$ 到 X 上的覆叠映射的层数是常数 (定理 2.4.4). 因为 $\widetilde{X'}\neq\varnothing$, 此层数 $\neq 0$, 因为 $\widetilde{X'}\neq\widetilde{X}$, 此层数也 $\neq 2$, 故 $p:\widetilde{X'}\to X$ 是一个 1 层的覆叠映射, 即一个微分同胚, 并且从 X 到 $\widetilde{X}$ 的映射 $f=(p|_{\widetilde{X'}})^{-1}$ 是连续的, 满足 $p\circ f=\mathrm{id}|_X$: 根据 5.3.28, 流形 X 是可定向的.

反之, 设 X 是可定向的, 那么根据 5.3.28, 存在连续的 $f:X\to\widetilde{X}$, 使得 $p\circ f=\mathrm{id}|_X$, 这里 f 表示 5.3.28 引进的映射, 即 $x\mapsto(x,\alpha(x))$, 但那样 $f(X)$ 就是连通的. 因为 p 是 2 层覆叠映射, $f(X)=\widetilde{X}$ 是不可能的, $\widetilde{X}$ 有一个非平凡的连通分支, 从而是不连通的.

5.3.31 注释

5.3.31.1 *$\widetilde{X}$ 上的对径映射在 $\widetilde{X}$ 上有一个典范卷积 s,* 它使 $z=(x,\alpha(x))$ 对应 $s(z)=(x,\beta(x))$, 这里 $\beta(x)$ 是 $\alpha(x)$ 相反的定向. 那么 $s\in\mathrm{Diff}\,(\widetilde{X})$, 并且 s 反转方向: 习题 5.9.14

5.3.31.2 *设 δ 是流形 X 上的一个密度,* 则存在 $\widetilde{X}$ 上的一个由 $|\alpha|=p^*\delta$ 定义的典范体积形式 α: 习题 5.9.14.

5.3.32 带边区域和它的边界的定向

5.3.33 定义

*给定 d 维流形 X. 设 D 是 X 的闭子集, 满足下列条件, 则称为 X 的***区域**: *对于 D 的每个点 x, 我们有:*

或者存在 X 的开集 U, 使得 $x\in U\subset D$;

或者存在一个中心在 x 的坐标卡 (U,φ), 使得如果 $\varphi(y)=(\eta_1(y),\cdots,\eta_d(y))$, 则

$$U\bigcap D=\{y:y\in U\text{ 并且 }\eta_1(y)\leqslant 0\}.$$

我们看到, 在第一种情形, 存在一个在 x 的坐标卡 (U,φ), 使得 $U\subset D$; 而在第二种情形, 我们更直接地 (用局部坐标) 表示为

$$x_1=\eta_1(x),\cdots,x_d=\eta_d(x)\quad 和\quad U\bigcap D=\{(x_1,\cdots,x_d)\in U;x_1\leqslant 0\}.$$

5.3.34　推论

(i) *在第一种情形*: $x\in \mathring{D}$(D 的内部), $\mathring{D}$ 是 X 的一个开集, 并且其维数 $d=\dim X$.

(ii) *在第二种情形*: 由于一个坐标卡 (中的映射) 是一个同胚, 并且如果 $x_1=0$, 则 $(x_1,\cdots,x_d)$ 是 $U\bigcap D$ 的边界点, 故 x 是 D 的边界点, *将记 D 的边界点的集合为 ∂D, 并且称为 D 的边界*.

由于 D 是闭集, 我们确信, 在第一种情形下的坐标卡对应于 $x\in\mathring{D}$, 而第二种情形的坐标卡对应于 $x\in\partial D$.

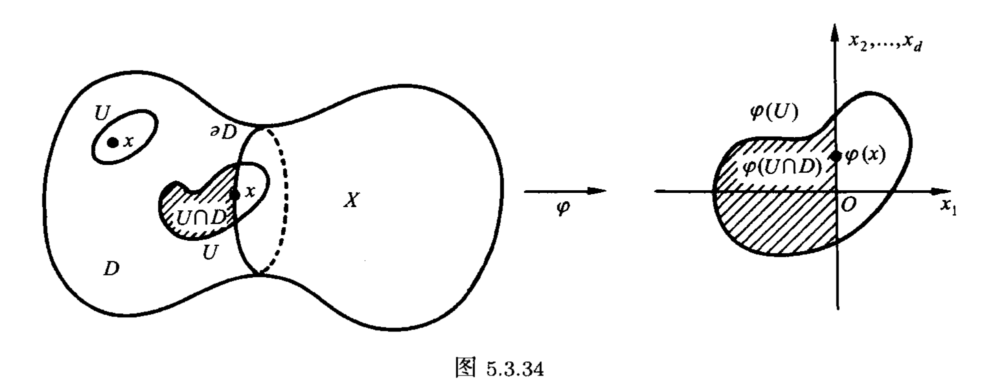


图 5.3.34

5.3.35　定理

设 D 是 d 维流形 X 的一个带边区域. 则 ∂D 是 X 的一个 $d-1$ 维子流形.

我们将利用子流形的特征 2.6.15. 对于所有 $x\in\partial D$, 存在一个中心为 x 的坐标卡 (U,φ), 使得对于 $y\in U$, $\varphi(y)=(y_1,\cdots,y_d)$, 有

$$U\bigcap D=\{y:y_1\leqslant 0\}.$$

根据 5.3.34, $\partial D\bigcap U=y_1^{-1}(0)$. 因为 φ 是一个微分同胚, 同时 x_1 的微分非零, 故在 U 上, $y_1=x_1\circ\varphi$ 的微分非零 (参见 5.2.6.3). 于是 2.6.15 的假设是满足的.

5.3.36　定理

设 X 是一个定向流形, 而 D 是 X 的一个带边区域. 则流形 ∂D 是典范地定向的.

根据 5.3.24, 只需借助 X 的单独一个图册构造 ∂D 的一个图册, 其每两个坐标卡的过渡微分同胚保持定向. 给定 ∂D 的坐标卡 $(U\bigcap\partial D,\varphi|_{\partial D})$ (其中 (U,φ) 是关联于 $x\in\partial D$ 的上述类型的正的坐标卡). 根据 5.3.35, 它们构成一个图册, 现在还需证明这些坐标卡的过渡微分同胚的雅可比行列式是正的 (参见 5.3.23).

令 $\psi\circ\varphi^{-1}:(x_1,\cdots,x_d)\mapsto(f_1,\cdots,f_d)$. 由于

$$\varphi(U\bigcap V\bigcap\partial D)\subset\{0\}\times\mathbf{R}^{d-1}\quad 和 \quad \psi(U\bigcap V\bigcap\partial D)\subset\{0\}\times\mathbf{R}^{d-1},$$

如果 $(0,x_2,\cdots,x_d)\in\varphi(U\bigcap V)$, 则有

$$\psi\circ\varphi^{-1}:(0,x_2,\cdots,x_d)\mapsto(0,f_2,\cdots,f_d),$$

于是

$$f_1(0,x_2,\cdots,x_d)=0,$$

这就蕴涵 $\dfrac{\partial f_1}{\partial x_i}=0,\forall i=2,\cdots,d$. 从而若令 $V_1=\varphi(U)\bigcap(0\times\mathbf{R}^{d-1})$, 则有

$$J(\psi\circ\varphi^{-1})|_{V_1}=\left|\begin{matrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial x_i} & 0\cdots0\\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_i} & \\ \vdots & \left|J((\psi\circ\varphi^{-1})|_{V_1})\right| \\ \dfrac{\partial f_d}{\partial x_i} & \end{matrix}\right|.$$

由此

$$\left[J(\psi\circ\varphi^{-1})\right]|_{V_1}=\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(0,x_2,\cdots,x_d)J((\psi\circ\varphi^{-1})|_{V_1}).$$

由 X 的图册的选取, $J(\psi\circ\varphi^{-1})|_{V_1}$ 是正的函数. 函数

$$x_1\mapsto f(x_1,x_2,\cdots,x_d)$$

对于所有 $x_1\leqslant0$ 是非正值, 而在 $x_1=0$ 取零值, 故它的导数 $\dfrac{\partial f_1}{\partial x_i}(0,x_2,\cdots,x_d)\geqslant0$.

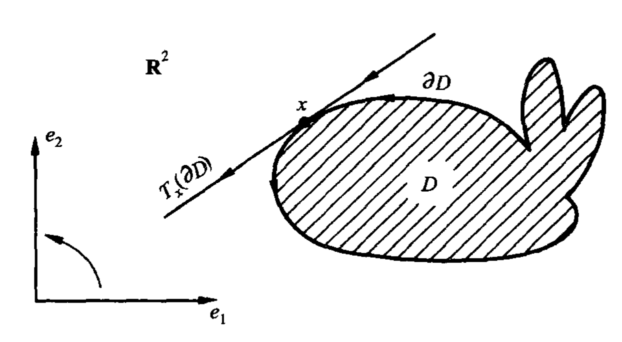


图 5.3.36

由此得到 $J((\psi\circ\varphi^{-1})|_{V_1})>0$, 即

$$J(\psi|_{\partial D}\circ(\varphi|_{\partial D})^{-1})>0.$$

此即表明我们构造的图册的过渡微分同胚保持定向.

5.3.37　例子

5.3.37.1　我们有 $\overline{B}(0,1)$ 是 $\mathbf{R}^{d+1}$ 的带边区域, 而 $\partial(\overline{B}(0,1)) = S^d$. 其中 S^d 的看作 $\overline{B}(0,1)$ 的边界得到的典范定向跟例子 5.3.17.2 的定向一致: 习题 5.9.14.

5.3.37.2　如果考虑 2.7 节引进的单位法丛等概念, 我们有

$$NUX = \partial(\overline{N^1}X) \quad 和 \quad NU^{\varepsilon}X = \partial(\overline{N^{\varepsilon}X}).$$

这是习题 5.9.14 中要证明的.

5.4　德 拉 姆 群

为了简化陈述, 直到本章末尾, 我们假定流形都是 C^∞ 类的. 对于 C^∞ 类的流形, 令

5.4.1
$$\Omega^r(X) = \Omega^r_\infty(X).$$

5.4.2　定义

我们称微分形式 $\alpha \in \Omega^r(X)$ 是**闭的**, 如果 $\mathrm{d}\,\alpha = 0$; 我们称 $\beta \in \Omega^r(X)$ 是**一个恰当微分形式** (或边缘微分形式), 如果存在 $\lambda \in \Omega^{r-1}(X)$, 使得 $\mathrm{d}\,\lambda = \beta$.

d 表示 5.2.9 引进的外微分算子, 令

5.4.3
$$\begin{cases} F^r(X) = \mathrm{d}^{-1}(0) \bigcap \Omega^r(X) & \text{闭形式的集合.} \\ B^r(X) = \mathrm{d}\,(\Omega^{r-1}(X)) & \text{恰当形式的集合.} \end{cases}$$

由于 $\mathrm{d}^2 = 0$, 故 $B^r(X)$ 是 $F^r(X)$ 的向量子空间. 于是可以考虑商向量空间 $F^r(X)/B^r(X)$.

5.4.4　定义

设 X 是一个 n 维 (C^∞ 类的) 流形, 向量空间

$$R^r(X) = F^r(X)/B^r(X) \quad (\text{对于 } r = 0, \cdots, n)$$

称为 X 的**第 r 个德拉姆群**.

5.4.5　定义

设 α 和 $\beta \in F^r(X)$. 如果存在 $\gamma \in \Omega^{r-1}(X)$, 使得 $\alpha - \beta = \mathrm{d}\,\gamma$, 则称 α 和 β 是**同调的** (即 α 和 β 在商向量空间 $F^r(X)/B^r(X)$ 里的像是相同的).

5.4.6　性质

对于所有 r, R^r 是从 C^∞ 类流形到实向量空间中的范畴的一个反变函子, 即令所有态射 $f \in C^\infty(X;Y)$ 对应从 $R^r(Y)$ 到 $R^r(X)$ 的线性映射 f^*, 满足

$$(g \circ f)^* = f^* \circ g^* \quad 和 \quad (\mathrm{id}_X)^* = \mathrm{d}_{R^r(X)}.$$

事实上, 如果 $\alpha \in F^r(Y)$, 这等价于 $\mathrm{d}\,\alpha = 0$. 而我们有 (参见 5.2.9.3)

$$\mathrm{d} \circ f^* = f^* \circ \mathrm{d} \quad 故 \quad \mathrm{d}\,(f^*\alpha) = 0 \Rightarrow f^*\alpha \in F^r(X).$$

同样, 如果 $\beta \in B^r(Y)$, 则存在 γ, 使得 $\beta = \mathrm{d}\,\gamma$, 于是 $f^*\beta = f^*(\mathrm{d}\,\gamma) = \mathrm{d}\,(f^*\gamma)$, 这蕴涵 $f^*\beta \in B^r(X)$; 于是如果 $F^r(Y)$ 中的 α_1 和 α_2 是同调的, 则 $f^*\alpha_1$ 和 $f^*\alpha_2$ 也是同调的; 于是 f^* 就过渡到商向量空间 $F^r(Y)/B^r(Y)$.

显然从 $R^r(Y)$ 到 $R^r(X)$ 的映射 f^* 是线性的, 并且关系

$$(g \circ f)^* = f^* \circ g^* \quad 和 \quad (\mathrm{id}_X)^* = \mathrm{id}_{R^r(X)}$$

都成立 (参见 5.2.4.4)

5.4.7 推论

若 $f \in \mathrm{Diff}\,(X;Y)$, *则* $f^* \in \mathrm{Isom}\,(R^r(Y);R^r(X))$.

这就提供了微分同胚的一个必要 (但非充分) 条件. 存在非微分同胚的流形 X, Y, 却有 $R^r(X) \cong R^r(Y) \quad \forall r$. 例如根据 5.7 节, S^{2d+1} 和 $P^{2d+1}(\mathbf{R})$ 就是如此.

5.4.8 注释

如果 f 是单射, 那么 f^* 未必是满射 (像线性映射的转置的情形一样); 同样, 如果 f 是满射, 那么 f^* 未必是单射. 参见习题 5.9.16 和 5.9.19.

5.4.9 例子

5.4.9.1 $R^0(X) \simeq \mathbf{R}^k$, *这里 k 是 X的连通分支的数目.*

事实上, $F^0(X)$ 是 0 阶微分形式, 即从 X 到 $\mathbf{R}$ 的函数α 的集合, 这些 α 满足条件 $\mathrm{d}\,\alpha = 0$ (参见 5.2.9.1(iv)). 但这样的函数在 X 的每个连通分支上为常数, 故 $F^0(X) \simeq \mathbf{R}^k$: 参见 5.2.6.6.

由于 $B^0(X) = \{0\}$, 故

$$R^0(X) = F^0(X)/\{0\} \simeq F^0(X) \simeq \mathbf{R}^k.$$

5.4.9.2 $R^1(S^1) \simeq \mathbf{R}$ (典范同构).

根据 2.6.13.1, S^1 微分同胚于 $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$, 故只需计算 $R^1(\mathbf{R}/\mathbf{Z})$. 设 $p:\mathbf{R} \to \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ 是典范投影. 对 $X = \mathbf{R}$ 和作用在 $\mathbf{R}$ 上的平移 $G = \mathbf{Z}$ 应用引理 5.3.9, 如果 $\alpha \in \Omega^1(\mathbf{R}/\mathbf{Z}) = F^1(\mathbf{R}/\mathbf{Z})$, 那么 $p^*\alpha$ 是 $\mathbf{R}$ 上的一个微分形式并且周期为 1, 故 $p^*\alpha = f(t) \cdot \mathrm{d}\,t$, 这里 $f \in C^\infty(\mathbf{R};\mathbf{R})$ 是周期为 1 的函数. 令

$$\theta(\alpha) = \int_0^1 f(t) \cdot \mathrm{d}\,t,$$

就构造了映射 $\theta : F^1(\mathbf{R}/\mathbf{Z}) \to \mathbf{R}$. 如果 $\alpha \in B^1(\mathbf{R}/\mathbf{Z})$, 则 $\alpha = \mathrm{d}\,g$, 故若令 $g \circ p = h$, 则

$$p^*\alpha = p^*(\mathrm{d}\,g) = \mathrm{d}\,(g \circ p) = h'(t)\mathrm{d}\,t,$$

这里 h 的周期为 1, 故

$$\int_0^1 h'(t)\cdot \mathrm{d}\,t = h(1)-h(0)=0.$$

反之, 设

$$\int_0^1 f(t)\cdot \mathrm{d}\,t = 0,$$

则存在周期为 1 的函数 h, 使得 $f=h'$. 为此, 只需令

$$h(t)=\int_0^t f(s)\cdot \mathrm{d}\,s : h(1)=h(0)=\int_0^1 f(t)\cdot \mathrm{d}\,t=0!$$

翻译到 $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ 上, 根据引理 5.3.9, 正好表明 $B^1(\mathbf{R}/\mathbf{Z})=\theta^{-1}(0)$; 于是

$$\mathrm{Image}\,(\theta)=F^1(\mathbf{R}/\mathbf{Z})/B^1(\mathbf{R}/\mathbf{Z})=R^1(\mathbf{R}/\mathbf{Z}).$$

接下来验证 $\mathrm{Image}\,(\theta)=\mathbf{R}$. 微分形式 $\beta=\mathrm{d}\,t\in F^1(\mathbf{R})$ 周期为 1, 仍然根据引理 5.3.9, 存在

$$\alpha\in F^1(\mathbf{R}/\mathbf{Z}) \text{ 使得 } \quad p^*\alpha=\beta \text{ 并且 } \theta(\alpha)=\int_0^1 \mathrm{d}\,t=1\neq 0.$$

5.8 节将给 $R^1(S^1)\simeq\mathbf{R}$ 一个完全不同的证明.7.2.1 小节将有另一个证明.

我们提醒在 4.2.24.2 曾经引进一个紧致流形 X 的实上同调群 $H^r(X)$ $(r=0,1,\cdots,\dim X)$, 这里引述下列结果而不予以证明, 这个结果把 $H^r(X)$ 跟 $R^r(X)$ 紧密联系在一起.

5.4.10 德拉姆定理

设 X 是一个紧致流形. 对于所有小于或等于 X 的维数的整数 r, $R^r(X)$ 同构于 $H^r(X)$. 并且这个同构是函子的.

对于这个定理的证明, 参见 [15], 第 6 章, [16], 第 4 章或 [35], 206 页.

5.4.11 推论

设 X 是一个紧致流形, 则 $\dim R^r(X)=\dim H^r(X)=b^r(X)$, X 的第 r 个贝蒂数; 特别有 $\dim R^r(X)<\infty$ (参见 4.2.24.2).

本章后面, 我们将确定球面, 射影空间和环面的德拉姆群. 在披露这个研究计划之前, 我们先阐明德拉姆群与微分法的古典问题在什么方面有联系.

设 U 是 $\mathbf{R}^2$ 的一个开集, 那么 $B^1(U)=\{\mathrm{d}\,f : f\in C^\infty(U)\}$ 是全微分的集合. 设 $\alpha\in\Omega^1(U)$ 由下式给定:

$$\alpha(x,y)=a(x,y)\mathrm{d}\,x+b(x,y)\mathrm{d}\,y.$$

我们探索一个必要且充分的条件, 使得 $\alpha\in B^1(U)$. 即求一个函数 f, 使得

$$a(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{和} \quad b(x,y)=\frac{\partial f}{\partial y}.$$

由于 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ (这是 $\mathrm{d}(\mathrm{d} f) = 0$ 另一种表述!), 一个必要条件是

$$\frac{\partial a}{\partial y} = \frac{\partial b}{\partial x}, \quad \text{即} \quad \mathrm{d}\,\alpha = \left(-\frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial b}{\partial x}\right) \mathrm{d}\,x \wedge \mathrm{d}\,y = 0.$$

或表示为 $\alpha \in$ 闭形式集合 $F^1(U)$.

但是这个条件通常不是充分的: 例如 $U = \mathbf{R}^2 - \{0\}$,

$$\alpha = \frac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}\,y - \frac{y}{x^2+y^2}\mathrm{d}\,x;$$

$$\mathrm{d}\,\alpha = \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)\right] \mathrm{d}\,x \wedge \mathrm{d}\,y$$
$$= \left[\frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right] \mathrm{d}\,x \wedge \mathrm{d}\,y = 0.$$

但是如果存在 $f \in C^\infty(U)$, 使得 $\alpha = \mathrm{d}\,f$, 将有

$$f'_y = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad \text{于是} \quad f(x,y) = \mathrm{Arc\,tg}\left(\frac{y}{x}\right) + h(x).$$

随之

$$f'_x = \frac{-y}{x^2+y^2} + h'(x) = \frac{-y}{x^2+y^2},$$

于是 $h'(x) = 0 \Rightarrow h(x) =$ 常数. 由于在 $U = \mathbf{R}^2 - \{0\}$ 上连续的 $\mathrm{Arc\,tg}\left(\dfrac{y}{x}\right)$ 不存在, 这里因为这样的函数当绕原点一圈时应当增加 2π, 解不存在说明 $B^1(U) \neq F^1(U)$. 也就是说, $R'(u) \neq \{0\}$ (这个事实的严格证明参见 5.6.4).

但是, 如果比方说取 $U = (0,1)^2$, 求得的函数是适合的, 在这种情况将有 $R^1(U) = \{0\}$. 我们将证明, 更一般地, 如果 U 是 $\mathbf{R}^d$ 的一个星形开集, 则对于所有 $r > 0$, 我们有 $R^r(U) = \{0\}$ (参见 5.6.1). 为此要利用涉及李导数概念的公式, 这将是执行德拉姆群研究计划的第一步.

5.4.12 德拉姆群的研究计划

1) 基本公式 $L_\xi = \mathrm{d} \circ \mathrm{int}\,(\xi) + \mathrm{int}\,(\xi) \circ \mathrm{d}$ (定理 5.5.8); (将在 5.5 节证明此定理);

2) 庞加莱引理 (5.6.1);

3) $R^r(S^d)$ 和 $R^r(P^d(\mathbf{R}))$ 的计算 (5.7 节);

4) $R^r(T^d)$ 的计算 (5.8 节);

5) 如果 X 是 d 维可定向连通紧致集 : $R^d(X) \simeq \mathbf{R}$ (7.2.1).

5.4.13 注释

5.4.12 的 2) 说明局部地当 $r > 0$ 时所有德拉姆群都是零空间, 但是全局地则否. 从 2) 到 3) (或 4), 或 5)), 我们说是从局部到整体的过渡.

研究 $R^r(S^d)$ 时, 把 S^d 看作两个同胚于 $\mathbf{R}^d$ 的开集 (从而德拉姆群是零空间) 的并集, 沿 S^{d-1} 粘贴. 通过递推, 归结到在 5.4.9.2 计算过的 $R^1(S^1) \simeq \mathbf{R}$. 由于有 2 层的覆叠映射 $S^d \to P^d(\mathbf{R})$, 从 $R^r(S^d)$ 的结果得到 $R^r(P^d(\mathbf{R}))$.

$R^r(T^d)$ 的计算截然不同, 采用的是代数方法. 求一个微分形式 $\alpha \in F^r(T^d)$ 对 $\mathbf{R}^d$ 的传递群的平均, 该群通过平移作用在 $T^d = \mathbf{R}^d/\mathbf{Z}^d$ 上, 由此过渡到对于 $\mathbf{R}^d$ 不变的微分形式, 这是常数微分形式.

结果 5) 将在第七章开头证明; 这是度理论的基础, 第七章将定义度和应用度理论.

从 3),4) 得到 (推论 5.4.7)S^d 和 T^d 不是微分同胚的. 事实上, 这个结果可以通过道路的同伦更简单地得到: S^d 是单连通的, 而 T^d 则不然. 反之, 如果我们承认当 X 和 Y 是紧致集时:

5.4.14 $$R^r(X \times Y) \simeq \sum_{p+q=r} R^p(X) \otimes R^q(Y),$$

那么从这个公式和 3) 得到 $R^2(S^2 \times S^2) \simeq \mathbf{R}^2, R^2(S^4) = 0$, 故 S^4 和 $S^2 \times S^2$ 不微分同胚. 公式 5.4.14 的来源是德拉姆定理 5.4.10 及对于 $H^r(X \times Y)$ 的类似公式 (例如参见 [13],198 页 (29.11)).

事实上, 我们将在 6.3.3 中作为斯托克斯定理的一个应用来证明 S^4 和 $S^2 \times S^2$ 不微分同胚. 虽然这个结果表面上是否定类型的, 但它却是弥足珍贵的, 为确信这一点, 读者可尝试自己证明这个不微分同胚性.

5.5 李 导 数

设 X 是一个 (C^∞ 类的) 流形, 而 I 是 $\mathbf{R}$ 的一个开区间, 我们把 I 看作 C^∞ 类的流形. 设 $F \in C^\infty(I \times X; X)$, 而 $\alpha \in \Omega^r(X)$ (其中按照 5.4.1 做的约定 $\Omega^r(X) = \Omega^r_\infty(X)$). 我们可以把

5.5.1 由 $x \mapsto F(t,x)$ 定义的映射 $F_t : X \to X$

与 F 关联. 随之, 由于 $F_t \in C^\infty(X;X)$, 我们有 $(F_t)^* \alpha \in \Omega^r(X)$, 这就得到一个映射

5.5.2 $$I \to \Omega^r(X) : \{t \mapsto F_t^* \alpha\}.$$

5.5.3 引理

对于 X 的所有 x, 映射 $\{t \mapsto (F_t^*\alpha)(x)\}$ 属于 $C^1(I; \Lambda^r(T_xX)^*)$. 此外如果引入记号

$$D_F\alpha = \frac{\partial(F_t^*\alpha)}{\partial t} \quad : \quad x \mapsto \frac{\partial((F_t^*\alpha)(x))}{\partial t},$$

则对于所有 $t \in I$, $(D_F\alpha)(t) \in \Omega^r(X)$.

只需重新查看引理 5.2.10.6 的证明, 沿用该证明的记号, 只是将 $[0,1]$ 用 I 代替, 我们有

$$G'_t \in C^\infty(I \times U'; L(\mathbf{R}^m; \mathbf{R}^m)),$$

故 $t \mapsto G_t^*\gamma$ 是可导的, 这就证明了 5.5.3.

此外 $\{t \mapsto G_t^*\gamma\}$ 是连续可导的. 故可对族 $\{t \mapsto (D_F\alpha)(t)\}$ 应用 5.2.10.5. 求导运算是积分的逆运算, 由此推出:

5.5.4 引理

采用前一个引理的记号, 我们有 $\mathrm{d}\,(D_F\alpha) = D_F(\mathrm{d}\,\alpha)$.

5.5.5 进一步假设对于 I 的所有 t, 有 $F_t \in \mathrm{Diff}\,(X)$, 并且 $F_0 = \mathrm{id}\,_X$. 我们就会处于 3.5.14 的框架内, 在这种状况得到 X 上的 C^∞ 类向量场 ξ.

如果 ξ 是不依赖时间的向量场, 也就是说, F 是微分同胚的单参数群, ξ 确定 F, 故 $D_F\alpha$ 仅依赖 α 和 ξ 的给定. 更一般地, 可证明 $D_F\alpha(0)$ 仅依赖 α 和 $\xi(0)$. 直观地, 这是由于 $\xi(t,x)$ 是 "F 在 t 的一阶导子" 及 $F_0 = \mathrm{id}\,_X$. 为了证明上述结论, 我们推导一个明晰的公式 (定理 5.5.8), 在此公式中, $D_F\alpha$ 仅仅通过 ξ 和外微分来计算.

5.5.6 定义

在一个任意分次代数$\Omega = \oplus\Omega^r$ 中, 一个 k**阶导子**是从 Ω^r 到 Ω^{r+k}(对于使 Ω^{r+k} 有意义的 r) 的线性映射, 使得对于 Ω^r 的 α 和 Ω^s 的 β, 有

$$u_{r+s}(\alpha \wedge \beta) = u_r(\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge u_s(\beta),$$

如果有

$$u_{r+s}(\alpha \wedge \beta) = u_r(\alpha) \wedge \beta + (-1)^r \alpha \wedge u_s(\beta),$$

则称之为 k **阶反导子**.

5.5.7 例子

5.5.7.1 在一个流形 X 上, 外微分 d 是分次代数 $\Omega^*(X)$ 的 1 阶反导子: 参见 5.2.9.1(ii).

5.5.7.2 上面 5.3.12 的公式表明对于 X 上的所有 C^∞ 类的向量场 ξ, $\mathrm{int}\,(\xi)$ 是 $\Omega^*(X)$ 的 -1 阶的反导子.

5.5.7.3 设 u 和 v 分别是 1 和 -1 阶的反导子, 则 $u \circ v + v \circ u$ 是 0 阶导子, 这可以直接验证. 特别地. 如果 ξ 是流形 (C^∞ 类) X 上的一个 C^∞ 类向量场, 则

$$L_\xi = \mathrm{d}\, \circ \mathrm{int}\,(\xi) + \mathrm{int}\,(\xi) \circ \mathrm{d}$$

是一个 0 阶导子.

5.5.7.4 重新回到映射 $F \in C^\infty(I \times X; X)$, 它满足条件: 对于所有 t, $F_t \in \mathrm{Diff}\,(X)$, 并且 $F_0 = \mathrm{id}\,_X$.

考虑引理 5.5.3 中由

$$D_F(\alpha)(t_0) = \frac{\partial}{\partial t}(F_t^*(\alpha))_{t=t_0}$$

定义的从 $\Omega^*(X)$ 到 $\Omega^*(X)$ 的映射 $D_F(t_0)$. (根据 5.2.4.2) 我们有

$$D_F(\alpha \wedge \beta)(t_0) = \left(\frac{\partial F_t^*(\alpha \wedge \beta)}{\partial t}\right)_{t=t_0} = \left(\frac{\partial\,(F_t^*(\alpha) \wedge F_t^*(\beta))}{\partial t}\right)_{t=t_0}.$$

由于向量积是双线性的, 而我们是对 t 求导, (应用 0.2.8.3 和 0.2.15.1) 有

$$D_F(\alpha \wedge \beta)(t_0) = \left(\frac{\partial F_t^*(\alpha)}{\partial t}\right)_{t=t_0} \wedge F_{t_0}^*(\beta) + F_{t_0}^*(\alpha) \wedge \left(\frac{\partial\left(F_t^*(\beta)\right)}{\partial t}\right)_{t=t_0},$$

终于得到

$$D_F(\alpha \wedge \beta)(t_0) = D_F(\alpha)(t_0) \wedge F_{t_0}^*(\beta) + F_{t_0}^*(\alpha) \wedge D_F(\beta)(t_0).$$

由于

$$F_0 = \mathrm{id}_X, \quad \text{我们有} \quad F_0^* = \mathrm{id}_{\Omega^*(X)},$$

特别地, 有

5.5.7.5 $$D_F(\alpha \wedge \beta)(0) = D_F(\alpha)(0) \wedge \beta + \alpha \wedge D_F(\beta)(0).$$

此式表明, $D_F(0)$ 是一个 0 阶的导数.

5.5.8 定理

$$\boxed{D_F(0) = \mathrm{d} \circ \mathrm{int}\,(\xi(0)) + \mathrm{int}\,(\xi(0)) \circ \mathrm{d} = L_{\xi(0)}}.$$

5.5.9 定义

由 5.5.8 定义的 $L_{\xi(0)}\alpha$ 称为 α 对于向量场 $\xi(0)$ 的**李导数.**

定理的证明. 采用 5.2.9.1 对于 d 的存在性的证明中使用过的类似方法. 思路是代数 $\Omega^*(X)$ 在代数的意义下由 $\Omega^0(X) = C^\infty(X)$ 和 $\boldsymbol{B}^1(X) = \mathrm{d}\,(\Omega^0(X))$ 生成. 例子 5.5.7.2 和公式 5.5.7.5 证明 $L_{\xi(0)}=\mathrm{d} \circ \mathrm{int}\,(\xi(0)) + \mathrm{int}\,(\xi(0)) \circ \mathrm{d}$ 和 $D_F(0)$ 都是 $\Omega^*(X)$ 的 0 阶导子. 如果它们在 $\Omega^0(X)$ 和 $\mathrm{d}\,(\Omega^0(X))$ 上重合, 则它们将在 $\Omega^*(X)$ 上重合. 证明如下.

引理 5.5.9.1 $D_F(0)$和 $L_{\xi(0)}$ 在 $\Omega^0(X)$ 和 $\mathrm{d}\,(\Omega^0(X))$ 上重合.

只需证明对于 X 上所有 C^∞ 类函数 f, 我们有

$$D_F(f)(0) = L_{\xi(0)}(f) \quad \text{和} \quad D_F(\mathrm{d}\,f)(0) = L_{\xi(0)}(\mathrm{d}\,f).$$

事实上, 如果我们证明了 $D_F(0)$ 和 $L_{\xi(0)}$ 同 d 可交换, 那么只需对 $f \in C^\infty(X)$ 验证. 而我们已经有了 (引理 5.5.4)

$$\mathrm{d}\,(D_F\alpha) = F_F(\mathrm{d}\,\alpha) \quad \text{即} \quad \mathrm{d} \circ D_F = F_F \circ \mathrm{d}.$$

同样的, d 同 $L_{\xi(0)}$ 可交换. 这是因为由于 $\mathrm{d}^2 = 0$ 我们有

$$L_{\xi(0)} \circ \mathrm{d} = (\mathrm{d} \circ \mathrm{int}\,(\xi(0)) + \mathrm{int}\,(\xi(0)) \circ \mathrm{d}\,) \circ \mathrm{d} = \mathrm{d} \circ \mathrm{int}\,(\xi(0)) \circ \mathrm{d},$$

同样有 $\mathrm{d} \circ L_{\xi(0)} = \mathrm{d} \circ \mathrm{int}\,(\xi(0)) \circ \mathrm{d}$.

于是只需证明 $D_F(0)$ 和 $L_{\xi(0)}$ 在 $C^\infty(X)$ 上重合. 设 $f \in C^\infty(X)$ 和 $x \in X$. 根据 5.5.3, 则有

$$D_F(f)(0)(x) = \left(\frac{\partial(F_t^* f)(x)}{\partial t}\right)_{t=0}.$$

而 f 是一个函数, 我们有 $F_t^* f = f \circ F_t$. 用 β 表示 X 的曲线 $t \mapsto F_t(x) = F(t,x)$, 则有

$$D_F(f)(0)(x) = \frac{\partial}{\partial t}(f \circ F_t(x))(0) = \frac{\partial(f \circ \beta)}{\partial t}(0) = \mathrm{d}\, f(\beta(0))(\beta'(0)).$$

而由于 $F_0 = \mathrm{id}_X, \beta(0) = x$, 又根据 3.5.14 中 ξ 的定义本身 $\beta'(0) = \xi(0)$, 故

$$D_F(f)(0)(x) = \mathrm{d}\, f(x)(\xi(0)).$$

而

$$(L_{\xi(0)} f)(x) = (\mathrm{d} \circ \mathrm{int}\, \xi(0) + (\mathrm{int}\, \xi(0)) \circ \mathrm{d}\,)(f)(x).$$

f 是一个 0 阶微分形式, 我们有 $\mathrm{int}\,(\xi(0)) f = 0$, 根据内积的定义, 还留下

$$(L_{\xi(0)} f)(x) = (\mathrm{int}\, \xi(0)) \circ \mathrm{d}\,(f)(x) = \mathrm{d}\, f(x)(\xi(0)).$$

于是 $D_F(0)$ 与 $L_{\xi(0)}$ 在 $C^\infty(X)$ 上重合.定理 5.5.8 证明的结束.我们应当证明对于所有 α 和所有 $x \in X$

$$(D_F \alpha)(0)(x) = (L_{\xi(0)} \alpha)(x).$$

取定任意一点 x, 并取一个在 x 的坐标卡 (U, φ) 和两个函数 $f, g \in \Omega^0(X)$, f 在 x 的一个邻域内等于 1, 并且 $\mathrm{supp}\, f \subset U$, 而 g 在上包含 $\mathrm{supp}\, f$ 的一个开集上等于 1, 并且 $\mathrm{supp}\, g \subset U$. 首先注意到

$$(D_F(f \cdot \alpha))(0)(x) = (D_F \alpha)(0)(x) \quad \text{和} \quad (L_{\xi(0)}(f \cdot \alpha))(x) = (L_{\xi(0)} \alpha)(x).$$

事实上, $D_F(0)$ 和 $L_{\xi(0)}$ 既然都是导子, 就只需验证 $(D_F f)(0)(x) = (L_{\xi(0)} f)(x) = 0$. 对于 $D_F(0)$, 这是由于 f 在 x 的邻域内是常数 (参见定义 5.5.3), 而对于 $L_{\xi(0)}$, 这是由于作用在函数上, $L_{\xi(0)} f$ 化简为 $\mathrm{int}\,(\xi(0))(\mathrm{d}\, f)$, 而在 x 的邻域内, $\mathrm{d}\, f = 0$. 于是只需对于 $\beta = f \cdot \alpha$ 进行验证就足够了.

现在在 U 上 β 表示为 (参见 5.2.8.1)

$$\beta|_U = \sum_{i_1 < \cdots < i_r} \beta_{i_1 \cdots i_r} \mathrm{d}\, x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\, x_{i_r} \quad \text{并且} \quad \mathrm{supp}\, \beta_{i_1 \cdots i_r} \subset \mathrm{supp}\, f.$$

不幸的是 x_i 并非定义在 X 上的函数; 幸运的是 $g \cdot x_i$ 确是定义在 X 上的函数, 并且由于

$$\mathrm{d}\,(g \cdot x_i) = x_i \cdot \mathrm{d}\,(g) + g \cdot \mathrm{d}\,(x_i)$$

以及

$$\mathrm{supp}\,(\mathrm{d}\, g) \bigcap \mathrm{supp}\, \beta_{i_1 \cdots i_r} \subset \mathrm{supp}\,(\mathrm{d}\, g) \bigcap \mathrm{supp}\, f = \varnothing,$$

我们有

$$\beta = \sum_{i_1<\cdots<i_r} \beta_{i_1\cdots i_r} \mathrm{d}(g\cdot x_{i_1}) \wedge\cdots\wedge \mathrm{d}\,(g\cdot x_{i_r}).$$

定理证毕.

我们可以对于所有 t 计算 $(D_F\alpha)(t)$. 像 3.5.12 那样引进 F_h^t 和映射族 $h\mapsto F_{t+h}^*\alpha = F_t^*((F_h^t)^*\alpha)$. 由于固定的微分同胚 F_t^* (t 固定而 h 是变量) 与对于 h 的求导可交换, 根据 $\xi(t)$ 的定义和定义 5.5.9, 我们有

$$(D_F\alpha)(t) = F_t^*((D_{F_0^t}\alpha)(0)) = F_t^*(L_{\xi(t)}\alpha),$$

遂有公式

5.5.10
$$\boxed{(D_F\alpha)(t) = F_t^*[\mathrm{d}\,(\mathrm{int}\,(\xi(t))\alpha) + \mathrm{int}\,(\xi(t))(\mathrm{d}\,\alpha)]}\,.$$

5.5.11 定理

设 $F\in C^\infty(I\times X;X)$ 是 X 的微分同胚的单参数族, $\alpha\in F^r(X)$, 而 $[a,b]\subset I$, 这里 I 是 $\mathbf{R}$ 的一个开区间. 则 $F_a^*\alpha$ 和 $F_b^*\alpha$ 是同调的, 换句话说, 从 $R^r(X)$ 到 $R^r(X)$ 的由 F_a 和 F_b 诱导的函子 F_a^* 和 F_b^* 是相等的: 参见 5.4.6.

首先有

$$F_b^*\alpha - F_a^*\alpha = \int_a^b \frac{\partial(F_t^*\alpha)}{\partial t}\mathrm{d}\,t.$$

而根据 5.5.10,

$$\frac{\partial(F_t^*\alpha)}{\partial t} = (D_F\alpha)(t) = F_t^*[\mathrm{d}\,(\mathrm{int}\,(\xi(t))\alpha) + \mathrm{int}\,(\xi(t))(\mathrm{d}\,\alpha)].$$

由于 $\alpha\in F^r(X)$, 故 $\mathrm{d}\,\alpha=0$, 又由于 $\mathrm{d}\circ F_t^* = F_t^*\circ\mathrm{d}$, 留下的是

$$F_b^*\alpha - F_a^*\alpha = \int_a^b \mathrm{d}\,(F_t^*(\mathrm{int}\,(\xi(t))\alpha)\mathrm{d}\,t;$$

利用公式 5.2.10.5 得到

5.5.12
$$F_b^*\alpha - F_a^*\alpha = \mathrm{d}\left(\int_a^b (F_t^*(\mathrm{int}\,(\xi(t))\alpha)\mathrm{d}\,t\right),$$

这就表明 $F_b^*\alpha - F_a^*\alpha\in B^r(X)$, 即 $F_a^*\alpha$ 和 $F_b^*\alpha$ 同调.

5.6 星形开集. 庞加莱引理

5.6.1 庞加莱引理

设 U 是有限维向量空间的星形开集, 则对于所有 $r>0$,

$$R^r(U)=0.$$

设 U 是在 0 的星形开集. 对于 U 的所有 x 和 $t \in [0,1], tx \in U$. 考虑微分同胚的 C^∞ 族 F, 对于 $t \in [0,1]$, F 由 $(t,x) \mapsto tx$ 定义. 那么对于 $a,b \in (0,1)$ 和 $\alpha \in F^r(U)$, 根据 5.5.11, $F_b^*\alpha$ 和 $F_a^*\alpha$ 是同调的.

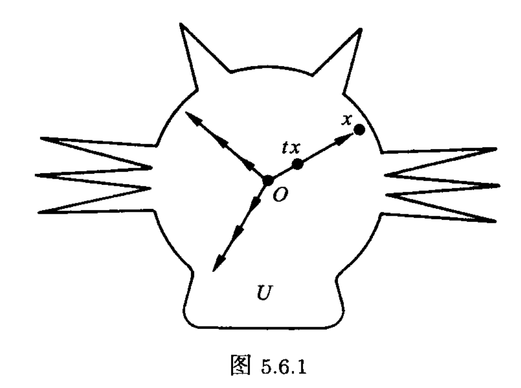


图 5.6.1

以下的思路是把这种同调推广到 $a=0$ 和 $b=1$. 因为 $F_1 = \mathrm{id}_U$, 于是 $F_1^*\alpha = \alpha$; 而 $F_0^*(x) = 0$, 故 $F_0^*(\alpha) = 0$. 因为如果 α 的阶数 $r > 0$, 则

$$(F_0^*\alpha)(x)(\xi_1, \cdots, \xi_r) = \alpha(0)(0 \cdot \xi_1, \cdots, 0 \cdot \xi_r) = 0.$$

如果这个推广是可能的, 那么 $F^r(U)$ 的所有 α, 都将同调于 0, 即 α 是恰当微分.

但是这个推广是困难的. 一方面, F_0 不是一个微分同胚; 另一方面, 不存在 $\varepsilon > 0$, 使得对于 $(1, 1+\varepsilon)$ 的任意 t, 对于任意 x, 有 $tx \in U$.

我们将简单地证明当 $a \to 0$ 和 $b \to 1$ 时, 可以扩展等式 5.5.12. 为此只需明晰地计算该等式右端的项.

首先必须计算 $\xi(t)$. 利用定义 3.5.14, 过 x 的曲线 β 是

$$s \mapsto \frac{t+s}{t} \cdot x, \quad \text{于是} \quad \xi(t) = \frac{1}{t} \cdot x.$$

此外, 对于所有 ξ, $(T_x(F_t))(\xi) = t \cdot \xi$, 于是

$$\begin{aligned} F_t^*(\mathrm{int}\,(\xi(t)) \cdot \alpha)(x)(\xi_1, \cdots, \xi_r) &= \alpha(t \cdot x) \left(\frac{1}{t} \cdot x, t \cdot \xi_1, \cdots, t \cdot \xi_r \right) \\ &= t^{r-1} \cdot \alpha(t \cdot x)(x, \xi_1, \cdots, \xi_r) \end{aligned}$$

(我们注意到这正是插入到 [5], 43 页的形式).

如果 $r > 0$, 则对于所有闭微分形式 α, 对于 $x, \xi_1, \cdots, \xi_r$ 和 $[a,b] \subset (0,1)$ 有

$$(F_b^*\alpha - F_a^*\alpha)(x)(\xi_1, \cdots, \xi_r) = \mathrm{d} \left(\int_a^b t^{r-1} \cdot \alpha(t \cdot x)(x, \xi_1, \cdots, \xi_r) \cdot \mathrm{d}\,t \right).$$

而当 $a \to 0, b \to 1$ 时左端有极限 α, 右端有极限

$$\mathrm{d} \left(\int_0^1 t^{r-1} \cdot \alpha(t \cdot x)(x, \xi_1, \cdots, \xi_r) \cdot \mathrm{d}\,t \right).$$

故 α 同调于 0.

5.6.2 注释

即使 $\operatorname{supp}\alpha$ 是 U 的一个紧致集, 我们得到的满足 $\alpha = \mathrm{d}\beta$ 的 β 一般未必有紧致的支集: 构造过程明显表明这一点. 事实上, 在 7.1.2 将看到, 一般说来, "每个有紧致支集和闭星形集的微分形式 α 是另一个有紧致支集的 β 的恰当微分 $\mathrm{d}\beta$" 这一命题是错误的. 当 $\deg\alpha = \dim E$ 时, 我们将给出一个这个命题成立的必要和充分条件.

对于 5.7 节, 我们需要庞加莱引理的下列推广:

5.6.3 定理

设 U 是 $\mathbf{R}^d$ 的星形开集, 而 X 是任意一个流形, 则对于所有 r, 有 $R^r(U \times X) \simeq R^r(X)$.

对于 $r = 0$, 只需应用 5.4.9.1. 今设 $r > 0$, 并且 U 是在 0 的星形开集. 令 $p : U \times X \to U$ 和 $q : U \times X \to X$ 是典范投影, 又 i 是在 0 的截口, 即 $i : X \ni x \mapsto (0, x) \in U \times X$. 跟 5.6.1 的证明一样, 引进 $G : [0,1] \times U \times X \to U \times X$, 令 $G(t, u, x) = (t \cdot u, x)$. 模仿引理 5.6.1 的证明仍然得到: 对于 $U \times X$ 上的所有闭微分形式 α, 微分形式 $\alpha = G_1^*\alpha$ 同调于 $G_0^*\alpha$. 而 G_0 不是别的, 正是 $(u, x) \mapsto (0, x)$, 还可以表示为 $i \circ q$. 闭微分形式 α 总是同调于 $(i \circ q)^*\alpha$, 这正好说明在德拉姆群上诱导的同胚 $(i \circ q)^* : R^r(U \times X) \to R^r(U \times X)$ 正是恒等映射 $\mathrm{id}_{R^r(U\times X)}$. 对于 $i^* : R^r(U \times X) \to R^r(X)$ 和 $q^* : R^r(X) \to R^r(U \times X)$, 这个事实表示为.

$$q^* \circ i^* = \mathrm{id}_{R^r(U\times X)}.$$

而从 $q \circ i = \mathrm{id}_X$ 又得到 $i^* \circ q^* = \mathrm{id}_{R^r(X)}$. 于是有结论:$R^r(X)$ 和 $R^r(U \times X)$ 通过互逆的同构 i^* 和 q^* 是同构的.

5.6.4 推论

$$R^1(\mathbf{R}^2 - \{0\}) \simeq R^1(\mathbf{R}_+^* \times S^1) \simeq R^1(S^1) \simeq \mathbf{R}.$$

事实上, 极坐标说明 $\mathbf{R}^2 - \{0\}$ 微分同胚于 $\mathbf{R}_+^* \times S^1$ (在 6.5.8 参见细节); 再引用 5.6.3, 5.4.7 和 5.4.9.2 即得结论.

5.7 球面和射影空间的德拉姆群

5.7.1 定理

$R^0(S^d)$ 和 $R^d(S^d)$ 同构于 $\mathbf{R}$, 而当 $d > 1$ 时, 对于 $0 < r < d$, 德拉姆群 $R^r(S^d)$ 是零空间.

由于 S^d 是连通的, 例子 5.4.9.1 表明 $R^0(S^d) \simeq \mathbf{R}$. 在 5.4.9.2 已经得知 $R^1(S^1) \simeq \mathbf{R}$.

证明的思路如下: 设 s 和 n 是球面 S^d 的 "南" 极和 "北" 极. (针对北极的) 球极投影 $\mathcal{N}$ 和 (针对南极的) $\mathcal{S}$ 是微分同胚 (参见习题 2.8.7).

5.7.1.1
$$\begin{cases} \mathcal{N} \in \operatorname{Diff}(\mathbf{R}^d; U = S^d - \{n\}), \\ \mathcal{S} \in \operatorname{Diff}(\mathbf{R}^d; U = S^d - \{s\}). \end{cases}$$

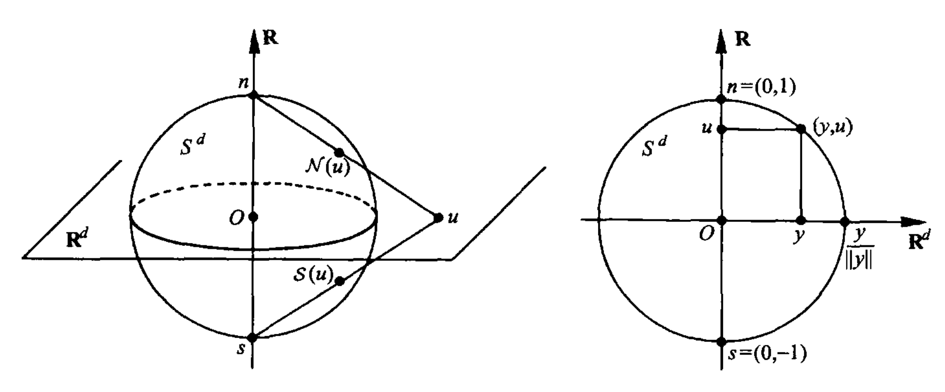


图 5.7.1

由于 $\mathbf{R}^d$ 是星形的, 它有平凡的德拉姆群 (参见 5.6.1), 故 (参见 5.4.7):

5.7.1.2 *S^d 的开集 U 和 V 有平凡的德拉姆群.*

接下来考虑 S^d 的 $U \bigcap V$. 设 $(y_1, \cdots, y_d, u) \in U \bigcap V$, 则有 $u \in (-1, 1)$. 令 $y = (y_1, \cdots, y_d)$, 我们有 $y / \|y\| \in S^{d-1}$, 而映射

5.7.1.3
$$U \bigcap V : (y, u) \mapsto \left(u, \frac{y}{\|y\|}\right) \in (-1, 1) \times S^{d-1}$$

是从 $U \bigcap V$ 到 $(-1,1) \times S^{d-1}$ 上的微分同胚.

由于 $(-1,1) \times S^{d-1}$ 的诸德拉姆群和 S^{d-1} 的诸德拉姆群同构 (定理 5.6.3), 可以对于 d 进行归纳推理, 由于已经知道 $R^0(S^d)$, 我们分别考虑情形 $0 < r < d$ 和 $r = d$.

第一种情形 $\underline{0 < r < d}$ (此时必有 $d > 1$).

首先考虑 $r = 1$ *和* $d > 1$. 设 $\alpha \in F^1(S^d)$. 根据庞加莱引理和推论 5.4.7, $\alpha|_U$ 和 $\alpha|_V$ 是恰当微分形式, 故存在两个函数 f 和 g 分别属于 $C^\infty(U)$ 和 $C^\infty(V)$, 使得 $\alpha|_U = \mathrm{d} f$ 和 $\alpha|_V = \mathrm{d} g$. 在 $U \bigcap V$ 上, 函数 f 和 g 满足

$$\mathrm{d}\left((f-g)|_{U\cap V}\right) = (\mathrm{d} f - \mathrm{d} g)|_{U\cap V} = (\alpha - \alpha)|_{U\cap V} = 0.$$

故 $f - g$ 在 $U \bigcap V$ 上是常数 (由于 $U \bigcap V$ 微分同胚于 $(-1,1) \times S^{d-1}$, 并且 $d > 1$). 于是我们可以引入函数 $\widehat{f}$, 使得在 U 上, $\widehat{f} = f$, 在 V 上, $\widehat{f} = g + k$, 这里常数 k 在 $U \bigcap V$ 上等于 $f - g$.

这样引入的函数 $\widehat{f}$ 在覆盖 S^d 的 U 和 V 上都是 C^∞ 的, 故 $\widehat{f} \in C^\infty(S^d)$, 并且 $\alpha = \mathrm{d}\widehat{f} : \alpha$ 是恰当微分形式, 这表明当 $d > 1$ 时 $R^1(S^d)$ 缩减为零.

假定对于 $1 \leqslant k \leqslant r-1 < d$ 已经证明了 $R^k(S^d) = \{0\}$, 我们考虑 $R^r(S^d)$, 这里 $1 < r < d$, 故 $d > 2$.

仍然用 U 和 V 表示 5.7.1.1 中引入的开集, 设 $\alpha \in F^r(S^d)$, 那么由于 U 和 V 的德拉姆群是平凡的 (参见 5.7.1.2), 所以存在 $\beta \in \Omega^{r-1}(U)$ 和 $\gamma \in \Omega^{r-1}(V)$, 使得 $\alpha|_U = \mathrm{d}\beta$ 和 $\alpha|_V = \mathrm{d}\gamma$. 于是

$$\mathrm{d}((\beta-\gamma)|_{U\cap V}) = 0 \quad 故 \quad (\beta-\gamma)|_{U\cap V} \in F^{r-1}(U\bigcap V).$$

由于 $R^{r-1}(U\bigcap V) \simeq R^{r-1}((-1,1)\times S^{d-1})$ (参见 5.7.1.3), 利用定理 5.6.3 即得

$$R^{r-1}(U\bigcap V) \simeq R^{r-1}(S^{d-1}).$$

考虑到归纳假设, 我们有 $R^{r-1}(S^{d-1}) = \{0\}$, 故终于得到 $(\beta-\gamma)|_{U\bigcap V}$ 是 $U\bigcap V$ 上的恰当微分形式: 存在 $\omega \in \Omega^{r-2}(U\bigcap V)$, 使得 $(\beta-\gamma)|_{U\bigcap V} = \mathrm{d}\omega$.

在 $U, V, U\bigcap V$ 这三个开集上, 我们掌握了相关信息. 为了把它们粘合起来, 考虑和由开集 U 和 V 组成的覆盖关联的单位分解. 精确地说, 设 f 是在 s 的一个普拉托函数, 其支集在 U 内 (它存在, 参见引理 3.1.2), 而 $g = 1-f$, 则

$$\text{5.7.1.4} \qquad \begin{cases} f \text{ 的支集在 } U \text{ 内, 在 } s \text{ 的一个邻域内等于 } 1, \\ g \text{ 的支集在 } V \text{ 内, 在 } n \text{ 的一个邻域内等于 } 1, \\ f+g=1 \text{ 在 } S^d = U\bigcup V \text{ 上.} \end{cases}$$

考虑

$$\text{5.7.1.5} \qquad \widehat{\beta} = f\beta + g\gamma - \mathrm{d}f\wedge\omega.$$

我们有

$$f\beta \in \Omega^{r-1}(U), \quad g\gamma \in \Omega^{r-1}(V) \quad 和 \quad \mathrm{d}f\wedge\omega \in \Omega^{r-1}(U\bigcap V).$$

由于 f 和 g 分别在 s 和 n 的邻域内是常数, $\mathrm{d}f$ 和 $\mathrm{d}g$ 的支集实际都在 $U\bigcap V$ 内, 这使得 $\mathrm{d}f\wedge\omega$ 有意义. 于是 $\widehat{\beta} \in \Omega^{r-1}(S^d)$. 对于 $\widehat{\beta}$ 求外微分,

$$\mathrm{d}\widehat{\beta} = \mathrm{d}f\wedge\beta + f\mathrm{d}\beta + \mathrm{d}g\wedge\gamma + g\mathrm{d}\gamma - \mathrm{d}f\wedge\mathrm{d}\omega.$$

由于 $f+g=1$, $\mathrm{d}f = -\mathrm{d}g$, 故

$$\mathrm{d}\widehat{\beta} = \mathrm{d}f\wedge(\beta-\gamma-\mathrm{d}\omega) + f\mathrm{d}\beta + g\mathrm{d}\gamma.$$

而

$$(\beta-\gamma)|_{U\cap V} = \mathrm{d}\omega, \quad 并且 \quad \mathrm{d}\beta = \alpha|_U, \mathrm{d}\gamma = \alpha|_V$$

再注意到 f 的支集在 U 内和 g 的支集在 V 内, 终于得到

$$\mathrm{d}\widehat{\beta} = (f+g)\alpha = \alpha,$$

这就证明了 α 是恰当微分形式, 故 $R^r(S^d)=\{0\}$.

根据归纳原理, 这就证明了对于任意 d 和 $1<r<d$, $R^r(S^d)=\{0\}$.

第二种情形. 考虑 $R^d(S^d)$.

已经证明 $R^1(S^1)\simeq\mathbf{R}$ (5.4.9.2). 假定 $R^{d-1}(S^{d-1})\simeq\mathbf{R}$, 而考虑 $R^d(S^d)$. 设 $\alpha\in F^r(S^d)$, 那么跟第一种情形一样, 存在 $\beta\in\Omega^{d-1}(U)$ 和 $\gamma\in\Omega^{d-1}(V)$, 使得 $\alpha|_U=\mathrm{d}\beta$ 和 $\alpha|_V=\mathrm{d}\gamma$. 于是 $\mathrm{d}((\beta-\gamma)|_{U\bigcap V})=0$. 根据归纳假设 $R^{d-1}(S^{d-1})\simeq\mathbf{R}$. 由于 $R^{d-1}(U\bigcap V)\simeq R^{d-1}(S^{d-1})$(因为 $U\bigcap V\simeq(-1,1)\times S^{d-1}$) , $R^{d-1}(U\bigcap V)$ 作为向量空间是 1 维的, 故存在 $\omega_0\in\Omega^{d-1}(U\bigcap V)$, 使得

$$\beta-\gamma=k\omega_0+\mathrm{d}\delta,\quad \text{其中}k\in\mathbf{R},\quad \delta\in\Omega^{d-2}(U\bigcap V).$$

仍然用 $\{f,g\}$ 表示 5.7.1.4 中引进的单位分解, 令

5.7.1.6
$$\widehat{\beta}=f\beta+g\gamma-\mathrm{d}f\wedge\delta,$$

由于 f 和 β 的支集在 U 内, 而 g 和 γ 的支集在 V 内, $\mathrm{d}f$ 和 δ 的支集在 $U\bigcap V$ 内, 表达式 5.7.1.6 有意义, 并且 $\widehat{\beta}\in\Omega^{d-1}(S^d)$. 求外微分得

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\widehat{\beta}&=f\mathrm{d}\beta+g\mathrm{d}\gamma+\mathrm{d}f\wedge\beta+\mathrm{d}g\wedge\gamma-\mathrm{d}f\wedge\mathrm{d}\delta\\&=(f+g)\alpha+\mathrm{d}f\wedge(\beta-\gamma-(\beta-\gamma-k\omega_0))\\&=\alpha+k\mathrm{d}f\wedge\omega_0.\end{aligned}$$

于是对于任意 α, α 和 $k\mathrm{d}f\wedge\omega_0$ 是同调的: $\mathrm{d}f\wedge\omega_0$ 的类生成 $R^d(S^d)$, 其维数 $\leqslant 1$. 由于 S^d 是连通的, 则由推论 6.3.2 得到 $R^d(S^d)$ 的维数是 1.

5.7.2　推论

除去 $R^0(P^d(\mathbf{R}))\simeq\mathbf{R}$ 和 $R^{2d+1}(P^{2d+1}(\mathbf{R}))\simeq\mathbf{R}$, 均有 $R^r(P^d(\mathbf{R}))=\{0\}$.

设 s 是 S^d 上的对径映射 (即映射 $(x_1,\cdots,x_{d+1})\mapsto(-x_1,\cdots,-x_{d+1})$), 而

$$p:S^d\to P^d(\mathbf{R})=S^d/\{\mathrm{id}_{S^d},s\}$$

是实射影空间 (参见 2.4.12.2) 的 2 层覆叠映射. 设 $\alpha\in F^r(P^d)$: 我们有 $\beta=p^*\alpha\in F^r(S^d)$ (参见 5.4.6 的证明), 及 $s^*\beta=\beta$, 这是因为

$$s^*(\beta)=s^*\circ p^*\alpha=(p\circ s)^*\alpha=p^*\alpha,$$

最后的等号来自 $p\circ s=p$.

对于 $r=0$, 根据 5.4.9.1, 我们有 $R^0(P^d(\mathbf{R}))\simeq\mathbf{R}$.

假定$0<r<d$. 由于 $\beta\in F^r(S^d)$, 这里 $0<r<d$, 而在这种情形下, $R^r(S^d)=\{0\}$, β 是一个恰当微分形式, 故存在 $\gamma\in\Omega^{r-1}(S^d)$, 使得 $\beta=\mathrm{d}\gamma$. 由 $s^*\circ\mathrm{d}=\mathrm{d}\circ s^*$ (参见 5.2.13) 和 $s^*\beta=\beta$, 我们得到 $s^*\beta=s^*\circ\mathrm{d}\gamma=\mathrm{d}(s^*\gamma)=\beta$, 于是

$$\beta=\mathrm{d}\left(\frac{\gamma+s^*\gamma}{2}\right).$$

令 $\delta=(\gamma+s^*\gamma)/2$, 则 $\delta\in\Omega^{r-1}(S^d)$, 并且 $s^*\delta=\delta$. 由于 δ 对于群 $G=\{\mathrm{id}_{S^d},s\}$ 是不变的, 从引理 5.3.9 得到存在唯一的 $\varepsilon\in\Omega^{r-1}(P^d(\mathbf{R}))$, 使得 $p^*\varepsilon=\delta$.

由于 $p^*\circ\mathrm{d}=\mathrm{d}\circ p^*$, 关系 $\beta=p^*\alpha=\mathrm{d}\,\delta$ 随之给出 $p^*\alpha=p^*(\mathrm{d}\varepsilon)$, 而 T_xp 是一个同构, 故 $\alpha=\mathrm{d}\varepsilon$. 终于得到 $\alpha\in F^r(P^d(\mathbf{R}))$ 是一个恰当微分形式, 从而对于 $0<r<d$ 有 $R^r(P^d(\mathbf{R}))=\{0\}$.

最后设 $r=d$. 那么 $\beta=p^*\alpha\in R^d(S^d)\simeq\mathbf{R}$, 故存在实数 k 和 $\gamma\in\Omega^{d-1}(S^d)$, 使得 $\beta=k\sigma+\mathrm{d}\gamma$, 其中 σ 是 S^d 的典范体积形式. 总是有 $s^*\beta=\beta$, 并且 $s^*\sigma=(-1)^{d+1}\sigma$, 故得 $\beta=(-1)^{d+1}k\sigma+\mathrm{d}\,(s^*\gamma)$; 于是

$$\beta=k\frac{(1+(-1)^{d+1})}{2}\sigma+\mathrm{d}\,\delta,\quad \text{其中}\quad \delta=\frac{\gamma+s^*\gamma}{2}.$$

这里 δ 对于群 $\{\mathrm{id}_{S^d},s\}$ 是不变的.

如果 d 是偶数, 则 $\beta=\mathrm{d}\,\delta$, 跟前面一样, 存在 $\varepsilon\in\Omega^{d-1}(P^d(\mathbf{R}))$, 使得 $\alpha=\mathrm{d}\varepsilon$, 于是 $R^d(P^d(\mathbf{R}))=\{0\}$;

如果 d 是奇数, 我们有 $\beta=k\sigma+\mathrm{d}\,\delta$, 其中 $s^*\delta=\delta$, 而且 (d 是奇数)

$$s^*\sigma=(-1)^{d+1}\sigma=\sigma.$$

应用引理 5.3.9, 可以找到 $\varepsilon\in\Omega^{d-1}(P^d(\mathbf{R}))$ 和 $\Omega\in\Omega^d(P^d(\mathbf{R}))$, 使得 $\alpha=k\cdot\omega+\mathrm{d}\varepsilon$, 由此得 $\dim R^d(P^d(\mathbf{R}))\leqslant 1$. 但是如果 d 是奇数, 则 $P^d(\mathbf{R})$ 是可定向的 (定理 5.3.18), 故 (利用下一章的推论 6.3.2) $\dim R^d(P^d(\mathbf{R}))=1$.

5.8 环面的德拉姆群

5.8.1 定理

对于所有 d,r, $R^r(T^d)\cong\mathbf{R}^{\binom{d}{r}}$.

证明提要: 让群 $\mathbf{R}^d$ 通过平移作用在 T^d 上, 令每个 $\alpha\in F^r(T^d)$, 对应它对于这个群的平均 $\overline{\alpha}$. 首先证明 α 和 $\overline{\alpha}$ 是同调的, 其次证明 $\overline{\alpha}$ 对于这个群是不变的, 从而有常系数. 不变的 $r-$ 微分形式等同于 $\Lambda^r(\mathbf{R}^d)^*$, 并且组成 $\binom{d}{r}$ 维的 $F^r(X)$ 的一个向量子空间,记作 Inv^r.α 同调于其不变的平均 $\overline{\alpha}$ 的事实证明了 Inv^r 和 $B^r(T^d)$ 生成 $F^r(T^d)$. 最后就证明了

$$\mathrm{Inv}^r\bigcap B^r(T^d)=\{0\},$$

故 Inv^r 同构于 $F^r(T^d)/B^r(T^d)=R^r(T^d)$.

证明

在 $\mathbf{R}^d$ 上考虑由 $(x_1,x_2,\cdots,x_d)\mapsto(x_1+t,x_2,\cdots,x_d)$ 定义的微分同胚的单参数的 C^∞ 群. 用 G_t 记这个微分同胚. 过渡到商空间, 得到 T^d 上的微分同胚的单参数的 C^∞ 群, 仍然记作 G_t. 特别地, 有

5.8.2 $$G_{t+1}=G_t,\forall t,\quad \text{和}\quad G_{t+s}=G_t\circ G_s,\quad \forall t,s.$$

给定 $\alpha \in F^r(T^d)$. 由于 $G \in C^\infty(\mathbf{R} \times T^d; T^d)$, 我们处于 5.5 节的条件之下, 可以引入在 G_t 作用下 α 的平均

5.8.3
$$\mu_1(\alpha) = \int_0^1 G_\theta^* \alpha \cdot \mathrm{d}\,\theta.$$

根据 5.2.10.5, $\mu_1(\alpha) \in F^r(T^d)$, 此外, 对于所有 t, $\mu_1(\alpha)$ 是 G_t– 不变的, 即

5.8.4
$$G_t^*(\mu_1(\alpha)) = \mu_1(\alpha).$$

事实上, 由于 G_t^* 是线性的, 它跟 $\int$ 可交换, 再利用 5.8.2, 我们得到

$$G_t^*(\mu_1(\alpha)) = G_t^*\left(\int_0^1 G_\theta^*\alpha \cdot \mathrm{d}\,\theta\right) = \int_0^1 G_t^*(G_\theta^*\alpha)\cdot \mathrm{d}\,\theta = \int_0^1 G_{t+\theta}^*\alpha \cdot \mathrm{d}\,\theta$$
$$= \int_t^{t+1} G_\theta^*\alpha \cdot \mathrm{d}\,\theta = \int_0^1 G_\theta^*\alpha \cdot \mathrm{d}\,\theta.$$

5.8.5 *此外, $\mu_1(\alpha)$ 和 α 是同调的.*

事实上, 根据 5.5.12, 我们有

$$G_t^*\alpha - G_0^*\alpha = G_t^*\alpha - \alpha = \mathrm{d}\left(\int_0^t G_t^*\,(\mathrm{int}(\xi)\alpha)\,\mathrm{d}\,t\right) = \mathrm{d}\,\beta_t.$$

由于 β_t 也是 C^∞ 类的, 从 5.2.10.5 得到

$$\mu_1(\alpha) = \int_0^1 G_t^*\alpha \cdot \mathrm{d}\,t = \int_0^1 (\alpha + \mathrm{d}\,\beta_t)\mathrm{d}\,t = \alpha + \int_0^1 \mathrm{d}\,\beta_t \mathrm{d}\,t = \alpha + \mathrm{d}\left(\int_0^1 \beta_t \mathrm{d}\,t\right),$$

这表明 $\mu_1(\alpha)$ 和 α 是同调的.

如果现在考虑 $\mathbf{R}^d$ 的微分同胚 $(x_1, x_2, \cdots, x_d) \mapsto (x_1, x_2 + t, \cdots, x_d)$, 采取同样的过渡到商集合的步骤, 可以得到 T^d 的微分同胚 H_t 的 C^∞ 群和一个平均值

5.8.6
$$\mu_2(\alpha) = \int_0^1 H_t^*\alpha \mathrm{d}\,t,$$

同样有 $H_t^*(\mu_2(\alpha)) = \mu_2(\alpha)$, 并且对于所有 t, $\mu_2(\alpha)$ 和 α 是同调的.

5.8.7 *特别地, 有 $\mu_2(\mu_1(\alpha))$ 和 $\mu_1(\alpha)$ 同调, 进而和 α 同调. 并且 $\mu_2(\mu_1(\alpha))$ 对于诸 H_t^* 以及诸 G_t^* 都是不变的.*

事实上, 由于 G_t^* 是线性的, 得

$$G_t^*(\mu_2(\mu_1(\alpha))) = G_t^*\left(\int_0^1 H_s^*(\mu_1(\alpha))\mathrm{d}\,s\right) = \int_0^1 G_t^* H_s^*(\mu_1(\alpha))\mathrm{d}\,s.$$

而根据 H_s 和 G_t 的定义, 我们有 $H_s \circ G_t = G_t \circ H_s$, 于是

$$G_t^* \circ H_s^* = H_s^* \circ G_t^*,$$

根据 5.8.4 和 5.8.6:

$$G_t^*(\mu_2(\mu_1(\alpha))) = \int_0^1 H_s^*(G_t^*\mu_1(\alpha))\mathrm{d}\,s = \int_0^1 H_s^*(\mu_1(\alpha))\mathrm{d}\,s = \mu_2(\mu_1(\alpha)).$$

对于诸 H_t^* 的不变性的解释可通过把 5.8.4 应用到 H_t 上而得到以类似的方式引进 T^d 上的来自 $\mathbf{R}^d$ 的微分同胚 $(x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_d)\mapsto(x_1,\cdots,x_i+t,\cdots,x_d)$ 的微分同胚以及相应的平均值 $\mu_i(\alpha)$. 现在考虑

5.8.8
$$\overline{\alpha} = \mu_d(\mu_{d-1}(\cdots(\mu_2(\mu_1(\alpha)))\cdots)).$$

从 5.8.7 得到 $\overline{\alpha}$ 同调于 α, 并且 $\overline{\alpha}$ 对于所有平移都不变. 沿用例子 5.3.10.1 中引进的记号写出 $\alpha=\sum\limits_I \alpha_I\omega_I$, 由于 ω_I 对于 $G_t^*, H_t^*,\cdots$ 是不变的, 故得

$$\overline{\alpha} = \sum_I \overline{\alpha}_I\omega_I,$$

其中的 $\overline{\alpha}_I$ 是 T^d 上的 C^∞ 的函数, 对于 $G_t^*, H_t^*,\cdots$ 是不变的, 即对于所有 $s,t,\cdots$, 有

$$\alpha_I = \alpha_I\circ H_s = \alpha_I\circ G_t = \cdots,$$

终于得到 α_I 是常数 $k_I\in\mathbf{R}$.

$\sum\limits_I k_I\omega_I, k_I\in\mathbf{R}$, 构成一个实向量空间, 其维数跟 $\Lambda^r(\mathbf{R}^d)^*$ 的维数相同, 即 $\binom{d}{r}$, $\{\omega_I : I=(i_1,\cdots,i_r)\}$ 是此向量空间的基底, 记此空间为 Inv^r; 如果 $\alpha\in\mathrm{Inv}^r$, 由于从例子 5.3.10.1 知 $\mathrm{d}\,\omega_I=0$, 我们有 $\mathrm{d}\,\alpha=0$, 以 $\mathrm{Inv}^r\subset F^r(T^d)$.

$\overline{\alpha}\in\mathrm{Inv}^r$ 与 α 同调这个事实恰好说明 $B^r(T^d)$ 和 Inv^r 生成 $F^r(T^d)$. 下面验证 $B^r(T^d)\bigcap\mathrm{Inv}^r=\{0\}$. 设 $\alpha=\mathrm{d}\,\beta$, $\beta\in\Omega^{r-1}(T^d)$, 且 $\alpha\in\mathrm{Inv}^r$. 证明开头所引进的平均运算 $\bar{\ }$ 可以作用在 β 上, 无论 β 是否是闭微分形式, 并且根据 5.2.10.5, $\bar{\ }$ 同 d 可交换, 故得

$$\bar{\alpha} = \overline{\mathrm{d}\,\beta} = \mathrm{d}\,\bar{\beta}.$$

而 $\bar{\beta}\in\mathrm{Inv}^r$, 故由前面提到的, $\bar{\beta}\in F^{r-1}(T^d)$. 故 $\mathrm{d}\,\bar{\beta}=0$, $\bar{\alpha}=\alpha=0$.

5.8.9　注释

这个证明的思想可以应用到众多情形的 $R^r(X)$ 的计算当中, 其中有一个紧致李群 G 传递地作用在其中的流形 X 上. 为此必须知道 G 的哈尔测度 $\mathrm{d}\,g$(参见习题 3.6.5). 从每个 $\alpha\in F^r(X)$, 诱导出

$$\bar{\alpha} = \int_{g\in G} g^*\alpha\mathrm{d}\,g,\ \text{这里的}\ \bar{\alpha}\sim\alpha,\ \text{并且}\ \bar{\alpha}\ \text{对于}\ G\ \text{是不变的}.$$

比如对于 $X=S^d$, $G=SO(d+1)$, 容易确信仅有的非零的且对于 $SO(d+1)$ 是不变的 $\alpha\in\Omega^r(S^d)$, 当 $r=0$ 时, 是常数, 当 $r=d$ 时, 是 σ 的倍数, 这里 σ 是 S^d 的典范体积形式. 这样就避免了在 5.7.1 中援引后面第六章的结果.

5.9 习　　题

5.9.1 设 ξ 是 S^2 上的一个一阶微分形式. 假定对于任意 $s \in SO(3), s^*\xi = \xi$, 即 ξ 对于 $SO(3)$ 是不变的. 证明 ξ 是零.

5.9.2 S^d 上的 d 阶微分形式 ω 满足条件: 对于 $SO(d;\mathbf{R})$ 中的任意 s 有 $s^*\omega = \omega$, 请问 ω 是什么? (首先研究 $d=3$ 的情形).

5.9.3 $\mathbf{R}^d$ 上的 $d-1$ 阶微分形式 ω 满足条件: 对于 $SL(d;\mathbf{R})$ 中的任意 s 有 $s^*\omega = \omega$, ω 是什么? (首先研究 $d=3$ 的情形, 提示 $SL(d;\mathbf{R}) = \{f \in \mathrm{Isom}\,(\mathbf{R}^d;\mathbf{R}^d) : \det f = 1\}$).

5.9.4 设 X 是一个 d 维流形. 定义映射 s 如下:

$$s : \Lambda^d T^* X \to \Lambda^d T^* X.$$

令 $\alpha \in \Lambda^d T^* X$ 对应 $-\alpha$,

$$s : \Lambda^d T^* X \ni \alpha \mapsto -\alpha \in \Lambda^d T^* X,$$

并且令

$$N = \{0 \in \Lambda^d T_x^* X : x \in X\} \quad (0 = \text{零微分形式}).$$

a) 证明 N 是 $\Lambda^d T^* X$ 的闭子流形.

b) 证明由 s 生成的两个元素的群 G 是 $\mathrm{Diff}\,(\Lambda^d T^* X - N)$ 的一个无不动点的真不连续的子群.

c) 用 $p : (\Lambda^d T^* X - N)/G \to X$ 表示这样一个映射: 典范投影 $\Lambda^d T^* X \to X$ 先限制在 $\Lambda^d T^* X - N$ 上再过渡到对 G 求商. 证明 X 上的一个密度确定一个映射

$$\delta : X \to (\Lambda^d T^* X - N)/G,$$

使得 $p \circ \delta = \mathrm{id}\,_X$; 逆命题亦真.

5.9.5 设 $P^n(\mathbf{R})$ 是 n 维射影空间, 配备其 C^∞ 典范结构, 而 $\pi : \mathbf{R}^{n+1} - \{0\} \to P^n(\mathbf{R})$ 是典范投影. 设 α 是 $\mathbf{R}^{n+1} - \{0\}$ 上的 $p(p \leqslant n)$ 阶微分形式.

1° 为了证明存在 $P^n(\mathbf{R})$ 上的微分形式 β, 使得 $\pi^*\beta = \alpha$, 必须且只需 α 可以写成

$$\alpha(x) = \sum_{0 \leqslant i_0 < \cdots < i_p \leqslant n} a_{i_0 \cdots i_p}(x) \eta_{i_0 \cdots i_p}(x) \tag{1}$$

其中 $\eta_{i_0 \cdots i_p}(x)$ 是微分形式

$$\sum_{j=0}^{p} (-1)^j x_{i_j} \mathrm{d}\, x_{i_0} \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}\, x_{i_j}} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\, x_{i_p},$$

其中 $\mathrm{d}x_{i_j}$ 上面的符号 ^ 表示 $\mathrm{d}x_{i_j}$ 在乘积中不出现, 而其余的因子保持同样次序, 而 $a_{i_0\cdots i_p}$ 是 $\mathbf{R}^{n+1}-\{0\}$ 上的 $(-p-1)$ 阶齐次函数.(利用 $P^n(\mathbf{R})$ 的坐标卡, 参见习题 2.8.30. 为了证明表达式 (1) 对于 $\alpha=\pi^*\beta$ 是充分的, 可以从研究问题 2° 的情形 c) 着手.)

2° 在以下特殊情形, 确定具有上述性质的所有微分形式:

a) n 任意, $p=0$;

b) $n=1,\ p=1$;

c) $n=2,\ p=1$;

d) n 任意, $p=n$.

3° 证明如果 n 是偶数, 则 $P^n(\mathbf{R})$ 上的所有 n 阶微分形式至少在一个点为零. 证明如果 n 是奇数, 则存在一个 n 阶微分形式, 在 $P^n(\mathbf{R})$ 的任何点不是零.

4° 假定 $p=2q-1, 2q\leqslant n$. 证明 $\mathbf{R}^{n+1}-\{0\}$ 上的 $2q$ 阶微分形式

$$\alpha_1(x)=(2q-1)r^{-2q}\sum_{i_0<i_1<\cdots<i_p}c_{i_0i_1\cdots i_p}\mathrm{d}x_{i_0}\wedge\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_p}$$

$(r^2=x_0^2+\cdots+x_n^2, c_{i_0i_1\cdots i_p}\in\mathbf{R})$ 可以写成 $\alpha_1=\pi^*\beta_1$, 其中 β_1 是 $P^n(\mathbf{R})$ 上的一个微分形式.

5° 假定 $n\geqslant 3$. 设 $(a_{ij})_{0\leqslant i,j\leqslant n}$ 是定义在 $\mathbf{R}^{n+1}-\{0\}$ 上的 C^∞ 类的 -2 阶齐次的函数的反对称矩阵. 证明 $\mathbf{R}^{n+1}-\{0\}$ 上的微分形式

$$\alpha_2=\sum_{i,j,k,l=0}^{n}\left(a_{ij}a_{kl}+2\sum_{m=0}^{n}a_{ij}x_m\frac{\partial a_{ml}}{\partial x_k}+\sum_{m,p=0}^{n}x_mx_p\frac{\partial a_{mj}}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial a_{pl}}{\partial x_k}\right)\times \mathrm{d}x_i\wedge\mathrm{d}x_j\wedge\mathrm{d}x_k\wedge\mathrm{d}x_l$$

可以写成 $\alpha_2=\pi^*\beta_2$ 的形式, 这里 β_2 是 $P^n(\mathbf{R})$ 上的一个微分形式. 在 $P^n(\mathbf{R})$ 的常用坐标卡里给出 β_2 的表达式.

6° 设 γ 是 $\mathbf{R}^{n+1}-\{0\}(n\geqslant 3)$ 上的微分形式:

$$\gamma(x)=r^{-4}\mathrm{d}x_0\wedge\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3,$$

能否找到 $P^n(\mathbf{R})$ 上的一个微分形式 γ_1, 使得 $\pi^*\gamma_1=\gamma$?

5.9.6 设 s 是 S^2 的对径映射, 证明从 $S^2\times S^2$ 到 $S^2\times S^2$ 内的映射 $(x,y)\mapsto(s(x),s(y))$ 生成一个无不动点真不连续的两个元素的群 G, 并且商流形 $(S^2\times S^2)/G$ 是可定向的. 两个二维实射影空间的乘积 $P^2(\mathbf{R})\times P^2(\mathbf{R})$ 是否是可定向的?

5.9.7 设 f 是从 $\mathbf{R}^d$ 到 $\mathbf{R}$ 的一个 C^∞ 浸没. 证明流形 $f^{-1}(0)$ 是可定向的.

5.9.8 证明两个 C^∞ 类流形的乘积是可定向的, 当且仅当每个因子流形是可定向的.

5.9.9 证明对于所有流形 X, 切丛 TX 是可定向的.

5.9.10 证明克莱因瓶不是可定向的.

5.9.11 默比乌斯带

a) 证明从 $[0,4\pi]\times[0,3/4)$ 到 $\mathbf{R}^3$ 的映射

$$(\theta,r)\mapsto\left(\cos\theta\left(1+r\cos\frac{\theta}{2}\right),\sin\theta\left(1+r\cos\frac{\theta}{2}\right),r\sin\frac{\theta}{2}\right)$$

的像是 $\mathbf{R}^3$ 的一个子流形.

b) 证明它不是可定向的.

5.9.12 设 X,Y 是两个流形, 而 $D\subset X$ 是 X 的带边区域. 证明 $D\times Y\subset X\times Y$ 是 $X\times Y$ 的一个带边区域, 并且 $\partial(D\times Y)=\partial D\times Y$. 设 $E\subset Y$ 是 Y 的一个带边区域. $D\times E\subset X\times Y$ 是一个带边区域吗?(针对所有情形考虑边界 $\partial(D\times E)$.)

5.9.13 证明在环面 T^d 上, 不存在函数 f 使得 $\mathrm{d}f=\omega_1$, 这里 ω_1 是 5.3.10.1 中定义的.

5.9.14 详细证明 5.3.30, 5.3.31.1, 5.3.31.2, 5.3.37.1, 5.3.37.2.

5.9.15 证明 d 维流形 X 的德拉姆群的直和 $R^*(X)=\sum\limits_{k=0}^{d}R^k(X)$ 可以典范地配备一个代数结构.

5.9.16 设 Y 是流形 X 的一个子流形, $i:Y\to X$ 是典范单射. 假定存在一个映射 $r\in C^\infty(X;Y)$, 使得 $r|_Y=\mathrm{id}_Y$. 证明对于所有 k, $i^*:R^k(X)\to R^k(Y)$ 是满射. 这对于典范含于关系 $S^{d-1}\subset S^d$ 成立吗?

5.9.17 设 $\mathbf{R}^4$ 通过 $(x,y,z,t)=(u=x+iy,v=z+it)$ 等同于 $\mathbf{C}^2$. 给定大于 0 的整数 n, 设 G 是由

$$(u,v)\mapsto\left(\exp\left(\frac{2i\pi}{n}\right)u,\exp\left(\frac{2i\pi}{n}\right)v\right)$$

生成的群. 证明 G 是无不动点真不连续的作用在 $S^3\subset R^4$ 上的群. $Y=S^3/G$ 是否是可定向的? 对于 $n=1,n=2$, 它等于什么? 在一般情形 (n 是任意的), 计算 $R^k(Y),k=0,1,2,3$.

5.9.18 计算克莱因瓶的德拉姆群.

5.9.19 给出注释 5.4.8 的反例.

第六章　流形上的积分法

一个流形, 即使是定向的, 未必具有典范测度, 可是只要流形是定向的, 就总能够在其上典范地积分一个最大阶的微分形式 (6.1.3). 这一现象是基础性的. 在此框架内, 我们证明了斯托克斯公式, 它是一个重要的工具, 因为它搭建了联系带边区域和它的边界的桥梁.

斯托克斯公式的威力随后用多个例子显示. 特别提及的是: 球面和两个流形的乘积的不可微同胚性, 向量场的 (6.3.7) 或圆盘的自同构的 (6.3.5) 不动点定理.

随后定义欧几里得空间的子流形的体积 (6.5 和 6.6.3), 它推广了曲线的弧长和曲面的通常面积概念. 我们明晰地计算所有维数的球和球面的体积 (6.5.7). 作为物理应用, 我们证明了阿基米德定理 (6.5.15). 最后, 我们利用斯托克斯公式证明任意维数的等周不等式.

本章最后致力于在第二章定义的管形的体积的计算. 经过漫长而精细的计算而达到作为制高点的公式 6.9.9, 它仅仅借助与流形 X 关联的不变量在流形上的积分表示体积, X 是嵌入到一个欧几里得空间里的. 这里提到的不变量称为 X 的外尔曲率. 在 X 是一条曲线的情形, 这个公式仅含一项, 明晰的计算得以完成 (6.9.10).

6.1 d 维定向流形上 d 阶微分形式的积分

设 X 是一个定向的 d 维流形, 而 ω 是与给定定向相应的体积形式 (参见 5.3.3). 由于 $\omega \in \Omega_0^d(X)$, $|\omega|$ 是 X 上的密度 (参见 3.3.5), 则 ω 典范地对应 X 上一个勒贝格测度, 仍然记作 $|\omega|$, 参见 3.3.11.

设 α 是一个 d 阶微分形式. 由于 $\omega(x)$ 对于所有 x 是非零的, 故存在 $f: X \to \mathbf{R}$, 使得 $\alpha = f \cdot \omega$ (参见 3.3.8 及其证明).

如果 $f \in C_{|\omega|}^{\text{int}}(X)$, 则记作 $\alpha \in \Omega_{\text{int}}^d(X)$, 并说 α 在 X 上是可积的, 其中 $C_{|\omega|}^{\text{int}}(X)$ 表示 X 上的对于测度 $|\omega|$ 可积函数的实向量空间:

6.1.1 $$\alpha \in \Omega_{\text{int}}^d(X) \Leftrightarrow f \in C_{|\omega|}^{\text{int}}(X).$$

引进记号

6.1.2 $$\int_X \alpha = \int_X f|\omega|.$$

如果这一切不依赖所考虑的体积形式, 上述定义才有意义. 设 $\omega' \in \Omega_0^d(X)$ 是对于选定定向的另一个体积形式, 我们有 $\omega' = h \cdot \omega$, 并且 $h \in C^0(X; \mathbf{R}_+^*)$ (参见 5.3.4). 于是, 测度 $|\omega'|$ 可以写成 $|\omega'| = h \cdot |\omega|$. 那么 0.4.3.2 正好说的是 6.1.1 和 6.1.2 有意义, 且不依赖体积形式 ω 的选择. 故得:

6.1.3 定理和定义

设 X 是一个 d 维定向流形. 可以内蕴地定义一个向量空间 $\Omega_{\text{int}}^d(X)$ 和从 $\Omega_{\text{int}}^d(X)$ 到 $\mathbf{R}$ 内的 $\boldsymbol{R}$- 线性映射

$$\alpha \mapsto \int_X \alpha,$$

$\int_X \alpha$ 称为 α 在 X 上的积分.

6.1.4 例子

6.1.4.1 设 $\alpha \in \Omega_0^d(X)$, 并且 α 的支集是紧致的, 则满足关系 $\alpha(x) = f(x)\omega(x)$ 的函数 f 是连续的, 并且有紧致支集, 故 $\alpha \in \Omega_{\text{int}}^d(X)$.

6.1.4.2 特别地, 如果 $X = \mathbf{R}^d$, 而 $\alpha \in \Omega_0^d(\mathbf{R}^d)$ 有紧致支集, 则取 $\mathbf{R}^d$ 上的体积形式是常数形式 $\mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_d$ (参见 5.3.8.1). 如果 $\alpha(x) = f(x)\mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_d$, 则有

$$\int_{\mathbf{R}^d} \alpha = \int_{\mathbf{R}^d} f \cdot \delta_0,$$

其中 δ_0 是 $\mathbf{R}^d$ 上的勒贝格测度.

6.1.4.3 设 X 是由一个体积形式 ω 的选取而定向的流形, 那么 $-\omega$ 定义另一个定向. 用 $-X$ 表示被 $-\omega$ 定向的流形 X, 如果 $\alpha \in \Omega^d_{\mathrm{int}}(X)$, 则 $\alpha \in \Omega^d_{\mathrm{int}}(-X)$, 并且

$$\int_{-X} \alpha = -\int_X \alpha.$$

事实上, 如果 $f \in C^{\mathrm{int}}_{|\omega|}(X)$ 满足 $\alpha = f\omega$, 则 $\alpha = (-f)(-\omega)$, 于是

$$\int_{-X} \alpha = \int_X (-f)|-\omega| = -\int_X f|\omega|.$$

6.1.4.4 命题

设 X 和 Y 是两个定向流形, 而 $f \in \mathrm{Diff}\,(X;Y)$ 保持定向, 如果 $\beta \in \Omega^d_{\mathrm{int}}(Y)$, 则 $f^*(\beta) \in \Omega^d_{\mathrm{int}}(X)$, 并且 $\displaystyle\int_X f^*\beta = \int_Y \beta$.

设 ω' 是 Y 上定义给定定向的一个体积形式, 而 g 是从 Y 到 $\mathbf{R}$ 内的函数, 使得 $\beta = g \cdot \omega'$. 设 $\omega = f^*\omega'$: 由于 f 保持定向, ω 是 X 上的确定 X 的定向的体积形式. 对于关联的密度有

$$f^*(|\omega'|) = |\omega|.$$

我们有 $f^*\beta = f^*(g\cdot\omega') = (g\circ f)(f^*\omega') = (g\circ f)\cdot\omega$. 根据定义有

$$\int_X f^*\beta = \int_X (g\circ f)|\omega| \quad 和 \quad \int_Y \beta = \int_Y g|\omega'|;$$

从 3.3.16 立刻得到结论.

6.1.4.5 *设 X 和 Y 是两个定向流形, $f \in \mathrm{Diff}\,(X;Y)$ 颠倒定向, 如果 $\beta \in \Omega^d_{\mathrm{int}}(Y)$, 则 $f^*\beta \in \Omega^d_{\mathrm{int}}(X)$,并且$\displaystyle\int_X f^*\beta = -\int_Y \beta$.*

该结论可由 6.1.4.3 和 6.1.4.4 得到.

6.1.4.6 *以下设 X 是定向流形, 而 (U_i,φ_i,ψ_i) 是从属于正的 (U_i,φ_i) 的单位分解.*

设 $\alpha \in \Omega^d_0(X)$, α 有紧致支集. 可以写出 $\alpha = \displaystyle\sum_i \psi_i\alpha$, 由于 α 有紧致支集, 实际只有有限个指标 i, 使得 $\psi_i\alpha \neq 0$. 我们有 $\alpha \in \Omega^d_{\mathrm{int}}(X)$ (参见 6.1.4.1), 并且由于线性性, 还有

$$\int_X \alpha = \sum_i \int_X \psi_i\alpha.$$

而 $\psi_i\alpha$ 是支集在坐标卡 (U_i,φ_i) 的定义域 U_i 内的一个微分形式, 由于 $\varphi_i \in \mathrm{Diff}\,(U_i;\varphi_i(U_i))$, 坐标卡又是正的, 根据 6.1.4.4 和 6.1.4.9,

$$\int_X \psi_i\alpha = \int_{U_i} \psi_i\alpha = \int_{\varphi_i(U_i)} (\varphi_i^{-1})^*(\psi_i\alpha) = \int_{\mathbf{R}^d} (\varphi_i^{-1})^*(\psi_i\alpha),$$

遂得

6.1.4.6′
$$\int_X \alpha = \sum_i \int_{\mathbf{R}^d} (\varphi_i^{-1})^*(\psi_i \alpha).$$

注释

如果不熟悉密度, 可以从这个公式出发定义 $\int_X \alpha$.

6.1.4.7 设 X 和 Y 是维数分别为 d 和 e 的两个定向流形. 假定 $X\times Y$ 被典范地定向 (参见 5.3.8.4). 那么如果 $\alpha \in \Omega^d_{\text{int}}(X)$ 且 $\beta \in \Omega^e_{\text{int}}(Y)$, 并且如果用 p 和 q 分别表示 $X\times Y$ 到 X 上和到 Y 的投影时有

$$p^*\alpha \wedge q^*\beta \in \Omega^{d+e}_{\text{int}}(X\times Y),$$

则

$$\int_{X\times Y} p^*\alpha \wedge q^*\beta = \left(\int_X \alpha\right)\left(\int_Y \beta\right).$$

设 ω 和 ω' 是 X 和 Y 上的体积形式, 而 f 和 g 使得 $\alpha = f\omega$ 和 $\beta = g\omega'$, 则

$$p^*\alpha = (f\circ p)p^*\omega, \quad q^*\beta = (g\circ q)q^*\omega',$$

并且

$$p^*\alpha \wedge q^*\beta = (f\circ p)(g\circ q)(p^*\omega)\wedge(q^*\omega').$$

对于密度 $|\omega|$ 和 $|\omega'|$ 利用 3.3.18 的结果即得

$$|(p^*\omega)\wedge(q^*\omega')| = |\omega|\otimes|\omega'|,$$

等式右端是测度 $|\omega|$ 和 $|\omega'|$ 的乘积.

于是 $X\times Y$ 被 $(p^*\omega)\wedge(q^*\omega')$ 定向, 借助 3.3.18.7 得到:

$$\begin{aligned}\int_{X\times Y} p^*\alpha\wedge q^*\beta &= \int_{X\times Y} (f\circ p)(g\circ q)|(p^*\omega)\wedge(q^*\omega')| \\ &= \int_{X\times Y} (f\circ p)(g\circ q)|\omega|\otimes|\omega'| \\ &= \int_X f\left(\int_{\{x\}\times Y} (g\circ q)\mathrm{d}\,|\omega'|\right)\mathrm{d}\,|\omega| \\ &= \int_X f\cdot\omega \int_Y g\cdot\omega' = \left(\int_X \alpha\right)\left(\int_Y \beta\right).\end{aligned}$$

6.1.4.8 设覆叠映射 $p: X\to Y$ 是 k 层的, Y 是定向流形, 而 X 由 p 定向 (参见 5.3.8.3), 又设 $d = \dim X = \dim Y$. 如果 $\alpha \in \Omega^d_{\text{int}}(Y)$, 则 $p^*\alpha \in \Omega^d_{\text{int}}(X)$, 并且 $\int_X p^*\alpha = k\int_Y \alpha$.

由于有紧致支集的连续函数在 $C^{\text{int}}_{|\omega|}$ 中稠密, 只需对于有紧致支集的 $\alpha \in \Omega_0^d(Y)$ 进行证明. 考虑 Y 的覆叠映射类型的单位分解 (U_i, φ_i, ψ_i), 即 (U_i, φ_i) 是 Y 的坐标卡, 使得$p^{-1}(U_i) = U_i^1 \bigcup \cdots \bigcup U_i^k, U_i^j (j = 1, \cdots, k)$ 两两不交, 并且 $p : U_i^j \to U_i$ 是微分同胚 (参见 2.4.1, 2.4.4, 3.2.3). 此外, Y 是定向的, 而 X 被 p 定向, p 在 U_i^j 的限制保持定向.

于是有

$$\int_Y \alpha = \sum_i \int_Y \psi_i \alpha = \sum_i \int_{U_i} \psi_i \alpha.$$

由于 $p : U_i^j \to U_i$ 是保持定向的微分同胚, 根据 6.1.4.4, 对于 $j = 1, \cdots, k$,

$$\int_{U_i} \psi_i \alpha = \int_{U_i^j} p^*(\psi_i \alpha),$$

故

$$\sum_{j=1}^k \left(\int_{U_i^j} p^*(\psi_i \alpha) \right) = k \int_{U_i} (\psi_i \alpha).$$

又有

$$\int_{p^{-1}(U_i)} p^*(\psi_i \alpha) = \int_{p^{-1}(U_i)} (\psi_i \circ p)(p^* \alpha),$$

由于 $\psi_i \circ p$ 的支集在 $p^{-1}(U_i)$ 内, 于是有

$$k \int_Y \alpha = \sum_i k \int_{U_i} \psi_i \alpha = \sum_i k \int_{p^{-1}(U_i)} (\psi_i \circ p)(p^* \alpha) = \sum_i k \int_X (\psi_i \circ p)(p^* \alpha).$$

而由 $\sum\limits_i \psi_i = 1$ 推出 $\sum\limits_i \psi_i \circ p = 1$, 因和是局部有限的, 且 α 有紧致支集, 所以可以交换积分和对于 i 的求和次序, 从而得到 $k \left(\int_Y \alpha \right) = \int_X p^* \alpha.$

6.1.4.9 设 X 是一个定向流形, $U \in O(X)$ 被由 X 所诱导的定向确立定向. 如果 $\alpha \in \Omega^d_{\text{int}}(X)$, 则

$$\alpha|_U \in \Omega^d_{\text{int}}(U) \quad \text{并且} \int_U (\alpha|_U) = \int_X \chi_U \alpha,$$

其中 χ_U 是 U 的特征函数.

事实上, χ_U 是有界可测函数. 而如果 $\alpha \in \Omega^d_{\text{int}}(X), \omega$ 是 X 上的体积形式, 则有 $f \in C^{\text{int}}_{|\omega|}(X)$, 使得 $\alpha = f\omega$. 于是 $\chi_U f$ 对于 $|\omega|$ 是可积函数, 随之对于 $|\omega|_U$ 也是可积的 (参见 [6], 15 页, 5). 由于 $\alpha|_U = (\chi_U f)(\omega|_U)$, 欲证的性质随即得到.

6.1.4.10 记号

设 X 是一个定向流形, D 是 X 的一个紧致集, $\alpha \in \Omega_0^d(X)$, 而 χ_D 是 D 的特征函数. 则 $\chi_D \alpha \in \Omega^d_{\text{int}}(X)$, 今后将令

$$\boxed{\int_D \alpha = \int_X \chi_D \alpha}.$$

6.1.4.11 (积分的连续性)

设 $t \mapsto \alpha(t)$ 是 d 维定向紧致流形 X 上的 d 阶 C^0 类微分形式的连续族 (参见 5.2.10). 则映射 $t \mapsto \displaystyle\int_X \alpha(t)$ 是连续的.

仍然设 $\{(U_i, \varphi_i, \psi_i)\}$ 是 X 的单位分解, 通过它归结到引理 5.2.10.6. 由 6.1.4.6′ 得

$$\int_X \alpha(t) = \sum_i \int_{U_i} (\psi_i \alpha(t)) = \sum_i \int_{\varphi_i(U_i)} \left(\varphi_i^{-1}\right)^* (\psi_i \alpha(t)),$$

只需验证每一项的连续性. 而这可从 0.4.8.2,5.2.10.1 和 6.1.4.2 得到.

公式 6.1.4.6′ 几乎只有理论上的意义. 在实际的明晰计算当中, 更经常利用以下结果:

6.1.5 定理

设 X 是一个 d 维定向紧致流形, 而 $\alpha \in \Omega_0^d(X)$. 给定三元组的一个有限族 $\{(U_i, V_i, \tau_i)\}$:U_i 是 $\mathbf{R}^d$ 的开集, V_i 是 U_i 的紧致集, τ_i 是从 U_i 到 X 内的一个 C^p 类映射, 使得

$$\tau_i(\mathring{V}_i) \in O(X), \quad \tau_i \in \operatorname{Diff}(\mathring{V}_i; \tau(\mathring{V}_i)),$$

并且保持定向.

还假定对于 $i \neq j$,

$$\tau_i(\mathring{V}_i) \bigcap \tau_j(\mathring{V}_j) = \varnothing, \quad \bigcup_i \tau_i(V_i) = X.$$

并且对于所有 i, $V_i - \mathring{V}_i$ 是零测度集. 则

$$\int_X \alpha = \sum_i \int_{\tau_i(\mathring{V}_i)} \alpha = \sum_i \int_{\mathring{V}_i} \tau_i^* \alpha.$$

叙述偏长, 但是表达了一个十分简单的结果: 计算积分时, 可以仅仅在一些开集 (通常是坐标卡的定义域) 上积分, 如果忽略一个零测度集, 这些开集将覆盖整个流形.

因为 $V_i - \mathring{V}_i$ 是零测度集, 而且 $\tau_i \in C^p(U_i; X)$, 作为零测度集在 C^1 类映射下的像集, $\tau_i(V_i - \mathring{V}_i)$ 在 X 内也是零测度的, 参见 3.3.17.3.

于是 $\bigcup\limits_i \tau_i(V_i - \mathring{V}_i)$ 仍然是零测度集, 并且有

$$\int_X \alpha = \int_{X - \bigcup_i \tau_i(V_i - \mathring{V}_i)} \alpha = \int_{\left(\bigcup_i \tau_i(V_i)\right) - \bigcup_i \tau_i(V_i - \mathring{V}_i)} \alpha.$$

而 V_i 是紧致集, $\tau_i \in C^p(U_i; X)$, 故 V_i 的边界在 τ_i 下的像集是像集的边界, 即

$$\tau_i(V_i - \mathring{V}_i) = \tau_i(V_i) - \tau_i(\mathring{V}_i), \quad \text{故} \quad \left(\bigcup_i \tau_i(V_i)\right) - \bigcup_i (\tau_i(V_i - \mathring{V}_i)) = \bigcup_i \tau_i(\mathring{V}_i)$$

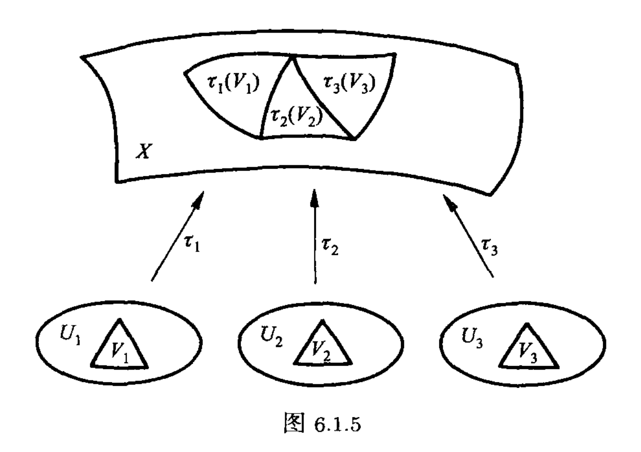


图 6.1.5

(这就取消了边界). 由于 $\tau_i(\mathring{V}_i)$ 不相交, 故得

$$\int_X \alpha = \sum_i \int_{\tau_i(\mathring{V}_i)} \alpha = \sum_i \int_{\mathring{V}_i} \tau_i^* \alpha.$$

6.1.6 典型例子 (其他例子, 参见物理书): **S^2 上利用地理坐标的计算**

这里 $X = S^2$, 在 6.1.5 中取三元组 (U, V, τ), 其中

$$U = \mathbf{R}^2, V = [-\pi, \pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

$\tau : (\varphi, \theta) \mapsto (\cos\varphi \cdot \cos\theta, \sin\varphi \cdot \cos\theta, \sin\theta)$.$\varphi$ 是经度, 而 θ 是纬度. 我们有 $\tau \in C^\infty(\mathbf{R}^2; S^2)$ (参见 2.6.7), 并且 $V - \mathring{V}$ 是零测度的, $\tau \in \mathrm{Diff}\,(\mathring{V}; \tau(\mathring{V}))$. 如果 φ 是从格林尼治算起的经度, 那么 $\tau(V - \mathring{V})$ 就是国际日期变更线, 在那里, 人们在毫米之间改变日期. τ 是一个微分同胚, 并且保持 S^2 的典范定向: 事实上, S^2 上的典范体积形式是 (参见 5.3.17.2),

$$\sigma = x\mathrm{d}\,y \wedge \mathrm{d}\,z + y\mathrm{d}\,z \wedge \mathrm{d}\,x + x\mathrm{d}\,y \wedge \mathrm{d}\,z$$

而公式 5.2.8.3 指出 $\tau^*\sigma = \cos\theta \cdot \mathrm{d}\,\varphi \wedge \mathrm{d}\,\theta$, 如果 $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, 则 $\cos\theta > 0$, 这表明 τ 是一个保持定向的微分同胚, 参见 5.3.20. 由此得到 (参见 6.1.5), 对于 S^2 上的连续函数 f:

$$\int_{S^2} f \cdot \sigma = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\cos\varphi \cdot \cos\theta, \sin\varphi \cdot \cos\theta, \sin\theta) \cdot \cos\theta \cdot |\mathrm{d}\,\varphi \wedge \mathrm{d}\,\theta|.$$

这里出现的是 $\mathbf{R}^2$ 上的勒贝格测度: $\delta_0 = |\mathrm{d}\,\varphi \wedge \mathrm{d}\,\theta|$.

例如, 对于 $f = 1$, 求出 $\int_{S^2} \sigma = 4\pi$, 这正是 S^2 的面积, 还可参见 6.5.7.

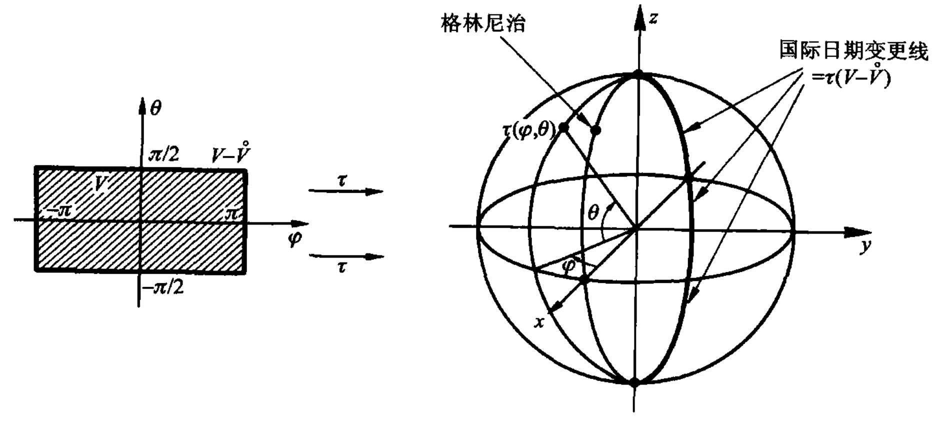


图 6.1.6

6.2 斯托克斯定理

6.2.1 定理

设 X 是一个 d 维定向流形, $\omega \in \Omega_1^{d-1}(X)$, D 是 X 的紧致带边区域. 则

$$\int_D \mathrm{d}\,\omega = \int_{\partial D} i^*\omega,$$

其中: $i:\partial D \to X$ 是典范单射. 如果 $\partial D = \varnothing$, 则 $\int_D \mathrm{d}\,\omega = 0$.

我们注意到 $\int_D \mathrm{d}\,\omega$ 在 6.1.4.10 定义, 而 ∂D 是典范定向的 (参见 5.3.36). 按照 5.2.5.1 的写法, 可以写成

$$\int_{\partial D} \omega|_{\partial D} = \int_{\partial D} i^*\omega.$$

这个定理推广了经典公式 $\int_a^b f'(t)\mathrm{d}\,t = f(b) - f(a)$. 因为对于 $D = [a,b]$, $\partial([a,b]) = \{a\}\bigcup\{b\}$, 对于 b, 指定 "+" 号, 而对于 a, 指定 "−" 号.

证明分几个步骤进行.

第一步. 我们有

$$\int_D \mathrm{d}\,\omega = \int_X \chi_{\mathrm{d}}\,\mathrm{d}\,\omega.$$

设 $\{(U_i,\varphi_i,\theta_i)\}$ 是与诸坐标卡 (U_i,φ_i) 关联的 X 的单位分解, 坐标卡对于 X 的定向是正的. 覆盖 D (带边区域) 的坐标卡根据它关联于 $x \in \mathring{D}$ 或 $x \in \partial D$ (参见 5.3.34) 而区分为两个类型. 根据 ∂D 的定向 (参见 5.3.36), 对于 $x \in \partial D$, 诸坐标卡 $(U_i \bigcap \partial D, \varphi_i|_{\partial D})$ 对于 ∂D 的这个定向是正的.

由于 D 是紧致的, 故仅有有限个指标 i 使得 $D\bigcap U_i \neq \varnothing$, 则

$$\int_X \chi_D \mathrm{d}\,\omega = \int_X \chi_D \mathrm{d}\left(\sum_i \psi_i \omega\right),$$

其中和的项数是有限的. 由于算子 d, D 上的积分及限制 i^* 和 ∂D 上的积分都是可加的, 所以只需对于这样的 $\omega \in \Omega_1^{d-1}(X)$ 证明定理, 它的支集是紧致的, 含于 U 内, 并且 (U,φ) 是带边区域 D 的坐标卡, 其类型是上面考虑的类型中的一个.

第二步. 于是可以假定 ω 的支集是紧致的, 并且含于 U 内. 由于 $\varphi \in \mathrm{Diff}\,(U;\varphi(U))$, 其中 $\varphi(U)$ 是 $\mathbf{R}^d$ 的开集, 应用 6.1.4.4 得到

$$\begin{aligned}\int_D \mathrm{d}\,\omega = \int_X \chi_D \mathrm{d}\,\omega \int_U \chi_D \mathrm{d}\,\omega &= \int_{\varphi(U)} (\varphi^{-1})^*(\chi_D \mathrm{d}\,\omega)\\ &= \int_{\varphi(U)} (\chi_D \circ \varphi^{-1})(\varphi^{-1})^*(\mathrm{d}\,\omega).\end{aligned}$$

而 $\chi_D \circ \varphi^{-1} = \chi_{\varphi(D)}$, $(\varphi^{-1})^*(\mathrm{d}\,\omega)$ 的支集在 $\varphi(U)$ 内, 并且 d 同 $(\varphi^{-1})^*$ 可交换 (参见 5.2.9.3), 上式最后写成

$$\int_D \mathrm{d}\,\omega = \int_{\mathbf{R}^d} \chi_{\varphi(U)} \mathrm{d}\,((\varphi^{-1})^*\omega).$$

同样有

$$\int_{\partial D} \omega|_{\partial D} = \int_{\mathbf{R}^{d-1}} (\varphi^{-1}|_{\partial D})^*(i^*\omega).$$

而 $\varphi(\partial D)$ 含于 $\{0\} \times \mathbf{R}^{d-1}$ (参见 5.3.33), 故

$$\int_{\partial D} \omega|_{\partial D} = \int_{\{0\}\times\mathbf{R}^{d-1}} ((\varphi^{-1})^*\omega)|_{\{0\}\times\mathbf{R}^{d-1}}.$$

令 $\alpha = (\varphi^{-1})^*\omega$, 我们发现只需对于 $X = \mathbf{R}^d, \alpha \in \Omega_0^d(\mathbf{R}^d)$, $\operatorname{supp}\alpha$ 是紧致的, 以及 $D = \mathbf{R}^d$ 和 $D = (-\infty, 0] \times \mathbf{R}^{d-1}$ 这两种情形证明定理: 在第一种情形, $\partial D = \varnothing$; 在第二种情形, $\partial D = \{0\} \times \mathbf{R}^{n-1}$.

第三步. $D = \mathbf{R}^d$, $\partial D = \varnothing$. 必须证明 $\int_{\mathbf{R}^d} \mathrm{d}\,\alpha = 0$. 设

$$\alpha = \sum_{i=1}^d \alpha_i \mathrm{d}\,x_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}\,x_i} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\,x_d$$

(参见 5.2.7.2). 由于 α 有紧致支集, 所以可以找到一个立方体 Q, 使得 $\operatorname{supp}\alpha \subset \mathring{Q}$. 令 $Q = Q_1 \times Q_{d-1}$, 这里 $Q_1 = [a,b] \subset \mathbf{R}$, 而 Q_{d-1} 是 $\mathbf{R}^{d-1}$ 的一个正方体. 我们有

$$\mathrm{d}\,\alpha = \left(\sum_{i=1}^d (-1)^{i+1} \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_i}\right) \omega_0, \quad \text{而} \quad \omega_0 = \mathrm{d}\,x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\,x_d.$$

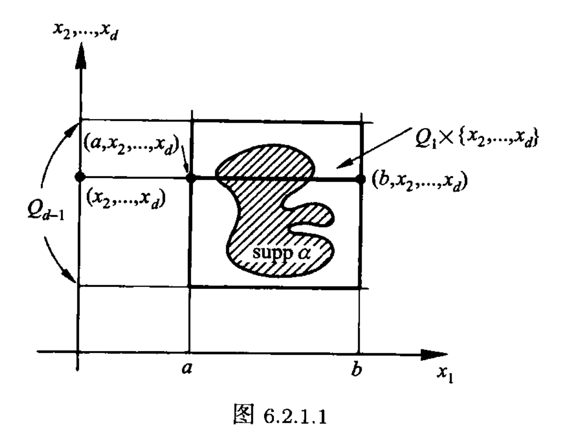


图 6.2.1.1

根据富比尼定理 (0.4.5.1)

$$\int_{\mathbf{R}^d}\frac{\partial\alpha_1}{\partial x_1}|\omega_0|=\int_Q\frac{\partial\alpha_1}{\partial x_1}|\omega_0|=\int_{Q_1\times Q_{d-1}}\frac{\partial\alpha_1}{\partial x_1}|\omega_0|$$
$$=\int_{Q_{d-1}}\left(\int_{Q_1\times\{x_2,\cdots,x_d\}}\frac{\partial\alpha_1}{\partial x_1}|\mathrm{d}\,x_1|\right)|\mathrm{d}\,x_2\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\,x_d|.$$

因为 $\operatorname{supp}\alpha\bigcap\partial Q=\varnothing$, 我们有

$$\int_{Q_1\times\{x_2,\cdots,x_d\}}\frac{\partial\alpha_1}{\partial x_1}|\mathrm{d}\,x_1|=\alpha_1(b,x_2,\cdots,x_d)-\alpha_1(a,x_2,\cdots,x_d)=0,$$

于是

$$\int_{\mathbf{R}^d}\frac{\partial\alpha_1}{\partial x_1}|\omega_0|=\int_Q\frac{\partial\alpha_1}{\partial x_1}|\omega_0|=0.$$

对于所有 i, 同样有 $\displaystyle\int_Q\frac{\partial\alpha_i}{\partial x_i}|\omega_0|=0$, 这就确立了结果.

第四步. $D=(-\infty,0]\times\mathbf{R}^{d-1},\partial D=\{0\}\times\mathbf{R}^{d-1}$.
仍然考虑一个立方体 Q', 使得 $\operatorname{supp}\alpha\subset\mathring{Q}'$. 令

$$Q=Q'\bigcap(\mathbf{R}^-\times\mathbf{R}^{d-1})=[a,0]\times Q_{d-1}.$$

对于像前面那样写出的 α, 仍然有

$$\text{对于所有}i=2,\cdots,d,\quad\int_Q\frac{\partial\alpha_i}{\partial x_i}|\omega_0|=0.$$

事实上, 如果 $Q_{d-1}=[a_2,b_2]\times\cdots\times[a_d,b_d]$, 跟前面一样, 我们有

$$\int_{a_i}^{b_i}\frac{\partial\alpha_i}{\partial x_i}(x_1,\cdots,x_{i-1},t,x_{i+1},\cdots,x_d)\mathrm{d}\,t$$
$$=\alpha_i(x_1,\cdots,x_{i-1},b_i,x_{i+1},\cdots,x_d)-\alpha_i(x_1,\cdots,x_{i-1},a_i,x_{i+1},\cdots,x_d),$$

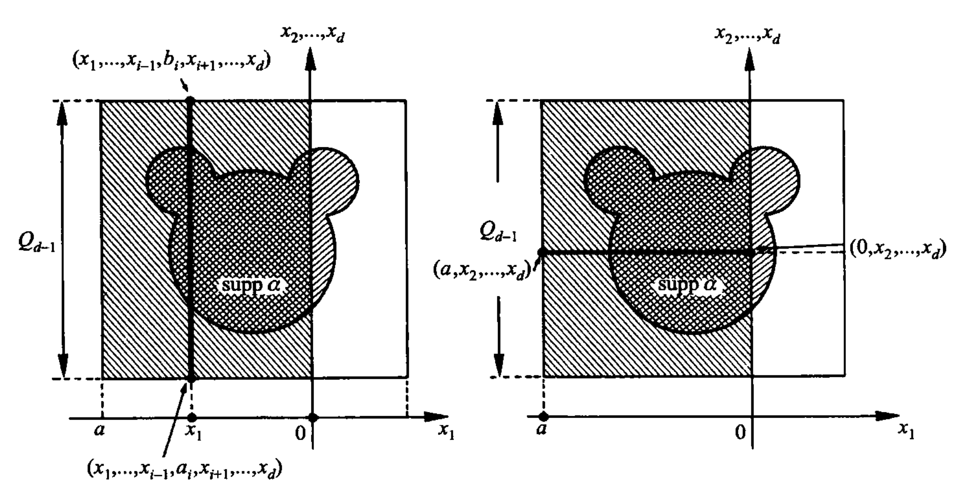


图 6.2.1.2

但是对于所有的

$$(x_1,\cdots,x_{i-1},x_{i+1},\cdots,x_d)\in[a,0]\times[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_{i-1},b_{i-1}]\times[a_{i+1},b_{i+1}]\times\cdots\times[a_d,b_d],$$

都有

$$(x_1,\cdots,x_{i-1},b_i,x_{i+1},\cdots,x_d),(x_1,\cdots,x_{i-1},a_i,x_{i+1},\cdots,x_d)\in\partial Q',$$

故

$$\int_{a_i}^{b_i}\frac{\partial\alpha_i}{\partial x_i}(x_1,\cdots,x_{i-1},t,x_{i+1},\cdots,x_d)|\mathrm{d}\,t|=0,\quad 随之\quad \int_Q\frac{\partial\alpha_i}{\partial x_i}|\omega_0|=0.$$

而对于 $\displaystyle\int_Q\frac{\partial\alpha_1}{\partial x_1}|\omega_0|$, 计算是不同的, 一般留下一个非零项:

$$\begin{aligned}&\int_{Q_1}\left(\int_a^0\frac{\partial\alpha_1}{\partial x_1}|\mathrm{d}\,x_1|\right)|\mathrm{d}\,x_2\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\,x_d|\\=&\int_{Q_1}(\alpha_1(0,x_2,\cdots,x_d)-\alpha_1(a,x_2,\cdots,x_d))|\mathrm{d}\,x_2\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\,x_d|.\end{aligned}$$

仍然有 $\alpha_1(a,x_2,\cdots,x_d)=0$, 故终于得到

$$\int_{\mathbf{R}^d}\chi_d\mathrm{d}\,\alpha=\int_{\{0\}\times Q_{d-1}}\alpha_1(0,x_2,\cdots,x_d)|\mathrm{d}\,x_2\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\,x_d|.$$

而对于 $\alpha=\sum\limits_{i=1}^d\alpha_i\mathrm{d}\,x_1\wedge\cdots\wedge\widehat{\mathrm{d}\,x_i}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\,x_d$, 由于 $\mathrm{d}\,x_1\big|_{\partial D}=0$, 故有

$$\alpha\big|_{\partial D}=\alpha_1(0,x_2,\cdots,x_d)\;\mathrm{d}\,x_2\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\,x_d,$$

从而

$$\int_{\mathbf{R}^d} \chi_D \mathrm{d}\,\alpha = \int_{\{0\}\times Q_{d-1}} \alpha\big|_{\partial D} = \int_{\mathbf{R}^{d-1}} \alpha\big|_{\partial D};$$

这就是要证明的.

6.2.2 注释

可以引进带边的流形以及在它上面的微分形式, 然后证明在这种框架下的斯托克斯定理, 参见 [7], 437 页和 ii. 还可以对于密度给出类似的定理. 最后, 可以对于边界不够正则的 "区域" 证明斯托克斯定理, 该边界是余维数为 1 的子流形, 参见 [7], 459 页.

6.2.3 注释

在一个流形上, 可以定义链, 在链上的积分及链的边界等概念, 并证明在这种情形下的斯托克斯定理. 对于这个与上面类似的理论, 参见 [10], 第八章.

6.3 斯托克斯定理的第一批应用

6.3.1 命题

设 X 是一个 d 维定向紧致流形. 则对于所有微分形式 $\omega \in \Omega_1^{d-1}(X)$, 我们有

$$\int_X \mathrm{d}\,\omega = 0.$$

事实上, X 自己是带边区域, 并且边界是空集.

6.3.2 推论

设 X 是一个 d 维可定向紧致流形. 则德拉姆群 $R^d(X)$ 的维数大于或等于 1.

设 ω 是一个体积形式, 由于 $\int_X \omega > 0$, 所以 ω 不可能等于 $\mathrm{d}\,\alpha$.

6.3.3 推论

设 p 和 q 是两个大于或等于 1 的整数. 球面 S^{p+q} 决不微分同胚于 $X\times Y$, 这里 X 和 Y 是维数分别为 p 和 q 的可定向流形.

由于 $p \geqslant 1$ 和 $q \geqslant 1$, 我们知道德拉姆群 $R^p(S^{p+q})$ 是零空间, 参见 5.7.1. 如果 S^{p+q} 微分同胚于 $X\times Y$, 将有 $R^p(X\times Y) = \{0\}$ (参见 5.4.7). 我们要指出这将导致矛盾. 设 p 是 $X\times Y$ 在 X 上的投影, ω 是对于 X 的一个体积形式. 由于对于固定的 $y\in Y$, 映射 $p: X\times\{y\}\to X$ 是一个保持定向的微分同胚 ($X\times Y$ 被适当定向), 我们有

$$0 < \int_X \omega = \int_{X\times\{y\}} p^*\omega|_{X\times\{y\}}.$$

而 ω 是 X 的最大阶的微分形式, 故 $\mathrm{d}\,\omega = 0$, 于是

$$\mathrm{d}\,(p^*\omega) = p^*(\mathrm{d}\,\omega) = 0.$$

而由假设 $R^p(X\times Y)=\{0\}$ 得知存在

$$\alpha\in\Omega^{p-1}(X\times Y)\quad 使得\quad p^*\omega=\mathrm{d}\,\alpha.$$

于是根据命题 6.3.1 将有

$$\int_{X\times\{y\}}p^*\omega|_{X\times\{y\}}=\int_{X\times\{y\}}\mathrm{d}\,(\alpha|_{X\times\{y\}})=0.$$

6.3.4 命题

设 D 是 $\mathbf{R}^d$ 的 C^1 类的非空紧致带边区域, 又设

$$V\in O_D(\mathbf{R}^d)\quad 和\quad f\in C^1(V;\partial D).$$

则 f 在 ∂D 的限制不可能是恒等映射.

设 $f_1,\cdots,f_d$ 是 f 的坐标函数, 而 j 是从 ∂D 到 $\mathbf{R}^d$ 内典范单射, $x_1,\cdots,x_d$ 是 $\mathbf{R}^d$ 到 $\mathbf{R}$ 内的坐标函数. 引进积分

$$\int_{\partial D}j^*(x_1\mathrm{d}\,x_2\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\,x_d),\quad \int_{\partial D}j^*(f_1\mathrm{d}\,f_2\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\,f_d).$$

假定我们有 $f\big|_{\partial D}=\mathrm{id}_{\partial D}$, 则有 $f_i\big|_{\partial D}=x_i|_{\partial D}$, 从而这两个积分是相等的. 对于这两个积分应用斯托克斯定理即得

$$\int_D\mathrm{d}\,x_1\wedge\mathrm{d}\,x_2\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\,x_d)=\int_D\mathrm{d}\,f_1\wedge\mathrm{d}\,f_2\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\,f_d.$$

但是等式左端是 D 的体积, 从而是一个正数. 至于右端, 由于 f 的值在 ∂D 内, 故对于 $m\in V$, 我们有

$$\mathrm{d}\,f_i(m)=f^*(\mathrm{d}\,x_i)(m)\in T^*_{f(m)}(\partial D),$$

后者是 $d-1$ 维的切空间的对偶空间. 由于我们有 d 个微分形式在一个 $d-1$ 维空间里, 它们必定是线性相关的, 故 $\mathrm{d}\,f_1\wedge\mathrm{d}\,f_2\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\,f_d=0$, 这就是要找的矛盾.

富有启发性的解释是, 这个结果表明一个自然现象: 一片平面薄膜不可能收缩到其边界上而不撕破任何部分.

6.3.5 推论 (布劳威尔)

设 $U\in O(\mathbf{R}^d), U\supset\bar{B}(0,1)$, 而 $g\in C^1(U;\mathbf{R}^d)$ 使得 $g(\bar{B}(0,1))\subset\bar{B}(0,1)$. 则 g 在 $\bar{B}(0,1)$ 内至少有一个不动点, 即存在 $x\in\bar{B}(0,1)$, 使得 $g(x)=x$.

用归谬法. 假定 $g(x)\neq x,\forall x\in\bar{B}(0,1)$. 对于所有 $x\in\bar{B}(0,1)$, 定义 $f(x)$ 是起点为 $g(x)$ 过 x 的半直线与 S^d 的唯一交点. 映射 $x\mapsto f(x)$ 显然把一个开集 $U\supset\bar{B}(0,1)$ 变换到 $\partial\bar{B}(0,1)=S^d$, 并且是 C^1 类的. 这从它的明晰表达式得到:

$$f(x)=x+tu,$$

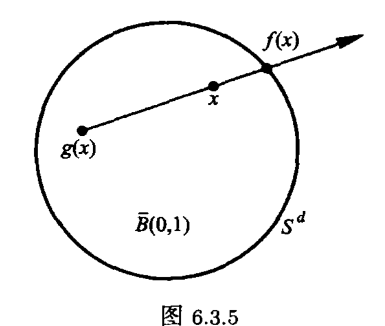


图 6.3.5

$$\text{其中 } u=\frac{x-g(x)}{\|x-g(x)\|},\ t=-(x|u)+\sqrt{1-\|x\|^2+(x|u)^2}.$$

6.3.6 注释

6.3.5 对于 $g\in C^0(\bar{B}(0,1);\bar{B}(0,1))$ 仍然成立, 参见习题 6.10.4.

6.3.7 命题

设 $D=\bar{B}(0,1)\subset\mathbf{R}^2$, $S^1=\partial(\bar{B}(0,1))$, 再设 $\xi\in C^1(\mathbf{R}^2;\mathbf{R}^2)$ 是一个向量场, 满足条件: 对于所有 $x\in S^1,\xi(x)=\lambda x$, 其中 $\lambda\in\mathbf{R}_-^*$. 则存在 $y\in D$, 使得 $\xi(y)=0$.

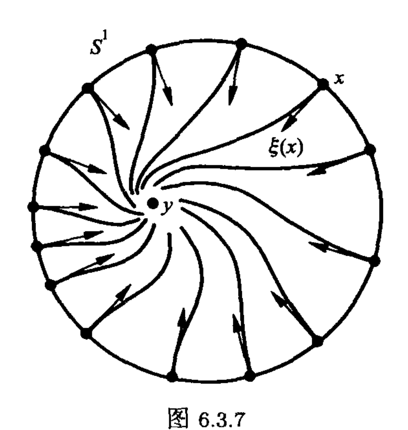


图 6.3.7

存在 $\lambda<0$, 使得 $\xi(x)=\lambda x$ 表示在 S^1 的所有点, 场是沿法向量进入 D 的. 其实只需假设 $\xi\in C^1(U;\mathbf{R}^2)$, 其中 U 是一个开集, $U\supset\bar{B}(0,1)$, 因为场定义在 $\bar{B}(0,1)$ 的一个邻域就足够了. 用归谬法证明. 假定 $\xi(x)\neq 0,\forall x\in\bar{B}(0,1)$, 可以在一个开集 $U\supset\bar{B}(0,1)$ 上定义

$$\eta(x)=\frac{\xi(x)}{\|\xi(x)\|},$$

于是 $\eta\in C^1(U;S^1)$.

设 σ 是 S^1 上的体积形式 (参见 5.3.17.2), 由于 $\eta^*\sigma$ 是 $\mathbf{R}^2$ 上的 1 阶微分形式, 把斯托克斯公式应用到 $\mathbf{R}^2$ 上, 即得

$$\int_{\partial D}(\eta^*\sigma)\big|_{\partial D}=\int_D \mathrm{d}\,(\eta^*\sigma\big|_{\partial D})=\int_D\eta^*(\mathrm{d}\,\sigma\big|_{\partial D}).$$

一方面, $\mathrm{d}\,\sigma$ 是 2 阶微分形式, 而 ∂D 是 1 阶流形, 由阶推理 (参见 5.2.5.2), $\mathrm{d}\,\sigma\big|_{\partial D}=0$. 而另一方面, η 在 $S^1=\partial D$ 上的限制是映射 $x\mapsto -x$, 这是一个保持定向的微分同胚. 根据 6.1.4.4, 得到矛盾:

$$\int_{S^1}\eta^*\sigma=\int_{S^1}\sigma>0.$$

富有启发性的说法是: 这个结果表明, 如果考虑场 ξ 的积分曲线 (参见第一章), 这些积分曲线收敛到 D 的一个点. 不过, 这个直观说法并不严密, 这些曲线可以是逐层的渐近于缩小的圆周的螺旋线. 也可以说沿着 ξ 的这些积分曲线, 定义一个从 D 在其自身上的严格收缩, 必然停留在某个部分.

6.3.8　命题

设 $D=\bar{B}(0,1)\subset\mathbf{R}^2$, $S^1=\partial(\bar{B}(0,1))$, 而 E 是从 D 去掉 q 个开圆盘 $D_i, 1\leqslant i\leqslant q$ 得到的带边区域, 这些圆盘两两不交. 又设 ξ 是一个从 $\mathbf{R}^2$ 到 $\mathbf{R}^2$ 的 C^1 类的向量场, ξ 在 ∂E 上是进入 E 的法向量. 则当 $q>1$ 时, 存在 $y\in E$, 使得 $\xi(y)=0$.

所谓 ξ 在 ∂E 上是进入 E 的法方向, 指的是 $\forall x\in S^1, \exists\lambda(x)\in\mathbf{R}^*_-$, 使得 $\xi(x)=\lambda(x)\cdot x$, 而 $\forall i=1,\cdots,q, \forall x\in\partial D_i, \exists\lambda(x)\in\mathbf{R}^*_+$, 使得 $\xi(x)=\lambda(x)(x-x_i)$, 这里 x_i 是 D_i 的圆心.

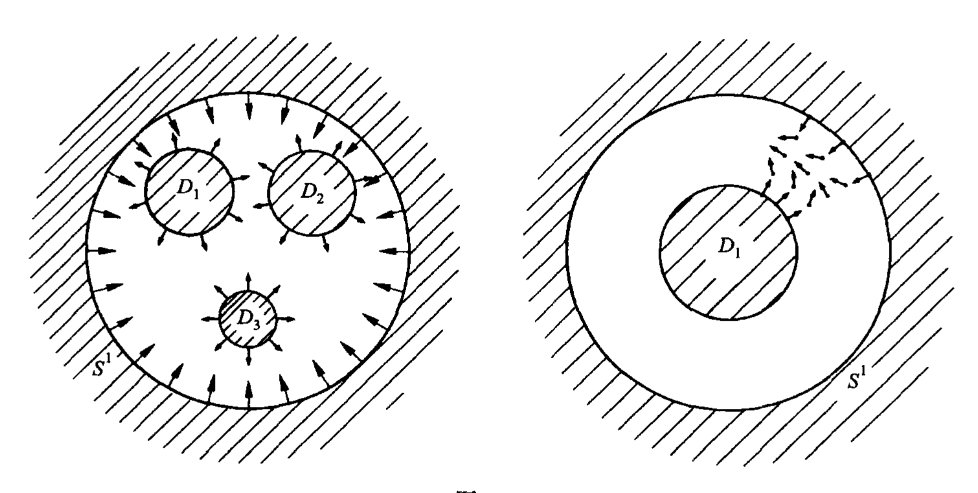


图 6.3.8

证明像 6.3.7 一样进行. 假定命题不真, 并且得到

$$\int_{\partial E}(\eta^*\sigma)|_{\partial E}=\int_E \mathrm{d}\,(\eta^*\sigma)=0.$$

而我们有 ∂E 的一个分解:

$$\partial E=S^1\bigcup\left(\bigcup_{i=1}^{q}\partial D_i\right).$$

故

$$\int_{\partial E}(\eta^*\sigma)|_{\partial E}=\int_{S^1}\eta^*\sigma+\sum_{i=1}^{q}\int_{\partial D_i}\eta^*\sigma.$$

由于 $\eta:\partial D_i\to S^1$ 是一个微分同胚并且颠倒定向, 故

$$\int_{\partial D_i}\eta^*\sigma=-\int_{S^1}\sigma,\quad \text{而}\quad \int_{S^1}\eta^*\sigma=\int_{S^1}\sigma>0.$$

于是得到

$$0=(1-q)\int_{S^1}\sigma,$$

如果 $q\neq 1$, 就得到了矛盾.

6.3.9 注释

$1°$ 对于 $q=1$, 结果是错误的: 图 6.3.8 右侧的图给出构造反例的示意图.

$2°$ 在 6.3.7 和 6.3.8 中对于向量场的要求降低为 $\xi\in C^0(D;\mathbf{R}^2)$ (相应的 $\xi\in C^0(E;\mathbf{R}^2)$), 我们会更满意, 参见习题 6.10.4.

$3°$ 其实只需假定 ξ 是进入的, 而不必是法向, 参见 7.4.19.

6.4 欧几里得空间的定向子流形的典范体积形式

我们提醒一下 (参见 0.1.15.5), 一个定向欧几里得空间 E 有一个典范体积形式 λ_E. 如果 V 是 E 的一个定向子空间, 对于 $x\in V$, 它的切空间 T_xV 就有一个典范体积形式 λ_{T_xV}. 事实上, 我们有 $T_xV\subset E$, 于是根据假设, T_xV 对于 E 的欧几里得结构诱导的欧几里得结构是欧几里得的和定向的. 不过提请注意, 这里通过典范同构映射 (参见 2.5.22.1 和 2.5.12), 默认把 $T_xV\subset E$ 和抽象流形 V 的切空间 T_xV 等同.

6.4.1 命题

设 E 是一个欧几里得向量 (或仿射) 空间, V 是 E 的 C^p 类的定向子流形, 则 V 具有一个典范体积形式 $\omega\in\Omega^d_{p-1}(V)$, 其定义是: 对于 V 的每个 x, $\omega(x)=\lambda_{T_xV}$.

为了证明 ω 是 C^{p-1} 类的, 考虑 V 的正的参数表示 (坐标卡的逆) (U,g), 这里 U 是 $\mathbf{R}^d$ 的开集, $g\in\operatorname{Diff}(U,g(U))$. 设 $\{e_1,\cdots,e_d\}$ 是 $\mathbf{R}^d$ 的典范基底, 根据 5.2.4.1, 对于 $u\in U$,

$$(g^*\omega)(u)(e_1,\cdots,e_d)=\omega(g(u))((T_ug)(e_1),\cdots,(T_ug)(e_d)).$$

而 U 是 $\mathbf{R}^d$ 的开集, $g(U)\subset E$, E 是向量空间, 于是通过向量空间和切空间之间的等同同构, $(T_ug)(e_i)$ 等于 $\dfrac{\partial g}{\partial x_i}$. 于是根据 0.1.15.6 得到

$$(g^*\omega)(u)(e_1,\cdots,e_d)=\omega(g(u))\left(\frac{\partial g}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial g}{\partial x_d}\right)=\sqrt{\det\left(\frac{\partial g}{\partial x_i}\middle|\frac{\partial g}{\partial x_j}\right)}.$$

由于 V 是 C^p 类的, 故 g 是 C^p 类的, 我们有

6.4.1.1
$$g^*\omega = \sqrt{\det\left(\frac{\partial g}{\partial x_i}\middle|\frac{\partial g}{\partial x_j}\right)}\mathrm{d}\,x_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\,x_d \in \Omega^d_{p-1}(U).$$

由此得到

$$\omega \in \Omega^d_{p-1}(V).$$

6.4.2 例子

6.4.2.1 如果 $V\in O(\mathbf{R}^d)$, 则 $\omega=\omega_0=(\mathrm{d}\,x_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\,x_d)|_V$.

6.4.2.2 设 $V=\{(x,y,f(x,y));(x,y)\in A\}, V\subset\mathbf{R}^3$. 假设参数表示 $g:(x,y)\mapsto(x,y,f(x,y))$ 是 C^p 类的, 保持定向. 如果令

$$p=\frac{\partial f}{\partial x},\quad q=\frac{\partial f}{\partial y},$$

则有

$$\frac{\partial g}{\partial x}=(1,0,p),\quad \frac{\partial g}{\partial y}=(0,1,q).$$

故

$$\text{行列式 }\det\left(\frac{\partial g}{\partial x_i}\middle|\frac{\partial g}{\partial x_j}\right)=\begin{vmatrix}1+p^2 & pq\\ pq & 1+q^2\end{vmatrix}=1+p^2+q^2.$$

于是对于参数表示 g 和 V 的典范体积形式 ω, 我们有

6.4.2.3
$$g^*\omega=\sqrt{1+p^2+q^2}\mathrm{d}\,x\wedge\mathrm{d}\,y.$$

例如, 为了积分 V 上的一个函数 $G(x,y,z)$, 而 V 配备了关联于密度 $|\omega|$ 的密度, 我们只需计算

$$\int_A G(x,y,f(x,y))\sqrt{1+p^2+q^2}\mathrm{d}\,x\mathrm{d}\,y.$$

自然会问, 欧几里得空间的子流形的典范体积形式跟 5.3.17.2 引进的典范形式在球面 $S^d\subset\mathbf{R}^{d+1}$ 的情形是否一致? 为此回答这个问题, 我们利用下列更普遍的结果:

6.4.3 命题 (和定义)

设 V 是定向欧几里得空间 E 的定向的余维数为 1 的 C^p 类子流形. 则存在场 $\nu\in C^{p-1}(V;E)$, 满足条件:

a) $\nu(x)\in\theta_x((T_xV)^\perp), \forall x\in V$;

b) $\|\nu(x)\|=1$;

c) *如果 $\{e_1,\cdots,e_d\}$ 是 T_xV 的正的基底, 则 $\{\nu(x),\theta_x(e_1),\cdots,\theta_x(e_d)\}$ 是 E 的正的基底. ν 称为 V 的* **典范法向量场**.

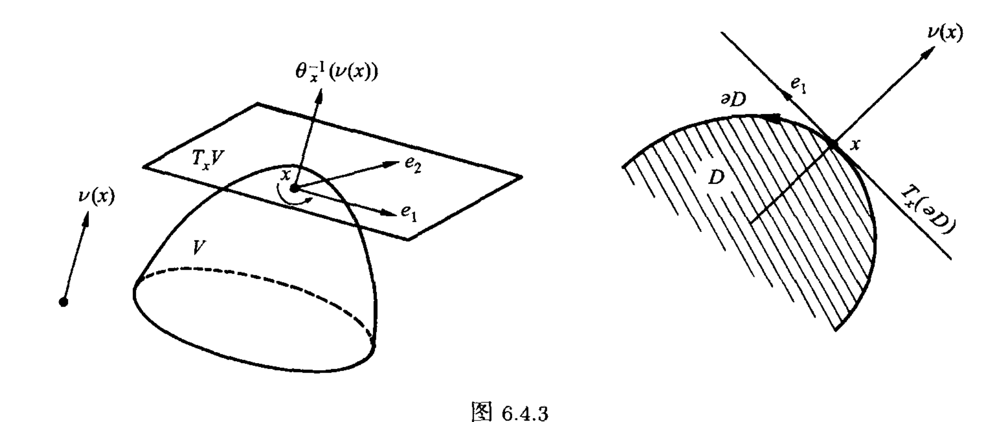


图 6.4.3

6.4.4 注释

如果 $D \subset E$ 是 E 的一个定向带边区域, 而 $V = \partial D$, 我们称 ν 是外出单位法向量场: 观察图 6.4.3, 并且做习题 6.10.7.

条件 a) 和 c) 除一个正的倍数外, 确定 $\nu(x)$, 条件 b) 以唯一方式确定了 $\nu(x)$. 留下的是证明 ν 是 C^{p-1} 类的. 而如果 ω 是 E 的 (定向的) 典范体积形式, 而 σ 是 V 的典范体积形式, 则

6.4.5
$$\boxed{\sigma = \operatorname{int}(\nu) \cdot \omega}\ .$$

如果这个公式成立, 其中的 σ 是 C^{p-1} 类的, ω 是 C^∞ 类的, 那么根据推论 5.3.16, ν 将是 C^{p-1} 类的. 由于 σ 和 $\operatorname{int}(\nu) \cdot \omega$ 都是体积形式 (参见 5.3.17.1), 为了证明等式, 只需验证它们在一个点相等.

设 $\{e_2, \cdots, e_d\}$ 是 T_xV 的标准正交基底, 则有 $\sigma(e_2, \cdots, e_d) = 1$ (参见 0.1.15.5), 而

$$(\operatorname{int}(\nu)\omega)(e_2, \cdots, e_d) = \omega(\theta_x^{-1}(\nu(x)), e_2, \cdots, e_d),$$

其中的

$$\{\theta_x^{-1}(\nu(x)), e_2, \cdots, e_d\}$$

是 $\theta_x^{-1}(E)$ 的标准正交基底, 故

$$\sigma(e_2, \cdots, e_d) = \operatorname{int}(\nu)(\omega)(e_2, \cdots, e_d) = 1,$$

由此得到结果.

6.4.6 例子

对于球面 S^d, 在 5.3.17.2 中已经取 $\sigma = \operatorname{int}(\nu)\omega_0$, 这正是在 6.4.3 中引进的同一个体积形式.

6.4.7 实际计算

6.4.7.1 设 (U,g) 是 d 维欧几里得空间 E 的超曲面的正的参数表示, 则

$$\nu=\frac{\dfrac{\partial g}{\partial x_1}\wedge\cdots\wedge\dfrac{\partial g}{\partial x_{d-1}}}{\left\|\dfrac{\partial g}{\partial x_1}\wedge\cdots\wedge\dfrac{\partial g}{\partial x_{d-1}}\right\|}.$$

这里 $\cdot\wedge\cdot$ 表示 ΛE 的内积, E 是任意 d 维空间, 而 $\|\cdot\|$ 是与之关联的范数: 参见 0.1.15.1. 如果 $d=3$, 这里涉及的只不过是通常的向量积: 参见 0.1.17.

如果 $\mathbf{R}^3$ 的一个曲面的参数表示是特殊的 $g:(x,y)\mapsto(x,y,f(x,y))$, V 在 g 是正的条件下定向. 令

$$p=\frac{\partial f}{\partial x},\quad q=\frac{\partial f}{\partial y},$$

则

$$\nu=\left(-\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}},-\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right).$$

6.4.7.2 引理

设 S 是 $\mathbf{R}^3$ 的一个定向曲面, 典范单位法向量 ν 的分量是 ν_1,ν_2,ν_3, σ 是 S 的典范体积形式, x,y,z 是 $\mathbf{R}^3$ 的坐标函数. 则

$$\nu_1\sigma|_S=\mathrm{d}\,y\wedge\mathrm{d}\,z\big|_S,\nu_2\sigma\big|_S=\mathrm{d}\,z\wedge\mathrm{d}\,x|_S,\nu_3\sigma\big|_S=\mathrm{d}\,x\wedge\mathrm{d}\,y\big|_S.$$

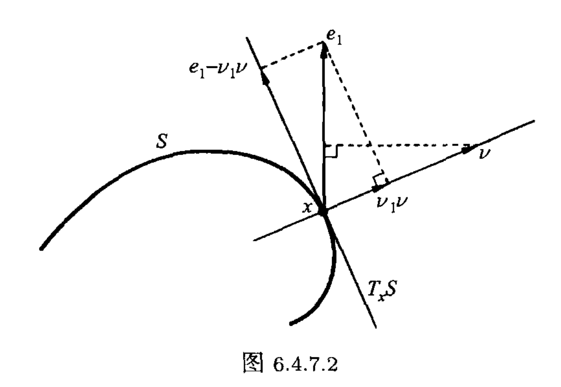


图 6.4.7.2

如果 $\{e_1,e_2,e_3\}$ 是 $\mathbf{R}^3$ 的典范基底, ω_0 是其典范体积形式, 则根据 6.4.5 有 $\sigma=\mathrm{int}\,(\nu)\omega_0$. 又有 $\nu_1=(e_1|\nu)$, 故

$$(\nu_1\nu-e_1|\nu)=\nu_1\parallel\nu\parallel^2-(e_1|\nu)=0,\quad 即\quad \nu_1\nu-e_1\in TS.$$

而

$$\nu_1\sigma=\mathrm{int}\,(\nu_1\nu)\omega_0,\quad \mathrm{d}\,y\wedge\mathrm{d}\,z=\mathrm{int}\,(e_1)\omega_0,$$

故

$$\nu_1\sigma - \mathrm{d}\,y \wedge \mathrm{d}\,z\big|_S = \mathrm{int}\,(\nu_1\nu - e_1)\omega_0|_S.$$

如果考虑 a 和 $b \in TS$, 则有

$$(\nu_1\sigma - \mathrm{d}\,y \wedge \mathrm{d}\,z)\big|_S(a,b) = \omega_0(\nu_1\nu - e_1, a, b).$$

三个向量 $\nu_1\nu - e_1, a, b$ 在 2 维的 TS 中, 必定线性相关, 故

$$(\nu_1\sigma - \mathrm{d}\,y \wedge \mathrm{d}\,z)|_S = 0.$$

6.4.7.3 注释

关系 $\nu_1\sigma|_S = \mathrm{d}\,y \wedge \mathrm{d}\,z\big|_S$ 只不过是下列公式的无穷小说法: 一个平面图形在另一个平面上的垂直投影的面积等于原来的面积乘以两个平面夹角的余弦.

6.5 欧几里得空间的定向子流形的体积

6.5.1 定义

设 E 是一个有限维欧几里得空间, V 是 d 维定向子流形, σ 是它的典范体积形式. 称积分 $\displaystyle\int_V \sigma$ 是 V 的 **体积** (若 $d=2$, **面积**, 若 $d=1$, **长度**), 数 $\displaystyle\int_V \sigma$ 属于 $\mathbf{R}_+ \bigcup \{+\infty\}$. 记之为 $\mathrm{Vol}\,(V)(\mathrm{Aire}\,(V), \mathrm{Long}\,(V))$.

因为 $\displaystyle\int_V \sigma$ 就是 $\displaystyle\int_V |\sigma|$, 而 1 是正的, 所以这个定义有意义.

6.5.2 注释

1° 如果 $V \in O(E)$, E 是定向欧几里得空间, 而 V 是相对紧致的, 则 $\mathrm{Vol}\,(V)$ 有限, 但反之不真.

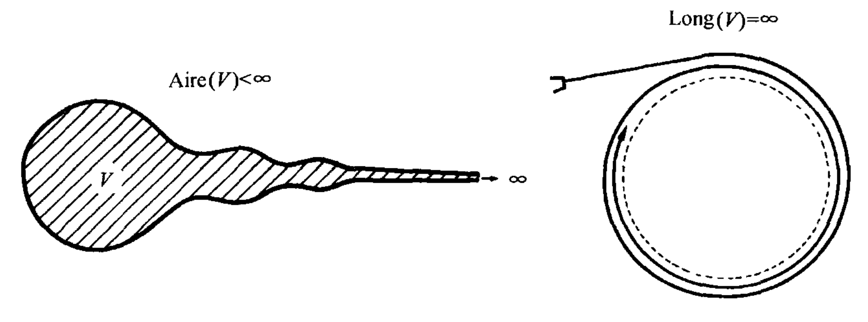


图 6.5.2

2° 如果 $\dim V < \dim E$, 可能 V 是相对紧致的, 但 $\mathrm{Vol}(V) = +\infty$. 比如, 在 $E = \mathbf{R}^2$ 内的一条曲线 V, 渐近于一个圆周, V 的闭包是紧致的, 但其长度是无穷的. 还可参见习题 6.10.13.

6.5.3 曲线情形定义的合理性

这里假定 V 是维数 $d=1$ 的子流形. 我们提醒, 所谓一条曲线, 就是一个从 (a,b) 到 E 内的 C^1 类的映射 θ, 内接折线长度的上确界 (如果存在) 称为曲线的长度. 已经证明这个长度等于 (参见 [2], 第 53 章):

$$\int_a^b \|\theta'(t)\|\,\mathrm{d}\,t \in \mathbf{R}_+\bigcup\{+\infty\}.$$

假定 $\theta\in \mathrm{Diff}\,((a,b);V)$, 即 θ 是 V 的完整参数表示. 那么如果 σ 是 V 的典范长度形式, 有

$$\int_V \sigma = \int_{(a,b)} \theta^*\sigma.$$

而根据公式 6.4.1.1, 我们有 $\theta^*\sigma=\|\theta'(t)\|\,\mathrm{d}\,t$. 于是 6.5.1 所定义的长度跟通常定义的长度一致.

事实上, 我们经常所说的曲线的弧是给定在闭区间 $[a,b]$ 上的一个映射 θ. 这时不再可以谈论微分同胚. 不过按照通常的曲线的弧的长度定义, 去掉端点和带有端点的长度显然是同样的.

6.5.4 提请注意

如果 $d\geqslant 2$,上面的说法将不再有效. 对于 $d=2$, V 的面积不再是 V 的内接多面形面积的上确界. 只需考虑威尼斯灯笼(或彩色折纸灯笼) 形的反例: 在一个固定的圆柱面内可以内接多面形, 其面积的上确界是 $+\infty$ (计算留给读者: 必须让水平的层数与多面形的棱数之比趋于无穷).

6.5.5 球的体积和球面的体积

容易证明 (参见 0.0.3):

$$\mathrm{Vol}\,(B_d(0,r)) = r^d\mathrm{Vol}\,(B_d(0,1)), \quad \text{和} \quad \mathrm{Vol}\,(S^d(r)) = r^d\mathrm{Vol}\,(S^d).$$

留给读者验证. (参见习题 6.10.17). 我们还有

6.5.6

6.5.6.1 引理

$$\mathrm{Vol}\,(B_{d+1}(0,1)) = \frac{1}{d+1}\mathrm{Vol}\,(S^d).$$

6.5.6.2 注释

这个引理将来还可由 6.9.13 得到, 也可以利用 6.5.9.

目前我们用斯托克斯定理证明这个引理. 设 σ 是 S^d 的体积形式:

$$\sigma=\sum_{i=1}^{d+1}(-1)^{i-1}x_i\mathrm{d}\,x_1\wedge\cdots\wedge\widehat{\mathrm{d}\,x_i}\wedge\cdots\wedge x_{d+1}$$

(参见 5.3.17.2), 而 $\omega_0=\mathrm{d}\,x_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\,x_{d+1}$ 是 $\mathbf{R}^{d+1}$ 的典范体积形式. 根据斯托克斯定理, 我们有

$$\mathrm{Vol}\,(S^d)=\int_{S^d}\sigma=\int_{B_{d+1}(0,1)}\mathrm{d}\,\sigma.$$

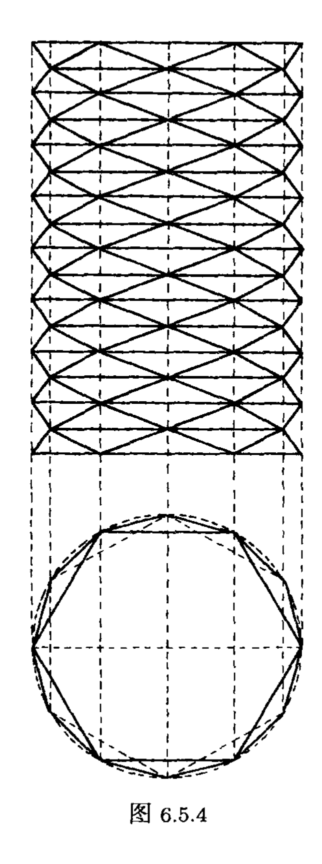


图 6.5.4

而

$$d\left((-1)^{i-1}x_i d\,x_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{d\,x_i} \wedge \cdots \wedge d\,x_{d+1}\right) = d\,x_1 \wedge \cdots \wedge d\,x_{d+1} = \omega_0,$$

故

$$\operatorname{Vol}(S^d) = (d+1)\int_{B_{d+1}(0,1)} \omega_0 = (d+1)\cdot \operatorname{Vol}(B_{d+1}(0,1)).$$

6.5.7 定理

我们有

$$\operatorname{Vol}(S^{2d}) = \frac{2^{d+1}\pi^d}{1\cdot 3\cdot \;\cdots\; \cdot(2d-1)} \quad 和 \quad \operatorname{Vol}(S^{2d+1}) = \frac{2\pi^{d+1}}{d!}.$$

6.5.8 引理

$$\operatorname{Vol}(S^d) = 2^{d+1}\frac{\left(\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} d\,t\right)^{d+1}}{\displaystyle\int_0^{+\infty} t^d \mathrm{e}^{-t^2} d\,t}.$$

为了进行计算, 使用球面坐标技巧, 即引入映射

$$用\ f(t,x) = t\cdot x\ 定义的\ f : \mathbf{R}_+^* \times S^d \to \mathbf{R}^{d+1} - \{0\},$$

这个映射是保持定向的微分同胚 (可以直接验证). 此外, 如果 ω_0 和 σ 分别表示 $\mathbf{R}^{d+1}$ 和 S^d 的典范体积形式, 则

6.5.9
$$\boxed{f^*\omega_0 = t^d \mathrm{d}\, t \wedge \sigma}\ .$$

其实, 如果 p 和 q 分别是从 $\mathbf{R}_+^* \times S^d$ 到 $\mathbf{R}_+^*$ 上和 S^d 上的投影,6.5.9 中的 $\mathrm{d}\,t \wedge \sigma$ 就应该准确写成 $p^*(\mathrm{d}\,t) \wedge q^*(\sigma)$.

为了证明 6.5.9, 把 S^d 嵌入到 $\mathbf{R}^{d+1}$, 由此得到一个子流形

$$\mathbf{R}_+^* \times S^d \subset \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}^{d+1} \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{d+1}.$$

映射 f 是由 $\widehat{f}(t,x) = t \cdot x$ 定义的映射 $\widehat{f} \in C^\infty(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^{d+1}; \mathbf{R}^{d+1})$ 在 $\mathbf{R}_+^* \times S^d$ 上的限制. 由于这里涉及的是向量空间, 我们可以利用公式 5.2.8.3 开展论证. 改变一下坐标的记法, $\mathbf{R}$ 的用 t, 而 $\mathbf{R}^{d+1}$ 的用 $(x_1, \cdots, x_{d+1})$. 我们有

$$\omega_0 = \mathrm{d}\,x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\,x_{d+1}, \quad \widehat{f}(t, x_1, \cdots, x_{d+1}) = (tx_1, \cdots, tx_{d+1}).$$

根据公式 5.2.8.3 和 5.3.17.2:

$$\begin{aligned}
f^*\omega_0 &= \mathrm{d}\,(t \cdot x_1) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\,(t \cdot x_{d+1}) \\
&= (x_1 \mathrm{d}\,t + t \cdot \mathrm{d}\,x_1) \wedge \cdots \wedge (x_{d+1}\mathrm{d}\,t + t \cdot \mathrm{d}\,x_{d+1}) \\
&= t^{d+1} \cdot \mathrm{d}\,x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\,x_{d+1} + t^d \mathrm{d}\,t \wedge \left(\sum_i (-1)^i x_i \mathrm{d}\,x_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}\,x_i} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\,x_{d+1} \right) \\
&= t^{d+1}\omega_0 + t^d \mathrm{d}\,t \wedge \sigma.
\end{aligned}$$

但根据阶推理 (参见 5.2.5.2), 得 $\omega_0|_{S^d} = 0$, 这就证明了 6.5.9. 也可以不用坐标来证明 6.5.9, 见习题 6.10.26.

考虑从 $\mathbf{R}^{d+1} - \{0\}$ 到 $\mathbf{R}$ 的映射 $g : y \mapsto \mathrm{e}^{-\|y\|^2}$, 它是 C^∞ 类的. 我们有 $(g \circ f)(t,x) = \mathrm{e}^{-t^2}$, 应用 6.1.4.4, 借助富比尼定理 (0.4.5.1) 得:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{R}^{d+1}-\{0\}} \mathrm{e}^{-\|y\|^2}\omega_0 &= \int_{\mathbf{R}_+^* \times S^d} \mathrm{e}^{-t^2} t^d \mathrm{d}\,t \wedge \sigma \\
&= \left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} t^d \mathrm{d}\,t \right) \left(\int_{S^d} \sigma \right) = \mathrm{Vol}\,(S^d) \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} t^d \mathrm{d}\,t.
\end{aligned}$$

由于 $\{0\}$ 是零测度集, 我们有

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{R}^{d+1}-\{0\}} \mathrm{e}^{-\|y\|^2}\omega_0 &= \int_{\mathbf{R}^{d+1}} \mathrm{e}^{-(y_1^2+\cdots+y_{d+1}^2)} \mathrm{d}\,y_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\,y_{d+1} \\
&= \prod_{i=1}^{d+1} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-y_i^2} \mathrm{d}\,y_i \right) = 2^{d+1} \left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}\,t \right)^{d+1}.
\end{aligned}$$

对于 $d \geqslant 0$, 令

$$I_d = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} t^d \mathrm{d}\, t,$$

则得到

$$\mathrm{Vol}\,(S^d) = \frac{(2I_0)^{d+1}}{I_d},$$

这就是引理 6.5.8 的公式.

我们先来计算 I_0 和 I_1. 特别地有 $\mathrm{Long}\,(S^1) = \dfrac{(2I_0)^2}{I_1}$. 而这是圆周的长度, 等于 2π. 另外

$$I_1 = \int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}\, t = \left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t^2}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}.$$

故

$$2\pi = \frac{4I_0^2}{\frac{1}{2}} = 8I_0^2,\ \text{由此得}\ I_0^2 = \frac{\pi}{4},\ \text{随之}\ I_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

最后用归纳法对于任意 d 计算 I_d: 分部积分给出

$$I_d = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} 2t\mathrm{e}^{-t^2} t^{d-1} \mathrm{d}\, t = \frac{d-1}{2}\int_0^{+\infty} t^{d-2}\mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}\, t = \frac{d-1}{2} I_{d-2}.$$

由此得到

$$I_{2d} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\ \cdots\ \cdot\frac{2d-3}{2}\cdot\frac{2d-1}{2}I_0 \quad \text{和} \quad I_{2d+1} = \frac{2}{2}\cdot\frac{4}{2}\ \cdot\ \cdots\ \cdot\frac{2d}{2}I_1.$$

故有

$$\boxed{I_{2d} = 1\cdot 3\cdot\ \cdots\ \cdot(2d-1)\frac{\sqrt{\pi}}{2^{d+1}}},$$

和

$$\boxed{I_{2d+1} = \frac{d!}{2}}.$$

定理 6.5.7 证毕.

注: I_d的值是古典的, 并且经常用 Γ 函数表示, 于是可以用这个函数表示球和球面的体积, 参见[17].

6.5.10 命题

设 V 和 W 分别是有限维欧几里得空间 E 和 F 的子流形. 则

$$\boxed{\mathrm{Vol}\,(V\times W) = \mathrm{Vol}(V)\times\mathrm{Vol}(W)}.$$

这容易直接验证. 利用命题 6.4.1 的记号, $V\times W$ 的体积形式由

$$\forall (v,w)\in V\times W : \omega(v,w) = \lambda_{T_{(v,w)}(V\times W)}$$

定义. 而 $T_{(v,w)}(V\times W)$ 典范地同构于 $T_v(V)\times T_w(W)$, 并且 $\lambda_{T_{(v,w)}(V\times W)}=\lambda_{T_v(V)}\wedge\lambda_{T_w(W)}$ (参见 2.5.18 和 3.3.18). 利用富比尼定理 (0.4.5.1) 即得结果.

6.5.11 例子

嵌入到 $\mathbf{R}^{2d}$ 的环面 T^d 作为 2.1.6.3 中的 $\left(S^1(1/\sqrt{d})\right)^d$, 其体积是 $(2\pi/\sqrt{d})^d$.

不过, 现在把环面看作抽象的 $T^d=\mathbf{R}^d/\mathbf{Z}^d$. $\mathbf{R}^d$ 的典范体积形式是 ω_0, 过渡到对于 $\mathbf{Z}^d$ 的商集 (参见 5.3.10.2) 来定义 T^d 的典范体积形式 ω. 而 T^d 的体积由 $\int_{T^d}\omega$ 定义. 我们断言

$$\int_{T^d}\omega=1.$$

事实上, 设 $p:\mathbf{R}^d\to\mathbf{R}^d/\mathbf{Z}^d$ 是定义 T^d 的覆叠映射, $Q=(0,1)^d$ 是 $\mathbf{R}^d$ 的开的单位立方体, $p:Q\to p(Q)$ 是保持定向的微分同胚. 则 $p^*\omega=\omega_0|_Q$ (参见 5.3.10.2), 于是根据 6.1.4.4,

$$1=\int_{\bar{Q}}\omega_0=\int_Q\omega_0=\int_Q p^*\omega=\int_{p(Q)}\omega.$$

由于 $p(\bar{Q})=T^d$, 并且 $\bar{Q}-Q$ 是零测度集, 我们有

$$\int_{p(\bar{Q})}\omega=\int_{p(Q)}\omega=\int_{T^d}\omega=\mathrm{Vol}\,(T^d).$$

6.5.12 重心

给定一个定向欧几里得有限维向量空间 E 和它的紧致带边区域 D. 设 $|\omega_0|$ 是 E 上的关联于密度 $|\omega_0|$ 的测度, 而 ω_0 是 E 的典范体积形式. 如果用 χ_D 表示 D 的特征函数, 而 $f:E\to F$ 是一个在有限维向量空间 F 取值的一个连续映射, 则在 0.4.7 的意义下, $\chi_D\cdot f\in C^{\mathrm{int}}_{|\omega_0|}(E)$. 令

6.5.13
$$\int_D f\cdot\omega_0=\int_E\chi_D\cdot f|\omega_0|.$$

注意 $\mathrm{id}_E:E\to E$ 是连续的. 这些交待清楚后, 下面的表述的意义就明确了.

6.5.14 命题和定义

设 D 是看作仿射空间 E 的紧致带边区域. 如果给 E 配备定向的欧几里得向量空间结构, 其上有与 ω_0 关联的典范体积形式, 则仿射空间 E 由

$$\mathrm{grav}\,(D)=\frac{\displaystyle\int_D\mathrm{id}_E\cdot\omega_0}{\displaystyle\int_D\omega_0}$$

*定义的点仅依赖于 D, 但不依赖向量空间结构、欧几里得结构和定向. 该点称为 D 的***重心**.

如果改变 E 的欧几里得结构或定向, 典范体积形式变为 $\omega_0' = k\omega_0$, k 是一个常数, 故 $\operatorname{grav}(D)$ 不变. 如果改变向量的原点, 设 x_0 是新原点, E' 是新向量空间, 则 $\operatorname{id}_E = \operatorname{id}_{E'} + x_0$, 于是

$$\int_D \operatorname{id}_E \cdot \omega_0 = \int_D \operatorname{id}_E \cdot \omega_0 + x_0 \int_D \omega_0,$$

由此得到

$$\frac{\int_D \operatorname{id}_E \cdot \omega_0}{\int_D \omega_0} = \frac{\int_D \operatorname{id}_{E'} \cdot \omega_0}{\int_D \omega_0} + x_0;$$

而在仿射空间里, 分别属于 E 和 E' 的向量

$$\frac{\int_D \operatorname{id}_E \cdot \omega_0}{\int_D \omega_0} \quad 和 \quad \frac{\int_D \operatorname{id}_{E'} \cdot \omega_0}{\int_D \omega_0}$$

对应同一个点.

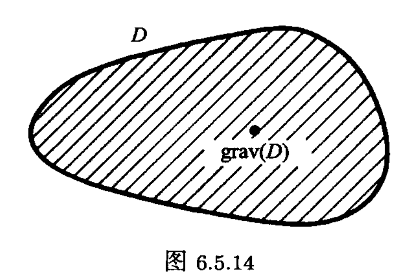


图 6.5.14

作为例子, 请参见习题 6.10.12 和 6.10.24.

注释: 重心的概念推广了带相等系数的有限个点的重心的概念. 如果, 更普遍的, 给定一个函数 $\lambda \in C^0(D)$ (非均匀的带边区域 D 的密度), D 的总质量将为 $\int_D \lambda\omega_0$, 它的重心将为

$$\frac{\int_D \operatorname{id}_E \cdot \lambda \cdot \omega_0}{\int_D \lambda \cdot \omega_0}.$$

6.5.15 阿基米德定理

给定 $\mathbf{R}^3$ 的一个紧致带边区域, 外出单位法向量场 ν (参见 6.4.4), D 的重心 G 和深度函数 $z : m \mapsto (m|e_3)$ (e_1, e_2, e_3 表示 $\mathbf{R}^3$ 的典范基底向量, $m \in \mathbf{R}^3$). 如果 σ 表示 D 的边界 $S = \partial D$ 的典范面积形式 (参见 5.3.36 和 6.4.1), 而 $\cdot \wedge \cdot$ 表示 $\mathbf{R}^3$ 的向量积 (参见 0.1.17), 则

(1) $$\int_S z\cdot\nu\cdot\sigma = \mathrm{Vol}\,(D)\cdot e_3,$$

(2) $$\forall m\in\mathbf{R}^3:\int_S(\overrightarrow{mn}\wedge z\nu)\cdot\sigma = \mathrm{Vol}\,(D)\cdot(\overrightarrow{mG}\wedge e_3).$$

6.5.16 物理解释

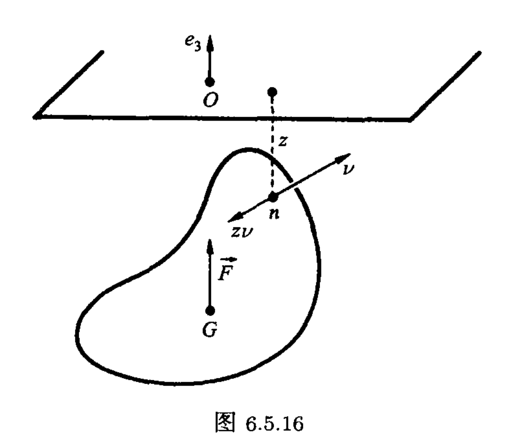


图 6.5.16

把 D 看作浸入到密度为 1 的液体中的一个物体, 液体表面是 e_1,e_2 的平面. 在边界点 $n\in\partial D$, S 上的面积为 σ 的物体 D 受到一个无穷小压力, 它等于 $z\cdot\nu\cdot\sigma$. 力的方向应该是 D 的表面 S 的法方向, 指向 D 的内部. 压强的大小是作为密度和液体深度的乘积的 $z(z<0)$. 于是 6.1.5 就解释为:

(1) 压力的合力等于一个垂直力 $\overrightarrow{F}$, 指向上方, 其大小等于 D 的体积;

(2) 由全体压力定义的力矩等于 $\overrightarrow{F}$ 作用于 G 的力矩.

证明

用 x,y,z 表示坐标函数, 根据 6.4.7.2:

$$\int_S z\nu\sigma=\left(\int_S z\,\mathrm{d}\,y\wedge\mathrm{d}\,z,\int_S z\,\mathrm{d}\,z\wedge\mathrm{d}\,x,\int_S z\,\mathrm{d}\,x\wedge\mathrm{d}\,y\right).$$

应用斯托克斯定理即得

$$\int_S z\nu\sigma=\left(\int_D 0,\int_D 0,\int_D \mathrm{d}\,x\wedge\mathrm{d}\,y\wedge\mathrm{d}\,z\right)=(0,0,\int_D \mathrm{d}\,x\wedge\mathrm{d}\,y\wedge\mathrm{d}\,z)(0,0,\mathrm{Vol}\,(D)).$$

为了证明第二个公式, 设 $m=(a,b,c),n=(x,y,z),\nu=(\nu_1,\nu_2,\nu_3)$, 则

$$\overrightarrow{mn}\wedge z\nu=z((y-b)\nu_3-(z-c)\nu_2,(z-c)\nu_1-(x-a)\nu_3,(x-a)\nu_2-(y-b)\nu_1).$$

于是

$$\int_S (\overrightarrow{mn} \wedge z\nu)\sigma = \left(\int_S z((y-b)\mathrm{d}\,x \wedge \mathrm{d}\,y - (z-c)\mathrm{d}\,z \wedge \mathrm{d}\,x),\right.$$
$$\int_S z((z-c)\mathrm{d}\,y \wedge \mathrm{d}\,z - (x-a)\mathrm{d}\,x \wedge \mathrm{d}\,y),$$
$$\left.\int_S z((x-a)\mathrm{d}\,z \wedge \mathrm{d}\,x - (y-b)\mathrm{d}\,y \wedge \mathrm{d}\,z)\right).$$

根据斯托克斯定理,

$$\int_S (\overrightarrow{mn} \wedge z\nu)\sigma = \left(\int_S (y-b)\mathrm{d}\,x \wedge \mathrm{d}\,y \wedge \mathrm{d}\,z, -\int_S (x-a)\mathrm{d}\,x \wedge \mathrm{d}\,y \wedge \mathrm{d}\,z, 0\right)$$

如果 $G = (G_1, G_2, G_3)$, 则

$$\int_S (\overrightarrow{mn} \wedge z\nu) = ((G_2 - b) \cdot \mathrm{Vol}\,(D), -(G_1 - a) \cdot \mathrm{Vol}\,(D), 0).$$

此外:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{mG} \wedge (\mathrm{Vol}\,(D)e_3) &= (G_1 - a, G_2 - b, G_3 - c) \wedge (0, 0, \mathrm{Vol}\,(D)) \\ &= ((G_2 - b) \cdot \mathrm{Vol}\,(D), -(G_1 - a) \cdot \mathrm{Vol}\,(D), 0).\end{aligned}$$

6.6 欧几里得空间的子流形的典范密度

这里考虑任意子流形 V 的情形, 所谓任意是指 V 是非定向的. 我们打算定义 $\mathrm{Vol}\,(V)$. 根据 0.1.26, 并且采用 0.1.26 的记号 μ, 可以陈述下列

6.6.1 命题

欧几里得向量空间的一个 C^p 类子流形 V 具有一个由

$$x \mapsto \delta(x) = \mu_{T_x V}$$

定义的 C^{p-1} 类典范密度.

在 6.4.1 中, 取产生 V 的局部定向的 T_xV 的任意一个定向已经定义了的 $\omega(x)$, 由于对于 $\omega(x)$, $\delta(x) = |\omega(x)|$, 故沿用 6.4.1 的证明即可. 公式 0.1.27 表明下列命题成立:

6.6.2 命题

如果 g 是 V 的任意参数表示, 则

$$g^*\delta = \sqrt{\left|\det\left(\frac{\partial g}{\partial x_i}\middle|\frac{\partial g}{\partial x_j}\right)\right|}|\mathrm{d}\,x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\,x_d|.$$

6.6.3 定义

设 V 是欧几里得空间 E 的一个子流形, 积分 $\int_V \delta$ 称为 V 的体积, 记作 $\mathrm{Vol}\,(V)$. 这是一个实数或 $+\infty$. 如果 V 的维数 d 是 1, 则把 Vol 换为 Long (长度), 如果 $d=2$, 则换为 Aire (面积).

6.6.4 注释

如果 V 是定向子流形, 就回到定义 6.5.1.

6.6.5 对于理论的或具体的例子, 参见习题 6.10.9, 6.10.11, 6.10.14 至 6.10.21.

6.6.6 注释

跟 6.5.2 一样, 如果 V 是相对紧致的, 并且维数等于 $\dim(E)$, 则 $\mathrm{Vol}\,(V)$ 有限. 但如果 $\dim(V)<\dim(E)$, 则未必. 反之, 如果 $\mathrm{Vol}\,(V)$ 有限和 $\dim(V)=\dim(E)$, V 未必是相对紧致的.

6.6.7 现在设 X 是任意一个流形 (即不必是欧几里得空间的子空间), 但是配备了一个密度 δ. 则称积分

$$\int_X \delta \in \mathbf{R}_+ \bigcup \{+\infty\}$$

为 X 对于 δ 的体积 (相应的, 面积, 长度), 并且记作 $\mathrm{Vol}\,(X,\delta)$. 这是关联于 δ 的测度的总质量. 这些交待之后, 我们叙述:

6.6.8 性质

给定一个紧致流形 X 和 X 上的一个密度 δ. 设 G 是无不动点真不连续的, δ 对于 G 是不变的. 则存在 X/G 上的一个唯一的密度 $\underline{\delta}$, 使得 $p^*\underline{\delta}=\delta$, 这里 p 是从 X 到 X/G 上的覆叠映射. 此外, 如果 G 是有限的, 则

$$\mathrm{Vol}\,(X,\delta)=\mathrm{card}\,(G)\times \mathrm{Vol}\,(X/G,\underline{\delta}).$$

$\underline{\delta}$ 的存在性由引理 5.3.9 的证明得到. 公式像 6.1.4.8 那样证明.

6.6.9 任意维数的等周不等式

这个不等式说的是: 如果 $\mathbf{R}^n$ 的一个紧致集 D 的边界是 $\mathbf{R}^n$ 的 $n-1$ 维 C^∞ 类的子流形, 而 $V=\partial D$ 是其边界. 则在 $\mathrm{Vol}\,(D)$ 和其边界的 $\mathrm{Vol}\,(\partial D)$ 之间不等式

$$\frac{[\mathrm{Vol}\,(\partial D)]^d}{[\mathrm{Vol}\,(D)]^{d-1}} \geqslant \frac{[\mathrm{Vol}\,(S^{d-1})]^d}{[\mathrm{Vol}\,(B_d(0,1))]^{d-1}}$$

总成立, 并且, 等式当且仅当 D 是球 (半径任意, 因为比值在相似变换下不变) 时成立.

我们将在 9.3 看到这个不等式在 $d=2$ 情形的一个非常简单的证明. 对于 $d\geqslant 3$, 证明精细得多, 并且在历史上经过漫长的岁月才等来这个证明. 参见 [40] 的 12.11 以便了解其细节. 这里我们奉献这个不等式的最新的, 并且就我所知是独一无二的基于斯托克斯定理的证明. 它归功于格罗莫夫.

$\mathbf{R}^d$ 的典范基底是 $\{e_i\}_{i=1,\cdots,d}$, 关联的坐标函数是 $\{x_i\}_{i=1,\cdots,d}$. 我们通过规范化把问题归结到 $\mathrm{Vol}\,(D)=\mathrm{Vol}\,(B_d(0,1))$ 的情形. 基本的思想是依下列方式定义一个映射 $f:D\to B_d(0,1)$.

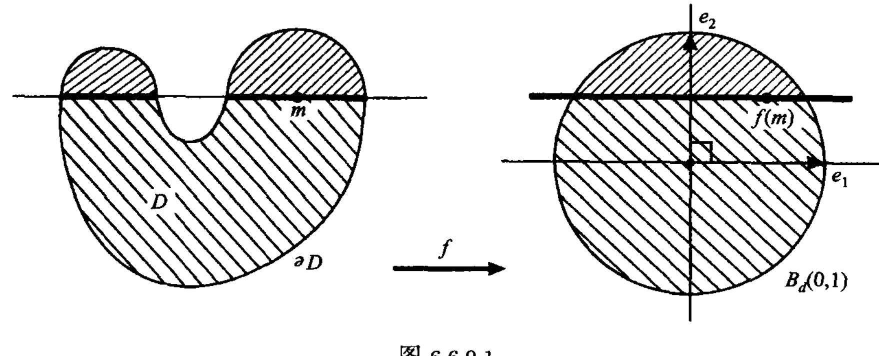


图 6.6.9.1

令 D 的点 m 对应两个如下定义的仿射超平面 $H_1(m)$ 和 $\widehat{H}_1(m)$: 二者都平行于向量超平面 $x_1=0$, 第一个 $H_1(m)$ 过 m, 而第二个 $\widehat{H}_1(m)=x_1^{-1}(a_1)$ 被调整得分割 $B_d(0,1)$ 成两个部分, 它们的体积恰好等于 $H_1(m)$ 分割 D 所成的两个部分的体积, 即实数 a_1 由以下条件确定:

$$\mathrm{Vol}\,(D\bigcap x_1^{-1}([x_1(m),+\infty)))=\mathrm{Vol}\,(B_d(0,1)\bigcap x_1^{-1}([a_1,+\infty))).$$

然后可以利用前面的构造方式定义两个 d 维仿射子空间, 并且记作 $H_2(m)$ 和 $\widehat{H}_2(m)$, 不过 D 和 $B_d(0,1)$ 分别代之以 $D\bigcap H_2(m)$ 和 $B_d(0,1)\bigcap\widehat{H}_2(m)$, 而 $H_2(m)$ 和 $\widehat{H}_2(m)$ 平行于方程为 $x_1=0,x_2=0$ 的向量子空间.

如此继续构造 $H_i(m)$ 和 $\widehat{H}_i(m)$, 直到 $H_{d-1}(m)$ 和 $\widehat{H}_{d-1}(m)$, 最后到点 $H_0(m)=\{m\}$ 和 $\widehat{H}_0(m)=\{f(m)\}$, 这就定义了 $f(m)$. 由 f 的构造本身, 它的雅可比矩阵 $Jf(m)=\left\{\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(m)\right\}$ 的形式是

$$\begin{pmatrix}\lambda_1(m) & X & & X\\ 0 & \lambda_2(m) & & X\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & & \lambda_d(m)\end{pmatrix},$$

其中对角线下方所有元素是零, 对角线右上方的元素无关紧要, 而对角线上的元素是 $\lambda_i(m)=\dfrac{\partial f_i}{\partial x_i}(m)$. 只是要注意 f 的可微性在边界的"内部"会存在问题, 在唯一性的证明中将准确指出相应部分. 我们暂时忽略这个问题.

由构造过程和富比尼定理容易确信 f 保持体积, 故

$$\prod_{i=1}^{d}\lambda_i(m)=1.$$

现在把 f 看作带边区域 D 上的向量场; 由于 $f(m)$ 属于单位球 $B_d(0,1)$, 它的范数总是满足 $\|f(x)\|\leqslant 1$. 对于带边区域 D 上的向量场 f 和 D 的边界 $\partial D=V$, 应

用斯托克斯定理:

$$\int_D \operatorname{div}(f)(m)\mathrm{d}\,m = \int_{\partial D} (f(h)|\nu(h))\mathrm{d}\,h,$$

其中, $\operatorname{div}(f)$ 是 f 的散度, $\mathrm{d}\,m$ 是 D 上 (从而是 $\mathbf{R}^d$ 上的) 的勒贝格测度, 而 $\mathrm{d}\,h$ 是 D 的边界 ∂D 上的可微超曲面的测度, $\nu(m)$ 表示 ∂D 的单位外法向量. 我们有

$$\operatorname{div}(f)(m) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i(m),$$

由经典的算术几何平均值不等式, 得不等式

$$\sum_{i=1}^{d} \lambda_i(m) \geqslant d \left(\prod_{i=1}^{d} \lambda_i(m)\right)^{1/d} = d.$$

由于 $\|f\| \leqslant 1$, 我们有 $|(f|\nu)| \leqslant 1$. 终于有

$$\begin{aligned}\operatorname{Vol}(D) = \operatorname{Vol}(B_d(0,1)) = \int_D \mathrm{d}\,m \leqslant d^{-1} \int_D \operatorname{div}(f)\mathrm{d}\,m \\ = d^{-1} \int_{\partial D} (f(h)|\nu(h))\mathrm{d}\,h \leqslant d^{-1} \int_{\partial D} \mathrm{d}\,h = d^{-1}\operatorname{Vol}(\partial D).\end{aligned}$$

结合 6.5.6.1, 这就是等周不等式.

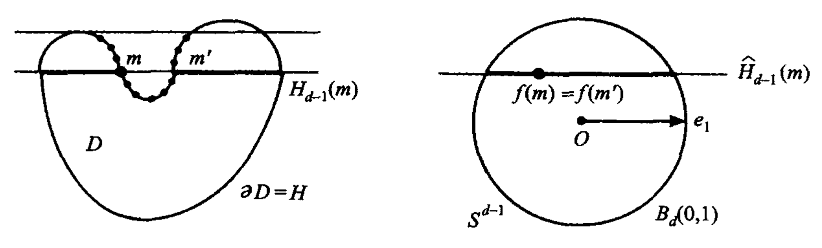


图 6.6.9.2

以下假定等式成立. 首先有对于所有 $m \in D$, 所有 $\lambda_i(m)$ 彼此相等并且都等于 1, 还可以参见 [40], 11.8.11.6. 其次, 在 D 的边界 H 的所有点, $(f|\nu) = 1$. 这就排除了下面所绘的图形, 其理由是边界的加了圆点部分 ("内部边界") 的点的像是 $B_d(0,1)$ 的内点. 特别的情形是: 所有直线 $H_{d-1}(m)$ 与 H 仅仅交于两个点.

因为 $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_i} = 1$, 映射 f 应该有形式 (经过平移后取消常数):

$$f(x_1, \cdots, x_d) = (x_1, x_2 + a(x_1), x_3 + b(x_1, x_2), \cdots).$$

现在利用沿着 H 有 $(f|\nu) = 1$ 这一结果. 由此得到 $f = \nu$. 注意 H 由方程

$$x_1^2 + (x_2 + a(x_1))^2 + \cdots = 1$$

给定. 设 K 是一个平行于 $x_3 = x_4 = \cdots = x_d = 0$ 的仿射平面, 现在我们停留在 D 被 K 截得的截口 $K \bigcap D$ 上, 也就是说保持 $x_3, \cdots, x_d$ 固定, 只让 x_1 和 x_2 变化, 上面给出的 H 的方程和条件 $f = \nu$ 说的是

$$\frac{2x_1}{x_1} = \frac{2(x_2 + a(x_1))(1 + a'(x_1))}{x_2 + a(x_1)}.$$

由此得到 $a'(x_1) = 0$. 通过平移以取消常数, 我们确信 f 在 $K \bigcap D$ 上的限制是恒等映射 $(x_1, x_2) \mapsto (x_1, x_2)$. 换句话说, 截口 $K \bigcap D$ 等于圆盘 $K \bigcap B_d(0, 1)$.

现在标准正交坐标系的选择是任意的, 我们断言 D 被一个仿射平面截得的截口总是一个圆盘, 其半径小于或等于 1.

由于 f 是满射的, 至少有一个这样的圆盘 D', 其半径刚好是 1. 在 D' 上取定两个对径点 m_1 和 m_2, 它们的距离是 2. 考虑任意一个含有这两个点 m_1 和 m_2 的仿射平面 P. 由于 $P \bigcap D$ 是半径小于或等于 1 的圆盘, 而事实上是半径等于 1 的圆盘, 并且在此圆盘上, m_1 和 m_2 是对径点. 让 P 以所有可能的方式变化, 就使我们确信 D 是半径为 1 的球, 而且球心是 m_1 和 m_2 的中间点.

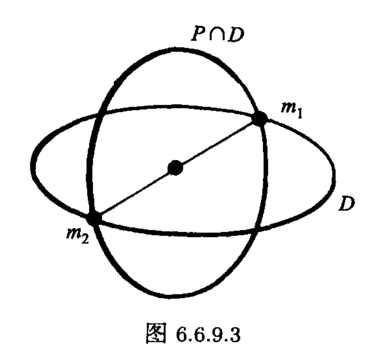


图 6.6.9.3

6.7 管形的体积 I: 体积形式的补充

设 X 是 n 维欧几里得向量空间 E 的 d 维子流形. 为了叙述的简化, 在以下的研究中将假定 X 是 C^∞ 类的. 将记 i 为从 X 到 E 内的典范单射.

我们复习一下法丛的概念, 参见 2.7. 现在的情形对应 $f = i$. 对于 $x \in X$, 令

6.7.1 $$N_x X = (\theta_{i(x)}(T_x X))^\perp$$

(正交 $\perp$ 是在欧几里得空间 E 的意义下的), 并且令

6.7.2 $$NX = \{(x, v) : x \in X, v \in N_x X\},$$

这是 $X \times E$ 的 C^∞ 类的 n 维子流形 (参见 2.7.7). 引进记号

6.7.3 $$N_x^\varepsilon(X) = \{v \in N_x X, \|v\| < \varepsilon\},$$

6.7.4 $$N^{\varepsilon}X = \{(x,v) : x \in X, v \in N_x^{\varepsilon}(X)\} = \{(x,v) \in NX : \| v \| < \varepsilon\}.$$

再引进在 2.7.2 由

$$(x,v) \mapsto x + v$$

定义的映射 can : $NX \to E$, 并且令

6.7.5 $$TUB^{\varepsilon}(X) = \mathrm{can}\,(N^{\varepsilon}X).$$

我们知道 (参见 2.7.12), 如果 X 是紧致的, 则存在 $\varepsilon > 0$, 使得映射

$$\mathrm{can} \in \mathrm{Diff}\,(N^{\varepsilon}X, TUB^{\varepsilon}(X)).$$

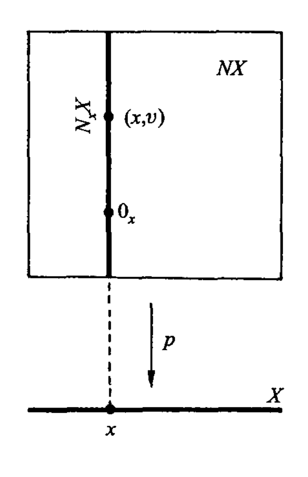
还要引入

6.7.6 $$NU_xX = \{(x,v) \in NX : \|v\| = 1\}, NUX = \bigcup_{x \in X} NU_xX.$$

我们知道 NUX 称为单位法丛 (参见 2.7.4), 并且 NUX 是 NX 的一个 C^{∞} 子流形: 参见 2.7.7.

最后引进底映射 $p : NX \to X$, 其定义是

6.7.7 $$p : NX \ni (x,v) \mapsto x \in X.$$



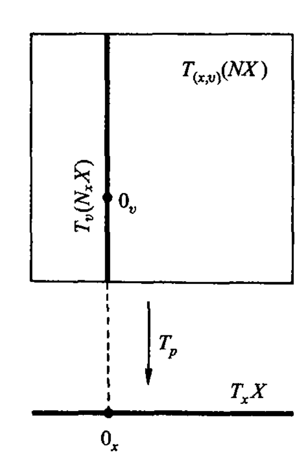


图 6.7.7

我们断言

6.7.8 $$T_v(N_xX) = (T_{(x,v)}p)^{-1}(0) \subset T_{(x,v)}(NX).$$

必须验证其中的等式. 它来源于 $N_xX = p^{-1}(x) \subset NX$ 是 NX 的一个子流形, 这可以由 p 是浸没得到, 而后一事实将在 6.7.12 仔细证明.

最后, 由于 X 是欧几里得空间的子流形, 所以它配备了一个典范密度, 参见 6.6.1.

6.7.9 引理

在法丛 NX 上存在一个 C^∞ 类的典范密度 Δ, 用下列条件表达其特征: 对于 NX 的任意标准正交基底 $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_d, \eta_{d+1}, \cdots, \eta_n\}$, 其中

$$\{\eta_{d+1}, \cdots, \eta_n\} \in T_v(N_xX), \{\lambda_1, \cdots, \lambda_d\} \in T_{(x,v)}(NX),$$

我们有

$$\Delta(\lambda_1, \cdots, \lambda_d, \eta_{d+1}, \cdots, \eta_n) = \delta(T_{(x,v)}p(\lambda_1), \cdots, T_{(x,v)}p(\lambda_d)).$$

因为容易证明等式右端是 C^∞ 类的, 故主要涉及证明等式代数上成立.

6.7.10 注释

6.7.10.1 需要强调的是: Δ 一般不是 $E \times E$ 的子流形 NX 上的典范密度.

6.7.10.2 以下为记号的简化经常省略同构 θ, θ^{-1} 等等.

Δ 的代数构造.

给定一个固定点 $(x, v) \in NX$, 由于 $T_v(N_xX)$ 是 $T_{(x,v)}(NX)$ 的一个子空间, 所以存在关联的正交投影 $q : T_{(x,v)}NX \to T_v(N_xX)$.

6.7.10.3 给向量空间 T_xX 和 N_xX 任意定向 (随之也就给了 $T_v(N_xX)$ 定向). 设 α 和 β 是对应这些定向的体积形式, 这里 α 是 T_xX (欧几里得空间) 上的典范体积形式, 即在所有正的标准正交基底上取值为 1 的体积形式, 而 β 对应 X 上的典范密度 δ (参见 6.6.1).

那么, 如果令 $\Delta(x, v) = |p^*\beta \wedge q^*\alpha|$, 因为 $\eta_i \in T_v(N_xX) = (T_{(x,v)}p)^{-1}(0)$, 所以

$$p^*\beta(\lambda_1, \cdots, \eta_i, \cdots, \lambda_d) = \beta(\cdots, T_{(x,v)}p(\eta_i), \cdots) = \beta(\cdots, 0, \cdots) = 0,$$

从而 (参见 0.1.2)

$$(p^*\beta \wedge q^*\alpha)(\lambda_1, \cdots, \lambda_d, \eta_{d+1}, \cdots, \eta_n) = p^*\beta(\lambda_1, \cdots, \lambda_d) q^*\alpha(\eta_{d+1}, \cdots, \eta_n).$$

而 $T_v(N_xX)$ 的基底 $\{\eta_{d+1}, \cdots, \eta_n\}$ 是标准正交的, 故

$$\alpha(T_{(x,v)}q(\eta_{d+1}), \cdots, T_{(x,v)}q(\eta_n)) = \pm 1,$$

而 β 对应密度 δ, 故待证

$$\Delta(x, v)(\lambda_1, \cdots, \lambda_d, \eta_{d+1}, \cdots, \eta_n) = \delta(T_{(x,v)}p(\lambda_1), \cdots, T_{(x,v)}p(\lambda_d)).$$

此外, 这个公式表示了 Δ 的特征. 这是由于, p 既然是一个嵌入 (这一断言稍后验证), 必定存在 $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_d, \eta_{d+1}, \cdots, \eta_n\}$, 使得 $\{T_{(x,v)}p(\lambda_1), \cdots, T_{(x,v)}p(\lambda_d)\}$ 是 $T_{(x,v)}NX$ 的一个基底.

有待证明的是, 在 3.3.5 引入的映射是 C^∞ 的. 根据 3.3.6, 只需对于一个特殊的坐标卡集这样做.

现在考虑 NX 的如下类型的参数表示.

设 (U,h) 是 X 在 x 的一个参数表示, 其中 $U\in O_0(\mathbf{R}^d), h\in C^\infty(U;h(U))$ $(h(0)=x)$ (参见 2.1.6).

向量组 $\left\{\dfrac{\partial h}{\partial u_1}(0),\cdots,\dfrac{\partial h}{\partial u_d}(0)\right\}$ 是线性无关的, 可以把它补充成 E 的一个基底, 不妨设为

$$\left\{\frac{\partial h}{\partial u_1}(0),\cdots,\frac{\partial h}{\partial u_d}(0),e_{d+1},\cdots,e_n\right\}$$

(其实 $\dfrac{\partial h}{\partial u_i}(0)\in T_xX$, 我们把 $\dfrac{\partial h}{\partial u_i}(0)$ 和 $\theta\left(\dfrac{\partial h}{\partial u_i}(0)\right)$ 不予区分). 如果有必要缩小 U (由于偏导数的连续性, 一组向量组成基底表示它们组成的行列式 $\neq 0$), 可以假定对于所有 $u\in U$,

$$\left\{\frac{\partial h}{\partial u_1}(u),\cdots,\frac{\partial h}{\partial u_d}(u),e_{d+1},\cdots,e_n\right\}$$

是 E 的一个基底.

对于这个基底进行施密特正交化, 其中所进行的计算对于 u 都是 C^∞ 类的, 得到 E 的 C^∞ 依赖 U 的 u 的标准正交基底 $\{\xi_1(u),\cdots,\xi_d(u),\nu_{d+1}(u),\cdots,\nu_n(u)\}$, 并且 (因为 $\xi_i(u)$ 是 $\dfrac{\partial h}{\partial u_j}(u)$ 的线性组合) $\{\xi_1(u),\cdots,\xi_d(u)\}$ 是 $\theta(T_{h(u)}X)$ 的标准正交基底. 随之 $\{\nu_{d+1}(u),\cdots,\nu_n(u)\}$ 是 $(\theta(T_{h(u)}X))^\perp$ 即 $N_{h(u)}X$ 的标准正交基底.

我们以下列方式定义 NX 的参数表示:NX 是一个 n 维流形, 考虑 $\mathbf{R}^n$ 的开集 $U\times\mathbf{R}^{n-d}$, 并且用

6.7.11 $$H(u,t_{d+1},\cdots,t_n)=\left(h(u),\sum_{j=d+1}^{n}t_j\nu_j(u)\right)$$

定义 $H\in C^\infty(U\times\mathbf{R}^{n-d};NX)$.

令 $t=(t_{d+1},\cdots,t_n)$ 我们有 $h(u)=x\in X$, 并且根据前面所述, $\sum\limits_{j=d+1}^{n}t_j\nu_j(u)\in N_{h(u)}X$, 故 $H(u,t)\in NX$. 由于当 t 遍历 $\mathbf{R}^{n-d}$ 时, $\sum\limits_{j=d+1}^{n}t_j\nu_j(u)$ 遍历 $N_{h(u)}X$, 故

$$H(U\times\mathbf{R}^{n-d})=\bigcup_{u\in U}\big(\{h(u)\}\times N_{h(u)}X\big).$$

如果像 6.7.2 那样, 令

$$N(h(U))=\{(x,v):x\in h(U),v\in N_xX\},$$

则

$$H(U\times\mathbf{R}^{n-d})=N(h(U))\ \text{是}\ NX\ \text{的开集}.$$

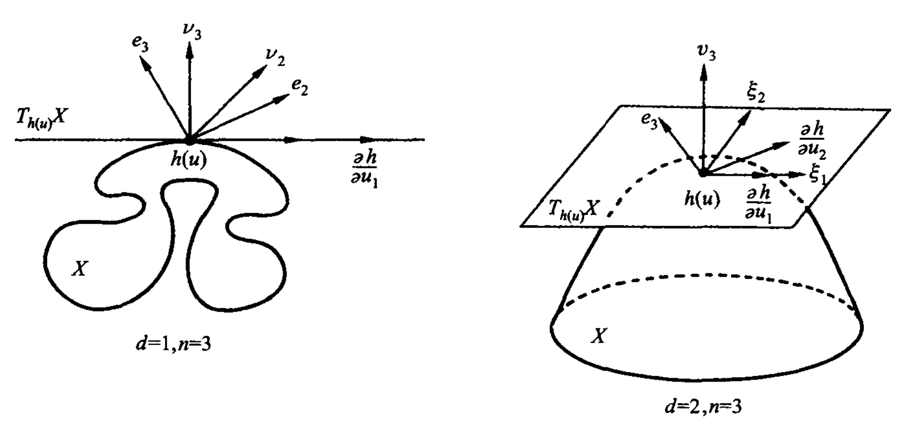


图 6.7.11

并且 H 是单射 (h 是单射, u 固定, $t \mapsto \sum_{j=d+1}^{n} t_j\nu_j(u)$ 也是单射), 故 $H \in C^\infty(U \times \mathbf{R}^{n-d}; N(h(U)))$ 是双射. 还留下验证 H 是浸入. 为此, 由于 $N(h(U)) \subset NX \subset E\times E$, 可以把 H 看作从 $U \times \mathbf{R}^{n-d}$ 到 $E \times E$ 内的映射, 并且求它的雅可比矩阵 H' 的秩.

由于 $h : U \to X \subset E$ 是在 E 取值的一个映射, 可以设它的坐标函数为 $h_1, \cdots, h_n$. 同样, 由于 $\nu_j(u) \in N_{h(u)}X \subset E$, 可以设它的坐标为 $\nu_j^k(u), k = 1, \cdots, n$. 于是作为 $E \times E$ 的元素

$$H(u,t) = \left(h_1(u), \cdots, h_n(u), \sum_{j=d+1}^{n} t_j\nu_j^{(1)}(u), \cdots, \sum_{j=d+1}^{n} t_j\nu_j^{(n)}(u)\right),$$

其中 $u = (u_1, \cdots, u_d)$, 而 $t = (t_{d+1}, \cdots, t_n)$. 于是

$$H' = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial u_d} \\ \vdots & (h') & \vdots \\ \frac{\partial h_n}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial h_n}{\partial u_d} \end{pmatrix} & \begin{matrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \sum_{j=d+1}^{n} t_j \frac{\partial \nu_j^{(1)}(u)}{\partial u_1} & \cdots & \sum_{j=d+1}^{n} t_j \frac{\partial \nu_j^{(1)}(u)}{\partial u_d} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{j=d+1}^{n} t_j \frac{\partial \nu_j^{(n)}(u)}{\partial u_1} & \cdots & \sum_{j=d+1}^{n} t_j \frac{\partial \nu_j^{(n)}(u)}{\partial u_d} \end{matrix} & \begin{pmatrix} \nu_{d+1}^{(1)}(u) & \cdots & \nu_n^{(1)}(u) \\ \vdots & (\nu) & \vdots \\ \nu_{d+1}^{(n)}(u) & \cdots & \nu_n^{(n)}(u) \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$\uparrow$ 对于 u_1 的导数 $\quad$ $\uparrow$ 对于 u_d 的导数 $\quad$ $\uparrow$ 对于 t_{d+1} 的导数 $\quad$ $\uparrow$ 对于 t_n 的导数

这个矩阵可以简写为

$$H' = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial h}{\partial u_1} & \cdots & \dfrac{\partial h}{\partial u_d} & 0 & \cdots & 0 \\ \sum\limits_{j=d+1}^{n} t_j \dfrac{\partial \nu_j}{\partial u_1} & \cdots & \sum\limits_{j=d+1}^{n} t_j \dfrac{\partial \nu_j}{\partial u_d} & \nu_{d+1} & \cdots & \nu_n \end{pmatrix},$$
$$\qquad \dfrac{\partial}{\partial u_1} \qquad \cdots \qquad \dfrac{\partial}{\partial u_d} \qquad \dfrac{\partial}{\partial t_{d+1}} \cdots \dfrac{\partial}{\partial t_n}$$

上个矩阵中的 (h') 和 (ν) 表示的是

$$(h') = \left(\frac{\partial h}{\partial u_1}, \cdots, \frac{\partial h}{\partial u_d}\right), \quad (\nu) = (\nu_{d+1}, \cdots, \nu_n).$$

而 h 是 X 的一个参数表示, 这是一个浸入, 故 (h') 的秩是 d. 又 $\{\nu_{d+1}(u), \cdots, \nu_n(u)\}$ 是 $N_{h(u)}X$ 的一个基底, 矩阵 (ν) 的秩是 $n-d$, 故 ($2n$ 行 n 列的矩阵) H' 的秩是 n. 这就证明了 H 是 NX 的 C^∞ 类的参数表示.

6.7.12 注释

因为

$$(u,t) \overset{H}{\longmapsto} \left(h(u), \sum_{j=d+1}^{n} t_j \nu_j(u)\right) \overset{p}{\longmapsto} h(u) \overset{h^{-1}}{\longmapsto} u,$$

故 $p: NX \to X$ 是一个浸没. 随之 $h^{-1} \circ p \circ H$ 是从 $U \times \mathbf{R}^{n-d}$ 到 U 上的投影 π. 这个映射的秩是 $d = \dim X, H$ 和 h 都是平直的, p 的秩必然大于或等于 d. 而 p 在 d 维的 X 内取值: 故 p 的秩是 d, 从而 p 是浸没. 这就验证了前面用到而未证明的断语.

为了完成引理 6.7.9 的证明, 必须证明对应在 6.7.11 引进的 NX 的参数表示, 3.3.5 的条件满足. 为此, 设 $\{e_1, \cdots, e_d\}$ 是 $\mathbf{R}^d$ 的典范基底, $\{f_{d+1}, \cdots, f_n\}$ 是 $\mathbf{R}^{n-d}$ 的典范基底, 而 $\delta_1 = |\mathrm{d}\,u_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\,u_d|$ 和 $\Delta_1 = |\mathrm{d}\,u_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\,u_d \wedge \mathrm{d}\,t_{d+1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\,u_n|$ 分别是 $\mathbf{R}^d$ 和 $\mathbf{R}^n$ 的典范密度.

存在数值 $Z(u)$ 和 $Z(u,t)$ 使得

6.7.13 $$H^*\Delta = Z(u,t)\Delta_1 \quad 和 \quad h^*\delta = z(u)\delta_1.$$

必须指出, 函数 $z(u,t)$ 是 C^∞ 类的 (利用参数表示或坐标卡可以得到条件 3.3.5). 我们有

6.7.14 $$Z(u,t) = Z(u) = \delta\left(\frac{\partial h}{\partial u_1}(u), \cdots, \frac{\partial h}{\partial u_d}(u)\right)$$

$\left(\dfrac{\partial h}{\partial u_j}(u)\right.$ 看作 $T_{h(u)}X$ 的元素, δ 是欧几里得空间 E 的子流形 X 的典范密度$\left.\right)$.

事实上, 我们有

$$\begin{aligned}&H^*\Delta(h(u),t)(e_1,\cdots,e_d,f_{d+1},\cdots,f_n)\\&=\Delta(h(u),t)(T_{(u,t)}H(e_1),\cdots,T_{(u,t)}H(e_d),T_{(u,t)}H(f_{d+1}),\cdots,T_{(u,t)}H(f_n)).\end{aligned}$$

由矩阵 H' 的表达式, 对于 $j=d+1,\cdots,n$, 我们有

$$T_{(u,t)}H(f_j)=\theta^{-1}_{(h(u),t)}(\nu_j)=\eta_j\in T_v(N_{h(u)}X),$$

并且 $\{\eta_{d+1},\cdots,\eta_n\}$ 是 $T_v(N_{h(u)}X)$ 的标准正交基底 (根据 $\nu_j(u)$ 的选择). 根据 Δ 的代数定义, 并且仍然利用矩阵 H' 的表达式, 我们得到

$$\begin{aligned}(H^*\Delta)(h(u),t)(e_1,\cdots,e_d,f_{d+1},\cdots,f_n)&=\delta(T_u(p\circ H)(e_1),\cdots,T_u(p\circ H)(e_d))\\&=\delta\left(\frac{\partial h}{\partial u_1}(u),\cdots,\frac{\partial h}{\partial u_d}(u)\right).\end{aligned}$$

由于 h 是 C^∞ 参数表示, 并且 δ 是 X 的一个 C^∞ 密度, 故

$$Z(u,t)=\delta\left(\frac{\partial h}{\partial u_1}(u),\cdots,\frac{\partial h}{\partial u_d}(u)\right)$$

是 C^∞ 类的. 至此完成引理 6.7.9 的证明.

6.7.15 引理

用 ε_x 表示作为欧几里得空间 E 的子空间的欧几里得空间 N_xX 的典范密度, 并且把 N_xX 和 $\{x\}\times N_xX$ 等同. 如果

$$f\in C^{\text{int}}_{\Delta}(NX),$$

则对于 δ, 几乎所有的 $x\in X$, 我们有

$$f|_{N_xX}\in C^{\text{int}}_{\varepsilon_x}(NX),$$

并且函数

$$x\mapsto\int_{N_xX}f|_{N_xX}\cdot\varepsilon_x$$

是 $\delta-$可积的. 进而

6.7.16 $$\int_{NX}f\cdot\Delta=\int_X\left(\int_{N_xX}f|_{N_xX}\cdot\varepsilon_x\right)\cdot\delta.$$

如果对于在 $H(U\times\mathbf{R}^{n-d})$(这里 $(U\times\mathbf{R}^{n-d},H)$ 是在 6.7.11 定义的参数表示) 有紧致支集的 $f\in C^{\text{int}}_{\Delta}(NX)$ 证明这个结果, 引理将对于有任意支集的 $f\in C^{\text{int}}_{\Delta}(NX)$ 成立 (利用单位分解). 因为 $\operatorname{supp}(f)\subset H(U\times\mathbf{R}^{n-d})$, 而 H 建立了 $H(U\times\mathbf{R}^{n-d})$ 和 $U\times\mathbf{R}^{n-d}$ 之间的微分同胚, 根据 3.3.16,

$$\int_{NX}f\cdot\Delta=\int_{H(U\times\mathbf{R}^{n-d})}f\cdot\Delta=\int_{U\times\mathbf{R}^{n-d}}(f\circ H)\cdot H^*\Delta=\int_{U\times\mathbf{R}^{n-d}}(f\circ H)Z(u,t)\cdot\Delta_1,$$

其中 Δ_1 是 $\mathbf{R}^n$ 的典范密度 (参见 6.7.13).

而根据 6.7.13 和 6.7.14, 采用那里的同样的记号, 则有

$$\begin{aligned}Z(u,t)\cdot\Delta_1 &= z(u)|\mathrm{d}\,u_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\,u_d\wedge\mathrm{d}\,t_{d+1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\,t_n|\\ &= z(u)\cdot\delta_1\cdot|\mathrm{d}\,t_{d+1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\,t_n|,\end{aligned}$$

随之由富比尼定理 (参见 0.4.5.1) 得到

$$u\mapsto\int_{\{u\}\times\mathbf{R}^{n-d}}(f\circ H)|\mathrm{d}\,t_{d+1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\,t_n|$$

几乎处处定义, $(h^*\delta)-$ 可积, 并且

$$\begin{aligned}\int_{NX}f\cdot\Delta &= \int_{U\times\mathbf{R}^{n-d}}(f\circ H)h^*\delta(e_1,\cdots,e_d)|\mathrm{d}\,t_{d+1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\,t_n|\\ &= \int_U\left(\int_{\{u\}\times\mathbf{R}^{n-d}}(f\circ H)|\mathrm{d}\,t_{d+1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\,t_n|\right)\cdot h^*\delta.\end{aligned}$$

对于 $u\in U$, 如果 $x=h(u)$, 则 $\{u\}\times\mathbf{R}^{n-d}$ 经过 $H|_{\{u\}\times\mathbf{R}^{n-d}}$ 变换为 $\{u\}\times N_xX$, 而 ε_x 变换为 $\mathrm{d}\,t_{d+1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\,t_n$, 故

$$\begin{aligned}\int_{\{u\}\times\mathbf{R}^{n-d}}(f\circ H)|\mathrm{d}\,t_{d+1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\,t_n| &= \int_{\{u\}\times\mathbf{R}^{n-d}}(f\circ H)(H|_{\{u\}\times\mathbf{R}^{n-d}})^*\varepsilon_x\\ &= \int_{\{x\}\times N_xX}f\cdot\varepsilon_x,\end{aligned}$$

这证明对于几乎所有 x, $\int_{\{x\}\times N_xX}f\cdot\varepsilon$ 这个积分存在, 并且函数 $x\mapsto\int_{\{x\}\times N_xX}f\cdot\varepsilon_x$ 是 $(h^*\delta)-$ 可积的. 于是

$$\int_{NX}f\cdot\Delta=\int_U\left(\int_{\{h(u)\}\times N_{h(u)}X}f\cdot\varepsilon_{h(u)}\right)h^*\delta,$$

由于 (U,h) 是 X 的一个参数表示, 而 f 的支集在 $H(U)$ 内, $x\mapsto\int_{\{x\}\times N_xX}f\cdot\varepsilon_x$ 的支集在 U内, 上述等式还可以写成

$$\int_{NX}f\cdot\Delta=\int_X\left(\int_{N_xX}f|_{N_xX}\cdot\varepsilon_x\right)\delta.$$

6.7.17　单位法丛情形

NUX 也有一个典范密度 Ψ. 事实上如果 $x\in X$, 则 NU_xX (参见 6.7.6) 是欧几里得空间 E 的单位球面, 它有一个典范密度 τ_x. 于是在 NUX 上有一个密度 Ψ, 由下列事实刻画其特征: 对于任意 $\lambda_1,\cdots,\lambda_d\in T_{(x,v)}NX$, 任意 $\nu_{d+2},\cdots,\nu_n\in T_v(NU_xX)$, 其中 $T_v(NU_xX)$ 是 N_xX 在 $v\in NU_xX$ 的单位球面的切空间:

$$\Psi(\lambda_1,\cdots,\lambda_d,\nu_{d+2},\cdots,\nu_n)=\delta(T_{(x,v)}p(\lambda_1),\cdots,T_{(x,v)}p(\lambda_d))\cdot\tau_x(\nu_{d+2},\cdots,\nu_n),$$

这个等式简写为

6.7.18 $$\Psi = p^*\delta \wedge \tau.$$

像 6.7.15 那样证明:

6.7.19 引理

对于所有函数 $f \in C_{\Psi}^{\text{int}}(NUX)$, 我们有

$$\int_{NUX} f \cdot \Psi = \int_X \left(\int_{\{x\} \times NU_x X} f \cdot \tau_x \right) \delta.$$

证明留给读者作为习题.

6.7.20 注释

引理的公式是关于浸没的积分的一般公式的特殊情形; 对于定向情形, 参见 [14], (16.24.8.1).

6.7.21 定向问题

6.7.22 引理

如果 E 是定向的, 则由此得到 NX 上的一个典范定向.

像 6.7.10.3 那样给向量空间 T_xX 和 N_xX 定向, 不过条件是在 $E = \theta_x(T_xX) \oplus N_xX$ 上诱导的定向就是 E 的给定定向. 随之在 NX 上定义一个局部体积形式

6.7.23 $$\Xi = p^*\beta \wedge q^*\alpha.$$

如果改变局部定向, β 变为 $-\beta, \alpha$ 应当变为 $-\alpha$(为了回到 E 的定向), 于是 Ξ 保持不变.

这个体积形式将是对于 E 的给定定向的 NX 上的典范体积形式.

6.7.24 推论

NX 总是可定向的 (不论 X 是否是可定向的).

6.7.25 注释

6.7.25.1 如果改变 E 的定向, 则 Ξ 变为 $-\Xi$.

6.7.25.2 如果 $\left\{ \dfrac{\partial h}{\partial u_1}(u), \cdots, \dfrac{\partial h}{\partial u_d}(u), \nu_{d+1}, \cdots, \nu_n \right\}$ 是 E 的正的基底, 则 NX 的参数表示 H 将是正的.

(这里 $\dfrac{\partial h}{\partial u_j}(u)$ 经由映射 $\theta_{h(u)}$ 认为等同于 E 中的元素.)

6.7.26 NUX 的情形

由于 NUX 是区域 N^1X 的边界, NX 是定向的, 根据 5.3.36, NUX 也是定向的. 设 $\varTheta$ 是与此定向关联的 NUX 的典范体积形式. 如果 ζ 表示 NUX 的由

6.7.27 $$\zeta(x, v) = \theta_v^{-1}(v) \in T_v(N_xX) \subset T_{(x,v)}(NX)$$

定义 (参见 6.4.4) 的外出向量场, 根据 6.4.5 则有

6.7.28
$$\boxed{\textcircled{\mathit{H}} = \operatorname{int}(\zeta)\cdot \Xi}\,.$$

6.8 管形的体积 II

我们知道 (参见 2.7.12) 如果 X 是紧致的, 则对于充分小的 ε, 由 $\operatorname{can}(x,v)=x+v$ 定义的映射 $\operatorname{can}: N^{\varepsilon}X \to TUB^{\varepsilon}X$ 是一个微分同胚, 于是 $TUB^{\varepsilon}X$ 在欧几里得空间 E 内是相对紧致的. 如果 Δ_0 是 E 的典范密度, $TUB^{\varepsilon}X$(对于 Δ_0) 的体积将是有限的. 我们打算计算

6.8.1
$$\operatorname{Vol}(TUB^{\varepsilon}X) = \int_{TUB^{\varepsilon}X} \Delta_0 = \int_{N^{\varepsilon}X} \operatorname{can}^*\Delta_0.$$

如果 Δ 表示法丛的典范密度 (参见 6.7.9), 那么必须计算函数 $G \in C^{\infty}(NX)$, 它要满足条件

6.8.2
$$\operatorname{can}^*\Delta_0 = G\cdot\Delta.$$

考虑在 6.7.11 引入的 NX 的参数表示 $(U\times\mathbf{R}^{n-d}, H)$. 如果用 Δ_1 像前面一样表示 $\mathbf{R}^n$ 的典范密度, 那么存在函数 $S\in C^{\infty}(U\times\mathbf{R}^{n-d})$, 使得

6.8.3
$$(\operatorname{can}\circ H)^*\Delta_0 = S\cdot\Delta_1.$$

于是
$$S\cdot\Delta_1 = H^*(\operatorname{can}^*\Delta_0) = H^*(G\cdot\Delta) = (G\circ H)(H^*\Delta).$$

如果 Z 表示在 6.7.13 引入的满足 $H^*\Delta = Z\Delta_1$ 的函数, 则有 $S\cdot\Delta_1 = (G\circ H)Z\Delta_1$, 于是

6.8.4
$$\boxed{G\circ H = \frac{S}{Z}}\,.$$

在这个公式里, Z 的表达式是已经知道的 (参见 6.7.14).

为了计算 S, 用 $\{e_1,\cdots,e_d,f_{d+1},\cdots,f_n\}$ 表示 $\mathbf{R}^n$ 的标准正交基底, 则有
$$\Delta_1(e_1,\cdots,e_d,f_{d+1},\cdots,f_n)=1,$$

于是对于 $u\in U$ 和 $t\in\mathbf{R}^{n-d}$, 有:
$$S(u,t) = \left[(\operatorname{can}\circ H(u,t))^*\Delta_0\right](e_1,\cdots,e_d,f_{d+1},\cdots,f_n).$$

由 $\operatorname{can}(x,u)=x+v$ 得到 (参见 6.7.11):
$$(\operatorname{can}\circ H)(u,t) = h(u) + \sum_{j=d+1}^{n} t_j\nu_j(u).$$

做类似于 6.7.14 的计算, 借助雅可比矩阵, 我们得到

$$\begin{aligned}S(u,t) &= [(\mathrm{can}\circ H(u,t))^* \varDelta_0](e_1,\cdots,e_d,f_{d+1},\cdots,f_n)\\ &= \varDelta_0\left(\frac{\partial h}{\partial u_1}+\sum_{j=d+1}^{n} t_j\frac{\partial \nu_j}{\partial u_1},\cdots,\frac{\partial h}{\partial u_d}+\sum_{j=d+1}^{n} t_j\frac{\partial \nu_j}{\partial u_d},\nu_{d+1},\cdots,\nu_n\right).\end{aligned}$$

由于我们取 $N_xX=(\theta(T_{h(u)}X))^{\perp}$ 的标准正交基底作为 $\{\nu_{d+1},\cdots,\nu_n\}$, 在前面的等式里, 混淆了 E 的向量 ν_k 和它们在切空间里在映射 θ 下的像.

如果用

6.8.5
$$\bullet^T : e\mapsto e^T$$

表示从 $E=\theta(T_xX)\oplus N_xX$ 到 $\theta(T_xX)$ 上的投影, 那么从 $\varDelta$ 的定义 (参见 6.7.9) 得到

6.8.6
$$S(u,t)=\delta\left(\frac{\partial h}{\partial u_1}(u)+\sum_{j=d+1}^{n} t_j\left(\frac{\partial \nu_j}{\partial u_1}\right)^T,\cdots,\frac{\partial h}{\partial u_d}(u)+\sum_{j=d+1}^{n} t_j\left(\frac{\partial \nu_j}{\partial u_d}\right)^T\right).$$

6.8.7 注释

正如我们在 6.7.10.2 指出的那样, 这里使用对于 E, E 的切空间, NX 或 X 的切空间的值的等同化. 例如, 在 6.8.6 中, 值

$$\frac{\partial h}{\partial u_1}+\sum_{j=d+1}^{n} t_j\left(\frac{\partial \nu_j}{\partial u_1}\right)^T$$

是在 $T_{h(u)}X$ 中, 使用 6.7.1 中的记号, 应当写作

$$\frac{\partial h}{\partial u_k}+\sum_{j=d+1}^{n} t_j\theta^{-1}\left(\theta_{i(x)}\left(\frac{\partial \nu_j}{\partial u_k}\right)\right)^T.$$

读者容易理解有时宁肯混淆记号的缘由!

汇总前面的计算, 终于得到

6.8.8 命题

若 $h,H,\nu_j(d+1\leqslant j\leqslant n)$ 表示引理 6.7.9 证明中的同样的元素,

$$(u,t)\in U\times\mathbf{R}^{n-d},\quad x=h(u),\quad v=\sum_{j=d+1}^{n} t_j\nu_j(u);$$

则

6.8.9

$$\boxed{G(x,v)=\frac{\delta\left(\dfrac{\partial h}{\partial u_1}(u)+\displaystyle\sum_{j=d+1}^{n} t_j\left(\frac{\partial \nu_j}{\partial u_1}\right)^T,\cdots,\dfrac{\partial h}{\partial u_d}(u)+\displaystyle\sum_{j=d+1}^{n} t_j\left(\frac{\partial \nu_j}{\partial u_d}\right)^T\right)}{\delta\left(\dfrac{\partial h}{\partial u_1}(u),\cdots,\dfrac{\partial h}{\partial u_d}(u)\right)}}.$$

6.8.10　注释

特别地, 取 $t=0, v=0$, 我们发现 $G(x,0)=1$; 又得知对于 X 的所有 x, $T_{(x,0)}(\text{can})$ 是最大秩的, 换句话说定理 2.7.10 成立.

6.8.11　推论

存在 $d+1$ 个函数 $W_i \in C^\infty(NX)$ $(i=0,1,\cdots,d+1)$, 使得

1°
$$G=\left|\sum_{i=0}^{d} W_i\right|, \quad W_0=1;$$

2°　*对于 X 的所有固定的 x, 映射 $v \mapsto W_i(x,v)$ 是向量空间 N_xX 上的一个 i 阶齐次多项式.*

(对于在一个向量空间上的 i 阶齐次多项式的内蕴定义, 参见 [1], 80 页; 非内蕴的定义是: 对于任意一个基底, $W_i(x,v)$ 是 v 对于这个基底的坐标的总阶数为 i 次的齐次多项式).

事实上, 设 β 是 X 的局部典范体积形式, 使得 $\delta=|\beta|$. 那么, 展开分子, 并且按照对于 t_j 的阶数排序, 由于 β 是 $d-$ 线性形式, 我们发现

6.8.12
$$\frac{\beta\left(\dfrac{\partial h}{\partial u_1}+\displaystyle\sum_{j=d+1}^{n} t_j\left(\dfrac{\partial \nu_j}{\partial u_1}\right)^T,\cdots,\dfrac{\partial h}{\partial u_d}+\displaystyle\sum_{j=d+1}^{n} t_j\left(\dfrac{\partial \nu_j}{\partial u_d}\right)^T\right)}{\beta\left(\dfrac{\partial h}{\partial u_1},\cdots,\dfrac{\partial h}{\partial u_d}\right)}=\sum_{i=0}^{d} W_i,$$

其中 W_i 是对于 t_j 总次数为 i 的项的和, 显然有

$$G=\left|\sum_{i=0}^{d} W_i\right|, \quad W_0=1.$$

其中 W_i 是对于 $v\in N_xX$ 的坐标 t_j 的 i 次齐次多项式.

暂时看来, W_i 依赖参数表示的选择, 甚至依赖 β. 不过 β 换成 $-\beta, W_i$ 是不变的. 留下的是确认 W_i 只依赖所考虑的 NX 的点 (x,v).

我们知道 $G(x,v)$ 只是点 (x,v) 的函数 (参见 6.8.2). 由于对于充分小的 $\|v\|$, $G(x,v)>0$ (因为 $G(x,0)=1$, 并且 G 是连续的), 多项式

$$G(x,v)=\sum_{i=0}^{d} W_i(x,v)$$

的值确定后, 它的齐次部分随之确定, 参见 [1], 推论 6.3.2, 85 页. 于是这些部分对于所有 v 确定, 而仅仅依赖 (x,v). 最后表达式 6.8.12 表明这些函数是 C^∞ 的. 还可以知道如何从 G 得到 W_i, 参见 [1] 的定理 6.3.1 的证明.

为了结束 $TUB^\epsilon X$ 的体积计算的准备, 我们要给 G 的最后一项 W_d 一个美妙的解释. 思路是引入 E 的单位球面 $S(E)=\{z\in E: \|z\|=1\}$, 并且由

6.8.13 $$\gamma(x,v)=v$$

定义高斯映射 $\gamma\in C^\infty(NUX;S(E))$.

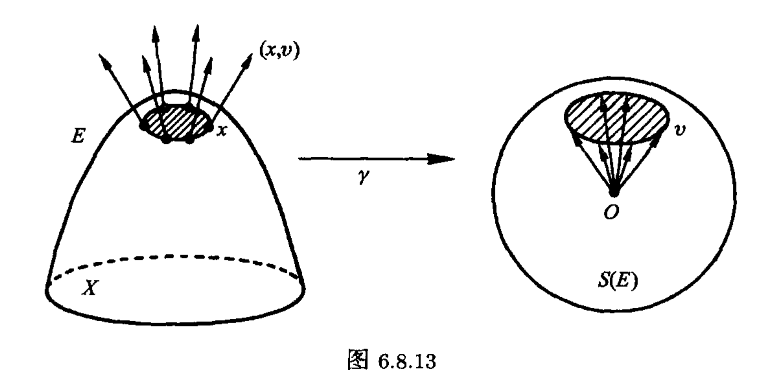


图 6.8.13

如果定向 E, 则球面 $S(E)$ 作为球 $B_E(0,1)$ 随之定向, 于是在 $S(E)$ 上有一个典范体积形式 Σ, 其定义是

6.8.14 $$\Sigma=\text{int}\,(v)\cdot\Omega_0,$$

Ω_0 是 E 对于选定的定向的典范体积形式, ν 则是由 $v(z)=\theta_z^{-1}(z)$ 定义的单位外出向量场: 参见 6.4.5. 那么我们有

6.8.15 引理

$\gamma^*(\Sigma)=W_d\cdot\textcircled{H}$, 这里 $\textcircled{H}$ 是 NUX 的典范体积形式, E 的定向任意选取. ($\textcircled{H}$ 在 6.7.28 定义).

对于 NUX 的点 (x,v), 其中 $x=h(u)$, 由于 $\|\theta(v)\|=1$, 可以假定 N_xX 的基底 $\{\nu_{d+1}(u),\cdots,\nu_d(u)\}$ 以这样的方式选取, 使得 $v=\nu_{d+1}(u)$. 仍然用 H 表示 6.7.11 中的关联于 h 和 $(\theta(T_xX))^\perp$ 的这个基底的参数表示, 我们有 $(x,v)=H(u,t)$, 而 $t=(1,0,\cdots,0)$.

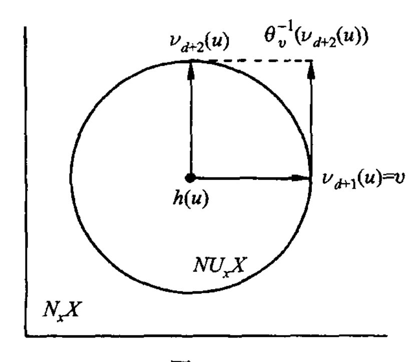


图 6.8.15

我们还假定 H 对于 E 的选取的定向是正的, 也就是说

$$\left\{\theta\left(\frac{\partial h}{\partial u_i}(u)\right)\right\}_{i=1,\cdots,d}\bigcup\{\nu_j(u)\}_{j=d+1,\cdots,n}$$

是 E 的正的基底. 如果继续把关联到 E 的

$$\theta\left(\frac{\partial h}{\partial u_i}(u)\right) \quad 和 \quad \nu_j(u),$$

$T_{(x,v)}(NUX)$ 中的向量记作 $\dfrac{\partial h}{\partial u_i}(u)$ 和 $\nu_j(u)$ $(j=d+2,\cdots,n)$, 则 $T_{(x,v)}(NUX)$ 的基底

$$\left\{\frac{\partial h}{\partial u_i}(u)\right\}_{i=1,\cdots,d}\bigcup\{\nu_j(u)\}_{j=d+2,\cdots,n}$$

对于 Ⓗ 是 $(-1)^d-$ 正的, 即 $(-1)^d$ 倍后是正的 (参见 6.7.28), 这是因为我们用 $\theta_v^{-1}(v)=\nu_{d+1}(u)$ (已声明的混淆) 做内积时, 必须把这个因子移动到第一个位置, 改变符号 d 次. 于是

$$\begin{aligned}(\gamma^*\varSigma)(x,v)&=\left(\frac{\partial h}{\partial u_1}(u),\cdots,\frac{\partial h}{\partial u_d}(u),\nu_{d+2}(u),\cdots,\nu_n(u)\right)\\&=\varSigma(\gamma(x,v))\left((T_{(x,v)}\gamma)\left(\frac{\partial h}{\partial u_1}(u)\right),\cdots,(T_{(x,v)}\gamma)\left(\frac{\partial h}{\partial u_d}(u)\right),\right.\\&\qquad\left.(T_{(x,v)}\gamma)(\nu_{d+2}(u)),\cdots,(T_{(x,v)}\gamma)(\nu_n(u))\right).\end{aligned}$$

而 NUX 是 NX 的子流形, 随之是 $E\times E$ 的子流形, 又 $S(E)$ 是 E 的子流形. 于是可以借助通常的导数计算 $T_{(x,v)}\gamma$.

沿用 6.7.11 的记号, 并且考虑到在切空间之间所做的等同化, 我们得到

$$((T_{(x,v)}\gamma)\left(\frac{\partial h}{\partial u_i}(u)\right)=(\gamma\circ H)'(u,t)(e_i),$$

6.8.16

$$(T_{(x,v)}\gamma)\,(\nu_j(u))=(T_{(x,v)}\gamma)(u,t)\,(H'(f_j))=(\gamma\circ H)'(f_j).$$

由于 $\gamma(x,v)=v$, 如果明晰写出 $\gamma\circ H$, 对于 $w\in U, s\in\mathbf{R}^{n-d}$(这里 $U\times\mathbf{R}^{n-d}$ 是参数表示 H 的定义域), 还留下

$$(\gamma\circ H)(w,s)=\sum_{j=d+1}^{n}s_j\nu_j(w).$$

如果计算 $(\gamma\circ H)'(u,t)$ (参见 6.7.11 的矩阵 H'), 由于 $t=(1,0,\cdots,0)$, 再考虑到 H 的选取, 则留下

$$\begin{aligned}&对于\ i=1,\cdots,d, \quad (\gamma\circ H)'(u,t)(e_i)=\frac{\partial\nu_{d+1}}{\partial u_i}(u),\\&而对于\ j=d+2,\cdots,n, \qquad (\gamma\circ H)'(u,t)(f_j)=\nu_j(u).\end{aligned}$$

由于 $\gamma(x,v)=v$, 我们得到

$$(\gamma^*\Sigma)(x,v)=\Sigma(v)\left(\frac{\partial\nu_{d+1}}{\partial u_1}(u),\cdots,\frac{\partial\nu_{d+1}}{\partial u_d}(u),\nu_{d+2}(u),\cdots,\nu_n(u)\right).$$

由于 $\Sigma=\operatorname{int}(\nu_{d+1}(u))\cdot\Omega_0$ (参见 6.8.14) 以及 $\nu_{d+1}(u)=v$, 我们有

$$\begin{aligned}(\gamma^*\Sigma)(x,v)&=\Omega_0\left(\nu_{d+1}(u),\frac{\partial\nu_{d+1}}{\partial u_1}(u),\cdots,\frac{\partial\nu_{d+1}}{\partial u_d}(u),\nu_{d+2}(u),\cdots,\nu_n(u)\right)\\&=(-1)^d\Omega_0\left(\frac{\partial\nu_{d+1}}{\partial u_1}(u),\cdots,\frac{\partial\nu_{d+1}}{\partial u_d}(u),\nu_{d+1}(u),\nu_{d+2}(u),\cdots,\nu_n(u)\right).\end{aligned}$$

设 β 是 $\theta(T_xX)$ 的 (任意) 局部体积形式, 由于 $E=\theta(T_xX)\oplus N_xX$, 而 $\{\nu_j(u)\}_{j=d+1,\cdots,n}$ 是 N_xX 的标准正交基底, 从欧几里得空间的典范体积形式的定义 (参见 0.1.15.5) 得到

6.8.17
$$\begin{aligned}&(\gamma^*\Sigma)(x,v)\left(\frac{\partial h}{\partial u_1}(u),\cdots,\frac{\partial h}{\partial u_d}(u),\nu_{d+2}(u),\cdots,\nu_n(u)\right)\\&=(-1)^d\beta\left(\left(\frac{\partial\nu_{d+1}}{\partial u_1}(u)\right)^T,\cdots,\left(\frac{\partial\nu_{d+1}}{\partial u_d}(u)\right)^T\right),\end{aligned}$$

从 E 到 $\theta(T_xX)$ 的映射 $e\mapsto e^T$ 在 6.8.5 已经定义.

另外 (参见 6.7.28), 考虑到 $\zeta(x,v)=\theta_v^{-1}(v)=\nu_{d+1}(u)$ (参见 6.7.27), 我们有

$$\begin{aligned}&Ⓗ(x,v)\left(\frac{\partial h}{\partial u_1}(u),\cdots,\frac{\partial h}{\partial u_d}(u),\nu_{d+2}(u),\cdots,\nu_n(u)\right)\\&=(\operatorname{int}(\zeta)\cdot\Xi)(x,v)\left(\frac{\partial h}{\partial u_1}(u),\cdots,\frac{\partial h}{\partial u_d}(u),\nu_{d+2}(u),\cdots,\nu_n(u)\right)\\&=(-1)^d\Xi\left(\frac{\partial h}{\partial u_1}(u),\cdots,\frac{\partial h}{\partial u_d}(u),\nu_{d+1}(u),\nu_{d+2}(u),\cdots,\nu_n(u)\right)\\&=(-1)^d\beta\left(\frac{\partial h}{\partial u_1}(u),\cdots,\frac{\partial h}{\partial u_d}(u)\right).\end{aligned}$$

与 6.8.17 比较得到

6.8.18
$$(\gamma^*\Sigma)(x,v)=\frac{\beta\left(\left(\frac{\partial\nu_{d+1}}{\partial u_1}(u)\right)^T,\cdots,\left(\frac{\partial\nu_{d+1}}{\partial u_d}(u)\right)^T\right)}{\beta\left(\frac{\partial h}{\partial u_1}(u),\cdots,\frac{\partial h}{\partial u_d}(u)\right)}Ⓗ(x,v).$$

由于这里我们取 $t=(1,0,\cdots,0)$, 在 6.8.12 中也取此 t, 即得

6.8.19
$$W_d(x,v)\frac{\beta\left(\left(\frac{\partial\nu_{d+1}}{\partial u_1}(u)\right)^T,\cdots,\left(\frac{\partial\nu_{d+1}}{\partial u_d}(u)\right)^T\right)}{\beta\left(\frac{\partial h}{\partial u_1}(u),\cdots,\frac{\partial h}{\partial u_d}(u)\right)},$$

故得引理所述的等式.

6.9 管形的体积 III

我们打算计算 $TUB^{\varepsilon}X$ 的体积, 其中 ε 充分小, 以便 can 是一个嵌入: 参见 2.7.12.

沿用 6.7 和 6.8 的记号, 并且根据 6.7.16. 我们得到

$$\mathrm{Vol}\,(TUB^{\varepsilon}X) = \int_{N^{\varepsilon}X} \mathrm{can}^{*}\Delta_0 = \int_{N^{\varepsilon}X} G\cdot\Delta = \int_X \left(\int_{N_x^{\varepsilon}X} G(x,v)\varepsilon_x\right)\delta$$

而 can : $N^{\varepsilon}X \to TUB^{\varepsilon}X$ 是微分同胚, 故 G 在 NX 上非零. 另外, 我们知道在每个 $N_x^{\varepsilon}X$ 上

$$G(x,0) = 1 = \sum_{i=0}^{d} W_i(x,0)$$

(因为这时只留下 $W_0(x,0)$ 这一项). 于是在连通的 $N_x^{\varepsilon}X$ 上, 保持 $\sum_{i=0}^{d} W_i > 0$, 从而根据 6.8.11, 我们有

6.9.1 $$\text{在}N^{\varepsilon}X\text{上}, G(x,v) = \sum_{i=0}^{d} W_i(x,v) > 0.$$

随之

$$\mathrm{Vol}\,(TUB^{\varepsilon}X) = \int_X \left(\sum_{i=0}^{d}\int_{N_x^{\varepsilon}} W_i(x,v)\varepsilon_x\right)\delta.$$

剩下的是计算

$$\int_{N_x^{\varepsilon}} W_i(x,v)\varepsilon_x.$$

为此把 N_xX 当作 $\mathbf{R}^{n-d}$, 而采用在 6.5.9 见识过的做法. 据此, 由

$$(r,v) \mapsto r\cdot v$$

定义微分同胚 $f:\mathbf{R}_+^* \times NU_xX \to N_xX - \{0\}$.

如果用 τ_x 表示 NU_xX(欧几里得空间 E 的单位球面, 参见 6.7.17) 的典范密度, 则

6.9.2 $$(f^*\varepsilon_x)(r,v) = r^{n-d-1}\mathrm{d}\,r\wedge\tau_x,$$

于是

6.9.3 $$\int_{N_x^{\varepsilon}X} W_i(x,v)\varepsilon_x = \int_0^{\varepsilon}\int_{NU_xX} r^{n-d-1}W_i(r,f(r,v))\mathrm{d}\,r\wedge\tau_x.$$

而 $W_i(x, f(r,v)) = W_i(x, rv)$, 既然 W_i 在 N_xX 上是 i 次齐次的, 故 $W_i(x, rv) = r^i W_i(x, v)$, 随之

$$\int_{N_x^\varepsilon X} W_i(x,v)\varepsilon_x = \int_0^\varepsilon r^{n-d-1+i}\mathrm{d}\, r \int_{NU_xX} W_i(x,v)\cdot\tau_x,$$

于是

6.9.4
$$\int_{N_x^\varepsilon X} W_i(x,v)\varepsilon_x = \frac{\varepsilon^{n-d+i}}{n-d+i}\int_{NU_xX} W_i(x,v)\tau_x.$$

6.9.5 注释

由于 W_i 的定义和 τ_x 的等距不变性, 我们有

$$\int_{NU_xX} W_i(x,v)\tau_x = \int_{NU_xX} W_i(x,-v)\tau_x = (-1)^i \int_{NU_xX} W_i(x,v)\tau_x,$$

如果 i 是奇数, 则

$$\int_{NU_xX} W_i(x,v)\tau_x = 0.$$

如果 i 是偶数,引入

6.9.6 定义

设 X 是 n 维欧几里得向量空间的 d 维子流形. 对于 $i = 0, 1, \cdots, \left[\dfrac{d}{2}\right]$, 由

$$K_{2i}(x) = \int_{NU_xX} W_{2i}(x,v)\cdot\tau_x$$

定义函数 $K_{2i} \in C^\infty(X)$. 这个函数称为 (E, X) 的第 $2\,i$ 个**外尔曲率**.

6.9.7 同 4.2.20 关系

设 S 是一个曲面 ($\mathbf{R}^3$ 的 2 维子流形). 沿用 4.2.20 的记号, 我们有 (参见习题 6.10.21):

$$\begin{cases} 在\ m \in S \quad rt - s^2 \neq 0 \Leftrightarrow K_2(m) \neq 0; \\ 在\ m \in S \quad rt - s^2 > 0 \Leftrightarrow K_2(m) > 0; \\ 在\ m \in S \quad rt - s^2 < 0 \Leftrightarrow K_2(m) < 0. \end{cases}$$

事实上, 我们所知晓的远比这些更多更好: $K_2(m)$ 是 S 在 m 的高斯曲率, 将在 10.5 定义这个曲率. 这个相等关系由 6.8.15 和 10.6.2.2 立即推知. 量 $K = K_2$ 的一个引人瞩目的性质是: 它仅依赖 S 的内蕴度量 (参见 10.3.1, 黎曼度量) 而与 S 嵌入到 $\mathbf{R}^3$ 内的方式无关: 参见 10.5.3.2 和 10.6.2.1. 甚至对于一小块开集 (但要相对紧致的) S, 我们发现

$$\mathrm{Vol}\,(TUB^\varepsilon S) = 2\varepsilon \quad \mathrm{Aire}\,(S) + \frac{4\pi}{\varepsilon^3}\int_S K_2(m)\mathrm{d}\, m$$

即是说这个体积仅仅依赖于 S 的面积和 K_2 在 S 上的积分. 所有的这些量仅仅依赖 S 的内蕴度量, 而与它嵌入的方式无关. 提请读者注意在 6.9.16,7.5.5 和 11.7.1 还会发现更好的结果.

6.9.8 基本知识的注释

我们刚才看到如果 $d=2$ 且 $n=3$, 外尔曲率 K_2 只依赖由 $\mathbf{R}^n$ 在 X 上用到的内蕴度量 (黎曼度量). 而事实上这是赫曼 · 外尔在 [17] 中的一个普遍且值得注意的结果: 对于任意的 $d,n,i=1,2,\cdots,[d/2]$ 和 $\mathbf{R}^n$ 的子流形 X, 量 K_{2i} 只依赖 X 上由它在 $\mathbf{R}^n$ 内的嵌入所定义的黎曼结构, 但不依赖嵌入本身. 更准确地说来, 如果 R 表示对于这个黎曼度量的 X 的曲率张量 (这是一个 4 阶张量), 则 $K_{2i}(m)$ 是一个数, 它等于在曲率张量 $R(m)$ 上的 i 次普适多项式. 当 d 是偶数, K_d 作为被积函数出现在一个公式中, 该公式把高斯 – 博内公式 11.7.1 推广到了所有偶数阶的黎曼流形. 推广后的公式, 称为艾伦多弗 – 外尔 – 芬切尔 – 高斯 – 博内 – 陈公式 (参见 7.5.7), 在得知陈的内蕴证明之前, 首先借助外尔的一个结果证明. 至于 K_{2i}, 可以参考 [47], 而关于管形的体积, 还可以参考 [118].

现在回到管形的体积, 我们陈述

6.9.9 定理

设 X 是 n 维欧几里得空间 E 的 d 维子流形, $TUB^\varepsilon X$ 的体积是 ε 的一个多项式:

$$\operatorname{Vol}(TUB^\varepsilon X)=\sum_{i=0}^{[d/2]} a_{2i}\varepsilon^{n-d+2i},$$

其中

$$a_{2i}=\frac{1}{n-d+2i}\int_X K_{2i}\cdot\delta.$$

特别地, 有 $a_0=\operatorname{Vol}(B_{n-d}(0,1))\times\operatorname{Vol}(X)$.

事实上, 我们已经得到.

$$\operatorname{Vol}(TUB^\varepsilon X)=\sum_{i=0}^{d}\int_X\left(\frac{\varepsilon^{n-d+i}}{n-d+i}\int_{NU_xX}W_i(x,v)\tau_x\right)\delta,$$

再利用 6.9.5 和 6.9.6 即知 ε 的给定多项式表达了这个体积. 特别地, 有

$$a_0=\frac{1}{n-d}\int_X K_0(x)\cdot\delta.$$

根据 6.8.11 ($W_0(x,v)=1$), 有

$$K_0(x)=\int_{NU_xX}W_0(x,v)\cdot\tau_x=\int_{NU_xX}\tau_x.$$

而 NU_xX 是 N_xX 的单位球面, 由 6.5.6.1 得到

$$\frac{K_0(x)}{n-d}=\operatorname{Vol}(B_{n-d}(0,1)),\quad \text{于是}\quad a_0=\operatorname{Vol}(B_{n-d}(0,1))\int_X\delta.$$

由于 $\varepsilon^{n-d}\mathrm{Vol}\,(B_{n-d}(0,1)) = \mathrm{Vol}\,(B_{n-d}(0,\varepsilon))$, 故和式的第一项是 $\mathrm{Vol}\,(X)\cdot\mathrm{Vol}\,(B_{n-d}(0,\varepsilon))$.

6.9.10 推论

设 X 是 n 维欧几里得空间 E 的 1 维子流形, 则

$$\mathrm{Vol}\,(TUB^{\varepsilon}X) = \mathrm{Vol}\,(B_{n-1}(0,\varepsilon))\cdot \mathrm{Long}\,(X).$$

事实上, $i=0$ 是唯一的 $\leqslant [1/2]=0$ 的整数.

6.9.11 例子

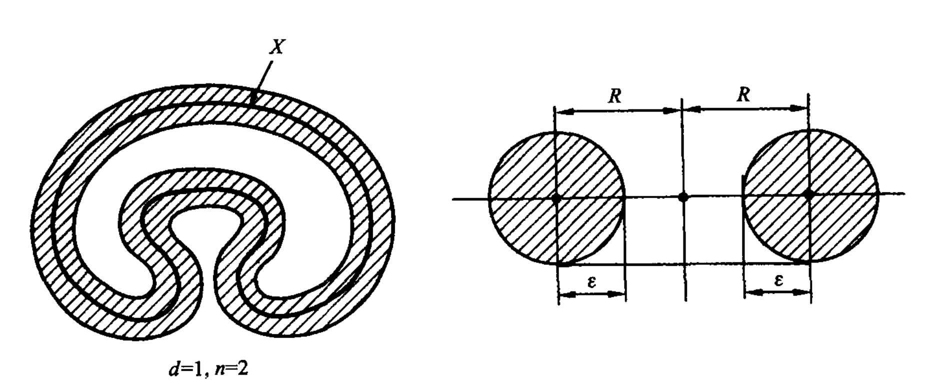


图 6.9.11

6.9.11.1 在 $\mathbf{R}^2$ 里, X 是一条曲线: $d=1$ (如果 $d=0$, 结果是平凡的). 推论 6.9.10 表明

$$\mathrm{Aire}\,(TUB^{\varepsilon}X) = 2\varepsilon\cdot \mathrm{Long}\,(X).$$

6.9.11.2 完整旋转环面的体积

如果 X 是 $\mathbf{R}^3$ 的一个半径为 R 的圆周, 得到完整旋转环面 $TUB^{\varepsilon}X$, 由推论 6.9.10 算出 $\mathrm{Vol}\,(TUB^{\varepsilon}X) = 2\pi^2\cdot R\cdot\varepsilon^2$.

6.9.12 推论

设 X 是 n 维欧几里得空间 E 的 $n-1$ 维子流形, 则

$$\mathrm{Vol}\,(X) = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\,(\mathrm{Vol}\,(TUB^{\varepsilon}X))}{\mathrm{d}\,\varepsilon}(0).$$

第一项是 $a_0\varepsilon$, 其余的项对于 ε 的阶数 $\geqslant 3$, 于是

$$\frac{\mathrm{d}\,(\mathrm{Vol}\,(TUB^{\varepsilon}X))}{\mathrm{d}\,\varepsilon}(0) = a_0 = \mathrm{Vol}\,(X)\cdot \mathrm{Vol}\,(B_1(0,1))$$

而 $\mathrm{Vol}\,(B_1(0,1))=2$, 遂得引理.

6.9.13　例子

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}\,(S^d) &= \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\,(\mathrm{Vol}\,(B_{d+1}(0,1+\varepsilon)-B_{d+1}(0,1-\varepsilon)))}{\mathrm{d}\,\varepsilon}(0)\\ &= \frac{1}{2}\mathrm{Vol}\,(B_{d+1}(0,1))\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,\varepsilon}\left((1+\varepsilon)^{d+1}-(1-\varepsilon)^{d+1}\right)(0)\\ &= (d+1)\mathrm{Vol}\,(B_{d+1}(0,1)).\end{aligned}$$

这就重新发现公式 6.5.6.1.

6.9.14　注释

对于 $X=S^d$, 所有 a_{2i} 非零, 理由是

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}\,(TUB^{\varepsilon}(S^d)) &= \mathrm{Vol}\,(B_{d+1}(0,1+\varepsilon))-\mathrm{Vol}\,(B_{d+1}(0,1-\varepsilon))\\ &= B_{d+1}(0,1)\left[(1+\varepsilon)^{d+1}-(1-\varepsilon)^{d+1}\right]\\ &= 2B_{d+1}(0,1)\sum_{i=0}^{[d/2]}\binom{d+1}{2i}\varepsilon^{2i},\end{aligned}$$

这表明 6.9.9 中的多项式的项一般非零.

现在解释当 d 是偶数时的项 a_d.

6.9.15　命题

如果 E 是定向的, 而 Σ 表示其单位球面 $S(E)$ 的典范体积形式, γ 是从 NUX 到 $S(E)$ 的高斯映射, 则

$$a_d=\frac{1}{n}\int_X K_d\delta=\frac{1}{n}\int_{NUX}\gamma^*\Sigma=\frac{1}{n}\int_{NUX}W_d\Psi,$$

其中的积分在 NUX 上计算, 而 NUX 由 E 的定向而定向.

我们知道 (参见 6.7.19)

$$\int_{NUX}W_d\Psi=\int_X\left(\int_{NU_xX}W_d\cdot\tau_x\right)\delta=\int_X K_d\delta=n\cdot a_d.$$

又由于 $\Psi=|\textcircled{H}|$, 根据 6.8.15, 我们有

$$\int_{NUX}W_d\Psi=\int_{NUX}W_d\textcircled{H}=\int_{NUX}\gamma^*\Sigma.$$

6.9.16　推论

如果 X 是 n 维欧几里得空间 E 的 2 维子流形, 则

$$\mathrm{Vol}\,(TUB^{\varepsilon}X)=\varepsilon^{n-2}\mathrm{Vol}\,(B_{n-2}(0,1))\cdot\mathrm{Aire}\,(X)+\frac{\varepsilon^n}{n}\int_{NUX}\gamma^*\Sigma.$$

在第七章, 将知道 $\int_{NUX}\gamma^*\Sigma=$ 整数 $\times\,\mathrm{Vol}\,(S^{n-1})$, 其中的整数等于 X 的欧拉 - 庞加莱示性数. 这对于曲面情形 ($\dim X=2$) 提供了完整而简明的回答. $\mathrm{Vol}\,(TUB^{\varepsilon}X)$ 仅依赖 ε, Aire(X)和 $\chi(X)$ 而不依赖 (E,X) 这一事实, 委实令人惊叹 (参见 11.7.1).

6.10 习　题

6.10.1　给定 $f \in C^2(\mathbf{R}^2)$ 和 $\mathbf{R}^2$ 的一个紧致带边区域 D, 设 $f|_{\partial D} = 0$, 证明公式

$$\int_D f\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\mathrm{d}\,x \wedge \mathrm{d}\,y = -\int_D \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}\,x \wedge \mathrm{d}\,y,$$

并且由此推出如果在 D 上 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$, 则 $f|_D = 0$.

6.10.2

I

设 $b : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ 是映射

$$(x, y, z, t) \mapsto (p, q, r) = (2(xz + yt), 2(-xt + yz), -x^2 - y^2 + z^2 + t^2),$$

而 a 是 b 在 $S^3 \subset \mathbf{R}^4$ 的限制. 给定 $S^2 \subset \mathbf{R}^3$ 的典范体积形式

$$\mu = (p\mathrm{d}\,q \wedge \mathrm{d}\,r + q\mathrm{d}\,r \wedge \mathrm{d}\,p + r\mathrm{d}\,p \wedge \mathrm{d}\,q)|_{S^2}.$$

1°　是否 $a \in C^\infty(S^3; S^2)$?

2°　计算 $\lambda = a^*\mu$. 应当得到 $\lambda = 4(\mathrm{d}\,x \wedge \mathrm{d}\,y + \mathrm{d}\,z \wedge \mathrm{d}\,t)$. 计算有些冗长; 必须恰到好处地利用以下事实:

$$(x^2 + y^2 + z^2 + t^2)|_{S^3} = 1 \quad 和 \quad (x\mathrm{d}\,x + y\mathrm{d}\,y + z\mathrm{d}\,z + t\mathrm{d}\,t)|_{S^3} = 0.$$

3°　证明如果 $\theta = (-y\mathrm{d}\,x + x\mathrm{d}\,y - t\mathrm{d}\,z + z\mathrm{d}\,t)|_{S^3}$, 则 $\lambda = 2\mathrm{d}\,\theta$. 计算 $\lambda \wedge \theta$, 再计算 $\displaystyle\int_{S^3} \lambda \wedge \theta$.

II

现在设 $f \in C^\infty(S^3; S^2)$ 是任意的无穷次可微的从 S^3 到 S^2 内的函数, $\beta \in \Omega^2(S^2)$ 是 S^2 上的 2- 微分形式, 而 $\alpha = f^*\beta$.

1) 证明存在 $\xi \in \Omega^1(S^3)$, 使得 $\mathrm{d}\,\xi = \alpha$.

2) 对于给定的 f, 考虑所有满足 $\displaystyle\int_{S^2} \beta = 1$ 的 $\beta \in \Omega^2(S^2)$ 和所有满足 $\mathrm{d}\,\xi = \alpha$ 的 $\xi \in \Omega^1(S^3)$. 证明 $\displaystyle\int_{S^3} \alpha \wedge \xi$ 只依赖 f, 而不依赖 β 和 ξ. 记之为 $\gamma(f)$ (其中 $\gamma(f)$ 称之为 f 的霍普夫不变量)

3) 当 f 不是满射时, $\gamma(f)$ 等于什么?

4) 对于 I 的映射 a 计算 $\gamma(a)$.

事实上, γ 总是一个整数: 参见 [13], 151 页.

6.10.3　指出如果对于所有 $x \in \overline{B(0,1)}$, 6.3.7 的 $\xi(x) \neq 0$, 则可以构造一个映射 f 违反 6.3.5 的结论. 由此给 6.3.7 一个证明.

6.10.4　在连续 (不必可微) 的情形下证明 6.3.5, 6.3.7 和 6.3.8. (利用魏尔斯特拉斯定理, 以便用多项式逼近紧致集上的一个连续函数.)

6.10.5　设 X, Y 是两个紧致流形. 以自然的方式构造一个映射

$$F: \sum_{p+q=r} R^p(X) \otimes R^q(Y) \to R^r(X \times Y),$$

其中 R 是德拉姆群, 而 $\otimes$ 是张量积. 证明 F 是单射.

6.10.6　给定使得 $\operatorname{Im} z > 0$ 的复数 z 的集合 D, 把它看作 $\mathbf{R}^2$ 的开集, 而 G 是同形映射 $z \to \dfrac{az+b}{cz+d}$ 的集合, 其中 a, b, c, d 使得 $ad - bc \neq 0$.

a) 证明对于 G 的所有 f, $f(D) = D$.

b) 证明所有 2 阶微分形式 ω, 如果对于所有 $f \in G$ 有 $f^*\omega = \omega$, 则正比例于 $\dfrac{\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y}{y^2}$ (按照惯例, $z = x + \mathrm{i}\,y$).

c) 设 Δ 是 D 的紧致区域, 使得 $\partial\Delta$ 是圆心在直线 $y = 0$ 上的三个圆弧 AB, BC, CA 的并集. 证明

$$\int_\Delta \frac{\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y}{y^2} = \pi - (A + B + C),$$

其中, A, B, C 是准三角形 ABC 的角的度量.

6.10.7　设 D 是定向欧几里得空间 E 的带边区域, 而 $\nu(x)$ 是在 $x \in \partial D$ 的外出单位法向量. 证明存在 $\varepsilon > 0$, 使得

$$\forall t \in (-\varepsilon, 0), \quad x + t \cdot \nu(x) \in \overset{\circ}{D}.$$

6.10.8　给定 $\mathbf{R}^3$ 的球面 S^2, n 是其北极, 而 $s: S^2 - \{n\} \to \mathbf{R}^2$ 是北极的球极投影. 明晰计算 $s(x, y, z)$. 如果 $\omega_0 = \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ 是 $\mathbf{R}^2$ 的典范体积形式, σ 是 S^2 的典范体积形式, 把 $s^*\omega_0$ 表示为 σ 的函数.

6.10.9　借助映射

$$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]^{n-1} \times [-\pi, \pi]: (\theta^1, \cdots, \theta^n) \mapsto (\zeta^1, \cdots, \zeta^{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1}$$

计算 S^d 的体积, 其中

$$\begin{aligned}
\xi^1 &= \sin\theta^1, \\
\xi^2 &= \cos\theta^1 \sin\theta^2, \\
&\ \ \vdots \\
\zeta^n &= \cos\theta^1 \cos\theta^2 \cdot \ \cdots \ \cdot \cos\theta^{n-1} \cdot \sin\theta^n, \\
\zeta^{n+1} &= \cos\theta^1 \cos\theta^2 \cdot \ \cdots \ \cdot \cos\theta^{n-1} \cdot \cos\theta^n.
\end{aligned}$$

6.10.10　写出 6.5.4 的证明细节.

6.10.11 给定两个曲面

$$PE = \{(x, y, x^2 + y^2) : x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}, PH = \{(x, y, x^2 - y^2) : x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\},$$

(椭圆抛物面和双曲抛物面). 设 D 是平面的一个紧致区域. 证明对于

$$p : \mathbf{R}^3 \ni (x, y, z) \mapsto (x, y) \in \mathbf{R}^2$$

有

$$\mathrm{Vol}\,(PE \bigcap p^{-1}(\mathring{D})) = \mathrm{Vol}\,(PH \bigcap p^{-1}(\mathring{D})).$$

当 $D = \bar{B}(0, 1)$ 时明晰计算这个量.

6.10.12 把圆扇形

$$\{(r \cdot \cos\theta, r \cdot \sin\theta) : 0 \leqslant r \leqslant R, -T \leqslant \theta \leqslant T\}$$

的重心明晰地表示为 $R \in \mathbf{R}_+^*$ 和 $T \in (0, \pi)$ 的函数.

6.10.13 颜料悖论

给定一个实数 α, 考虑 $\mathbf{R}^3$ 的一个开集:

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : z < 0 \text{ 并且 } (x^2 + y^2) \leqslant (-z)^{2\alpha}\}.$$

计算 $\mathrm{Vol}(D)$ 和 $\mathrm{Aire}(\partial D)$. 证明如果 $\alpha \in [-1, -1/2)$, 则

$$\mathrm{Vol}\,(D) < \infty \quad \text{而} \quad \mathrm{Aire}\,(\partial D) = \infty.$$

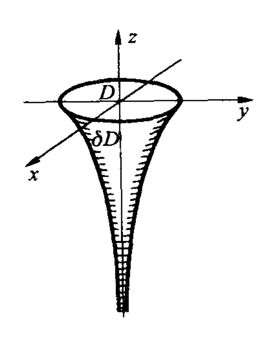


图 6.10.13

然而如果把 D 看作一个无穷漏斗, 往里面注入有限体积的颜料, 有无穷面积的边界 ∂D 将被这有限体积的颜料着色.

6.10.14 古尔丁第一定理

设 $H^+ = \{(t, z) \in \mathbf{R}^2 : t > 0\}$, S^1 是 $\mathbf{R}^2$ 的典范圆周, 而 f 是映射

$$H^+ \times S^1 \to ((t, z), u) \mapsto (t \cdot u, z) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R} = \mathbf{R}^3 \text{ (柱坐标映射)}.$$

1) 证明 f 是从 $H^+ \times S^1$ 到 $\mathbf{R}^3 - Z$ 的微分同胚, 这里 Z 表示 $x^{-1}(0) \bigcap y^{-1}(0)$ (z 轴).

2) 设 ω_0 是 $\mathbf{R}^3$ 的典范体积形式, σ 是 S^1 的典范体积形式, 而 τ 是 $\mathbf{R}^2$ 的典范体积形式在 H^+ 上的限制: $\tau = \mathrm{d}\,t \wedge \mathrm{d}\,z$. 证明 $f^*\omega_0 = -t(\tau \wedge \sigma)$.

3) 设 D 是 H^+ 上的紧致区域; 它对应 $\mathbf{R}^3$ 的旋转区域 $f(D \times S^1)$. 证明

$$\mathrm{Vol}\,(f(D \times S^1)) = 2\pi \cdot \delta \cdot \mathrm{Aire}\,(D),$$

其中 δ 表示 D 的重心到 t 轴的距离. 应用: 旋转环形的体积和半圆盘的重心.

6.10.15 古尔丁第二定理

a) 设 C 是一个欧几里得仿射空间的紧致 1 维子流形, 而 δ 是它的典范密度. 跟 6.5.14 一样, 证明

$$\frac{\displaystyle\int_C \mathrm{id}_E \cdot \delta}{\displaystyle\int_C \delta}$$

只依赖于 C, 它确定仿射空间的一个点, 称为曲线 C 的重心.

b) 保留 6.10.14 的记号, 设 $C \subset H^+$ 是 H^+ 的 1 维紧致子流形. 证明 $f(C \times S^1)$ 是 $\mathbf{R}^3$ 的 2 维子流形, 并且

$$\mathrm{Aire}\,(f(C \times S^1)) = 2\pi \cdot \delta \cdot \mathrm{Long}\,(C),$$

其中 δ 表示 C 的重心到 t 轴的距离.

应用: 1) 旋转环面的面积;

2) 求半圆周的重心的位置.

6.10.16 设 f 是 $\mathbf{R}^n$ 的比例系数为 λ 的位似变换, 而 $X \subset \mathbf{R}^n$ 是一个 d 维子流形. 证明

$$\mathrm{Vol}\ (f(X)) = \lambda^d \cdot \mathrm{Vol}\,(X).$$

6.10.17 设 V 和 W 分别是欧几里得空间 E 和 F 的子流形. 证明

$$\mathrm{Vol}\,(V \times W) = \mathrm{Vol}\,(V) \times \mathrm{Vol}\,(W).$$

6.10.18 对于根据命题 6.6.8, 从 S^d 的典范密度得到的 $P^d(\mathbf{R})$ 的密度, 计算 $P^d(\mathbf{R})$ 的体积.

6.10.19 计算 5.9.11 的默比乌斯带的面积.

6.10.20 计算 S^2 在映射

$$(x, y, z) \mapsto (x^2, y^2, z^2, \sqrt{2}yz, \sqrt{2}zx, \sqrt{2}xy)$$

下的像的面积.

6.10.21 证明 6.9.7.

6.10.22 计算 $\mathrm{Vol}(\partial(TUB^\varepsilon X))$ =$\mathrm{Vol}(\mathrm{can}\,(NU^\varepsilon X))$ (对于充分小的 ε).

6.10.23 对于 $S^d \subset \mathbf{R}^{d+1}$ 的典范密度和作为 S^d 上的函数的 $\mathbf{R}^{d+1}$ 的典范坐标 $x_1, \cdots, x_{d+1}$, 计算

$$\int_{S^d} x_1^{\alpha_1} \cdots x_{d+1}^{\alpha_{d+1}} \cdot \sigma,$$

其中 $\alpha_i (i = 1, \cdots, d+1)$ 是正整数. 如果熟悉伽马函数, 对于任意实数计算这个积分值.

6.10.24 确定半球

$$\left\{(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n : x_n\geqslant 0,\sum_{i=1}^{n}x_i^2\leqslant 1\right\}$$

的重心坐标. 当 n 趋于无穷时, 关于它的坐标 x_n 可以说什么?

6.10.25 不用坐标证明 6.5.9.

6.10.26 计算 8.7.17 的内旋轮线和外旋轮线和定圆所围的面积.

6.10.27 求球台的体积和侧面积. 球台是 $\mathbf{R}^3$ 的一个球体的夹在两个平行平面间的部分. 一个特别的推论是球台的侧面积只依赖两个平面间的距离.

6.10.28 计算半径相等的两个圆柱的公共部分的体积, 它们的轴相交成角 α. 计算半径相等的三个圆柱的公共部分的体积, 它们的轴相交并且两两垂直.

6.10.29 计算旋转抛物面和与其轴不平行的平面所界定的紧致集的体积

6.10.30 如图 6.10.30, 计算圆柱楔形的体积和侧面积.

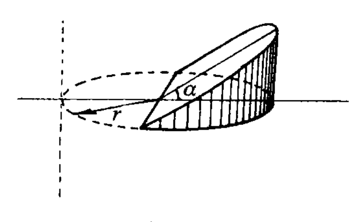


图 6.10.30

6.10.31 计算维维亚尼窗的体积, 所谓维维亚尼窗, 即 $\mathbf{R}^3$ 由

$$\{(x,y,z):x^2+y^2+z^2\leqslant 1\text{并且}x^2+y^2\leqslant x\}$$

定义的集合.

6.10.32 **三水平公式**

在 3 维欧几里得空间内考虑一个由一个侧面和对于适当的 z 轴高度为 a,b 的两个平行平面 $H(a),H(b)$ 界定的紧致集 K. 其中 K 被高度为 z 的平面 $H(z)$ 截得的截面 $K\bigcap H(z)$ 的面积记作 $S(z)$, 假定 $S(z)$ 是 z 的至多三阶的多项式; 证明 K 的体积由所谓三水平公式

$$\frac{b-a}{6}\left[S(a)+4S\left(\frac{a+b}{2}\right)+S(b)\right]$$

表示. 重新发现 6.10.27 的球台的体积. 应用到锥体. 证明公式当 K 的侧面是直纹曲面时是可以应用的.

6.10.33 计算方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

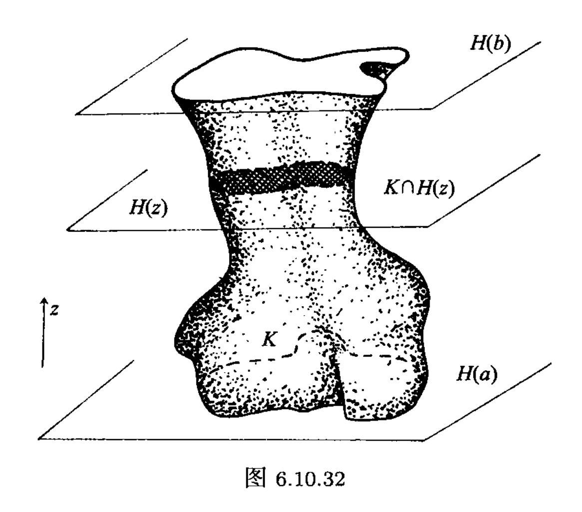


图 6.10.32

的旋转椭球面所围的体积.

第七章　映射度理论

借助一个局部引理, 我们证明了一个定向连通紧致流形的最大阶的德拉姆群典范地同构于 $\mathbf{R}$ (7.2.1). 从这个事实立即得到莫泽定理, 这个定理断言有相同积分的两个体积形式通过微分同胚从一个拉回到另一个.

然而德拉姆群的这个计算结果的本质的价值在于: 对于两个定向连通紧致的有相同维数的流形间的一个态射 $f: X \to Y$, 对应一个称为这个态射的映射度的实数, 根据定义, 它是作为微分形式积分的商来计算的 (7.3.1.1°). 映射度的理论之所以色彩纷呈, 是由于同一个映射度可以用迥然不同的几何的方式计算, 这就是数一数 f 的正则值的逆像的点的个数 (带上适当的符号) (7.3.1.2°); 一个特殊的推论是映射度必然是整数. 还有映射度对于连续形变是不变的 (7.4.3).

从这些结果衍生许多推论, 它们涉及球面上的向量场 (7.4.6), 两条曲线的交错 (7.4.7), 向量场在一个孤立零点的分析 (7.4.15), 以及与单位球上一个内向量场关联的一个公式 (7.4.18).

本章最后致力于管形 (当其维数是偶数时) 体积公式的最后一项的计算. 这一项一方面忽略一个数值系数, 表示为关联到子流形的高斯法映射的映射度; 另一方面这同一个映射度 (忽略一个普适数值系数) 表示为流形的欧拉示性数 (7.5.4). 这两个量之间的相等正是高斯 - 博内公式 (7.5.4). 在一个曲面的情形, 由这些结果推知管形的体积总可以明晰地计算 (7.5.5).

我们打算证明 (定理 7.2.1) 如果 X 是 d 维连通定向紧致流形, 则它的德拉姆群 $R^d(X)$ 典范地同构于 $\mathbf{R}$. 然后给出这个结果的应用.

本章假定所有有关对象是 C^∞ 类的

7.1 预备引理

7.1.1 引理

设 $Q_d=(0,1)^d$ 是 $\mathbf{R}^d$ 的单位方体, $\beta\in\Omega^d(\mathbf{R}^d)$ 是一个 d- 微分形式, 使得 $\operatorname{supp}\beta\subset Q_d$, 并且 $\int_{Q_d}\beta=0$. 则存在 $\gamma\in\Omega^{d-1}(\mathbf{R}^d)$, 使得 $\operatorname{supp}\gamma\subset Q_d$, 并且 $\beta=\mathrm{d}\gamma$.

7.1.2 注释

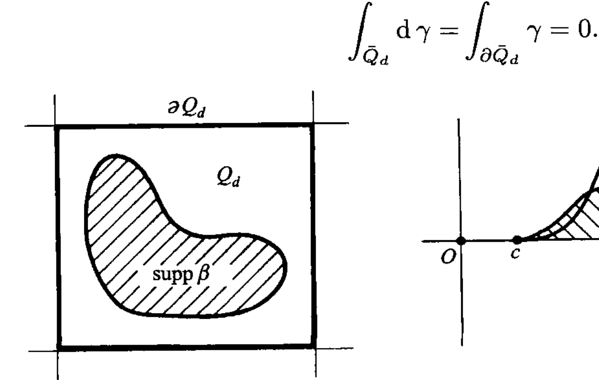
7.1.2.1 由于 β 是 d 阶的, 必有 $\mathrm{d}\beta=0$($\mathbf{R}^d$ 的 $d+1$ 阶微分形式), 把庞加莱引理 (参见 5.6.1) 应用到 Q_d 得到: 存在 $\gamma\in\Omega^{d-1}(\mathbf{R}^d)$, 使得 $\beta=\mathrm{d}\gamma$, 但是不知道是否有 $\operatorname{supp}\gamma\subset Q_d$? 此外,

7.1.2.2 条件 $\int_{Q_d}\beta=0$ 是必要的, 因为如果 γ 使得 $\beta=\mathrm{d}\gamma$, 并且 $\operatorname{supp}\gamma\subset Q_d$, 因为 $\operatorname{supp}\beta\subset Q_d$, 所以

$$\int_{Q_d}\beta=\int_{\bar{Q}_d}\beta,$$

在 Q_d 上利用斯托克斯定理 (参见 6.2.1 和 6.2.2 末尾), 这个积分 (由于 $\operatorname{supp}\gamma\bigcap\partial\bar{Q}_d=\varnothing$) 等于

$$\int_{\bar{Q}_d}\mathrm{d}\gamma=\int_{\partial\bar{Q}_d}\gamma=0.$$



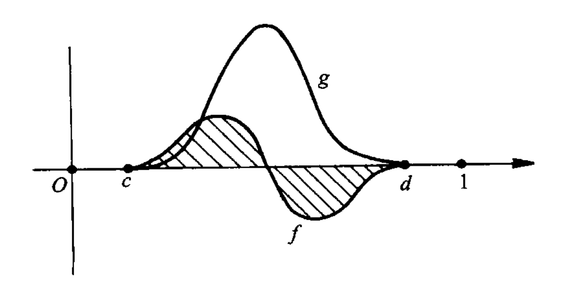


图 7.1.2

7.1.3 引理的证明

利用对于 d 的归纳法进行证明.

(i) 如果 $d=1$.

设 $Q_1=(0,1), \beta\in\Omega^1(\mathbf{R}^d)$ 的支集在 $(0,1)$ 内, 其形式为

$$\beta=f(t)\mathrm{d}\,t,\quad \text{其中}\quad f\in C^\infty((0,1);\mathbf{R}).$$

还假定 $\int_{Q_1}\beta=\int_0^1 f(t)\mathrm{d}\,t=0$. 我们需要求函数 $\gamma\in\Omega^0(\mathbf{R})=C^\infty(\mathbf{R})$, 使得 $\mathrm{d}\,\gamma=\beta$, 即确定一个函数 g, 使得 $f(t)\mathrm{d}\,t=g'(t)\mathrm{d}\,t$. 为此令

7.1.4
$$g(t)=\int_0^t f(s)\mathrm{d}\,s,$$

由于 f 连续, 这个函数必然对于所有 t 有定义.

f 的支集是含于 $(0,1)$ 的闭集, 必有形式 $\operatorname{supp} f\subset[c,d]$, 并且 $0<c\leqslant d<1$, 如果 $t\leqslant c$, 则 $g(t)=0$. 如果 $t\geqslant d$, 则

$$g(t)=\int_0^t f(s)\mathrm{d}\,s=\int_0^d f(s)\mathrm{d}\,s=\int_0^1 f(s)\mathrm{d}\,s=0.$$

故 g 的支集含于 $[c,d]\subset(0,1)$, 又有 $g'(t)=f(t)$, 由此得到

$$g\in C^\infty(\mathbf{R})=\Omega^0(\mathbf{R}).$$

(ii) **归纳**

从 Q_d 到 Q_{d+1} 的过渡. 做下列归纳假设:

7.1.5 (H_d) 对于任意的 $\beta\in\Omega^d(\mathbf{R}^d)$, 只要满足 $\operatorname{supp}\beta\subset Q_d$ 和 $\int_{Q_d}\beta=0$, 则存在 $\gamma\in\Omega^{d-1}(\mathbf{R}^d)$, 使得 $\operatorname{supp}\gamma\subset Q_d$, 并且 $\beta=\mathrm{d}\,\gamma$.

此外, 如果 β 依赖一个参数 $\lambda\in\Lambda$, Λ 是一个有限维向量空间, 映射 $(x,\lambda)\mapsto\beta(x,\lambda)$ 在 $\mathbf{R}^d\times\Lambda$ 是 C^∞ 类的, 则可以选择 γ 依赖 λ, 使得映射 $(x,\lambda)\mapsto\gamma(x,\lambda)$ 是 C^∞ 类的.

(H_1) 为真, 因为如果假定 β 定义在 $\mathbf{R}\times\Lambda$ 上, 映射 $(t,\lambda)\mapsto\beta(t,\lambda)=f(t,\lambda)\mathrm{d}\,t$ 在 $\mathbf{R}\times\Lambda$ 是 C^∞ 类的, 则由 $g(t,\lambda)=\int_0^t f(s,\lambda)\mathrm{d}\,s$ 定义的函数 $g(t,\lambda)$ 在 $\mathbf{R}\times\Lambda$ 上必是 C^∞ 类的, 这可以由积分号 $\int$ 下的求导定理得到 (参见 0.4.8).

(iii) 由 (H_{d-1}) 推出 (H_d).

把 Q_d 表示成 $Q_d=Q_{d-1}\times(0,1)\subset\mathbf{R}^{d-1}\times\mathbf{R}=\mathbf{R}^d$.

设 $(x_1,\cdots,x_{d-1})\in Q_{d-1}, t\in(0,1)$, 那么 $(x_1,\cdots,x_{d-1},t)\in Q_d$. 定义映射

7.1.6 $p:Q_d\to Q_{d-1}:(x_1,\cdots,x_{d-1},x_d)\mapsto(x_1,\cdots,x_{d-1});$

7.1.7 $i_t : Q_{d-1} \to Q_{d-1} \times \{t\} : (x_1, \cdots, x_{d-1}) \mapsto (x_1, \cdots, x_{d-1}, t)$;

7.1.8 $j_t : Q_{d-1} \times \{t\} \to Q_d$ 典范单射.

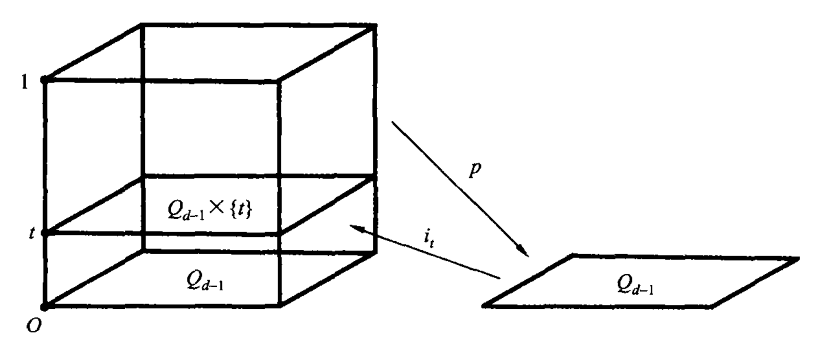


图 7.1.8.1

证明的思路是对于除以 $\mathrm{d}\,x_d$ 后的并且限制在 $Q_{d-1} \times \{t\}$ 上的微分形式 β 利用归纳假设, 再由 i_t^* 转移到 Q_{d-1} 上; 对于每个 $t \in [0,1]$ 这样做, 这就又引入了一个参数, Λ 变成了 $\mathbf{R} \times \Lambda$. 事实上这样得到的在 Q_{d-1} 上的微分形式的积分并不是零; 从该微分形式减去应该减去的, 得到一个微分形式 π_t (它依赖 t), 对于它应用 (H_d). 在 $Q_{d-1} \times \{t\}$ 上寻觅到微分形式 γ_t, 使得 $\pi_t = \mathrm{d}\,\gamma_t$, 把它们粘结为一个单一的微分形式, 稍做修改即得要找的微分形式. 为简单起见, 以下的计算是对于坐标进行的; 其实隐藏了多个拉回映射 p^*, i_t^*, j_t^*.

首先取定一个参照微分形式 $\sigma \in \Omega^{d-1}(\mathbf{R}^{d-1})$, 使得

$$\operatorname{supp}(\sigma) \subset Q_{d-1} \quad \text{并且} \quad \int_{Q_{d-1}} \sigma = 1.$$

现在设 $\beta \in \Omega^d(\mathbf{R}^d)$ 是一个 d- 微分形式, 其支集在 Q_d 内, 并且 $\int_{Q_d} \beta = 0$. 此外还假定 β 依赖一个参数 λ (归纳假设), 映射 $(x, \lambda) \mapsto \beta(x, \lambda)$ 是 C^∞ 的. 微分形式 β 有表示

$$\beta(x, \lambda) = f(x, \lambda)\mathrm{d}\,x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\,x_d, \quad \text{其中的} \quad f(x, \lambda) \in C^\infty(Q_d \times \Lambda; \mathbf{R}).$$

令 $x = (x_1, \cdots, x_{d-1}, t)$, 对于每个 $t \in (0,1)$, 考虑微分形式 $\pi_t \in \Omega^{d-1}(\mathbf{R}^{d-1})$, 其定义是

$$\pi_t(x_1, \cdots, x_{d-1}) = f(x_1, \cdots, x_{d-1}, t; \lambda)\mathrm{d}\,x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\,x_{d-1} - g(t, \lambda)\sigma,$$

其中

$$g(t, \lambda) = \int_{Q_{d-1}} f(x_1, \cdots, x_{d-1}, t; \lambda)\mathrm{d}\,x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\,x_{d-1}.$$

由于根据 σ 的选取, $\int_{Q_{d-1}} \sigma = 1$, 故 $\int_{Q_{d-1}} \pi_t = 0$. 此外由构造过程得知 $\pi_t \in \Omega^{d-1}(\mathbf{R}^{d-1})$, 并且对于参数 t 和 λ 是 C^∞ 的. 而关于支集有

$$\operatorname{supp}\pi_t \subset p((\operatorname{supp} f) \bigcap Q_{d-1} \times \{t\}) \bigcup \operatorname{supp}\sigma \subset Q_{d-1}.$$

于是 (假定 (H_{d-1}) 成立, 并且应用到 $\mathbf{R} \times \Lambda$) 存在 $\gamma_t \in \Omega^{d-2}(\mathbf{R}^{d-1})$, 使得 $\mathrm{d}\,\gamma_t = \pi_t$, 并且 γ_t 的支集在 Q_{d-1} 内.

用下列方式定义微分形式 γ' (总带着参数 λ):

$$\gamma'(x_1, \cdots, x_{d-1}, t; \lambda) = p^*(\gamma_t) \wedge \mathrm{d}\,x_d.$$

为了简化记号, $\mathbf{R}^d$ 内的和 $\mathbf{R}^{d+1}$ 内的第 i 个坐标函数的微分都记作 $\mathrm{d}\,x_i$. 如果

$$\gamma_t(x_1, \cdots, x_{d-1}; \lambda) = \sum u_t(x_1, \cdots, x_{d-1}; \lambda)\mathrm{d}\,x_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}\,x_i} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\,x_{d-1},$$

则

$$\gamma'(x_1, \cdots, x_{d-1}; \lambda) = \sum_i u_t(x_1, \cdots, x_{d-1}; \lambda)\mathrm{d}\,x_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}\,x_i} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\,x_d.$$

形式上有

$$\mathrm{d}\,(\gamma') = \mathrm{d}\,(p^*(\gamma_t) \wedge \mathrm{d}\,x_d) = p^*(\mathrm{d}\,(\gamma_t)) \wedge \mathrm{d}\,x_d = p^*(\pi_t) \wedge \mathrm{d}\,x_d.$$

考虑到所做的等同化:

$$p^*(\pi_t) \wedge \mathrm{d}\,x_d = f(x_1, \cdots, x_{d-1}, t; \lambda)\mathrm{d}\,x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\,x_d - g(t, \lambda)\sigma \wedge \mathrm{d}\,x_d,$$

即

$$\beta = \mathrm{d}\,\gamma' + g(t, \lambda)\sigma(x_1, \cdots, x_{d-1}) \wedge \mathrm{d}\,x_d.$$

如果证明了 $g(t, \lambda)\sigma(x_1, \cdots, x_{d-1}) \wedge \mathrm{d}\,x_d$ 是一个恰当微分形式, 我们就形式上证明了 β 也是一个恰当微分形式, 即存在 $\gamma \in \Omega^{d-1}(\mathbf{R}^d)$, 使得 $\beta = \mathrm{d}\,\gamma$.

令 $\xi(x_1, \cdots, x_{d-1}, t; \lambda) = (-1)^{d-1}\left(\int_0^t g(s, \lambda)\mathrm{d}\,s\right)\sigma$, 由于 σ 在 $\mathbf{R}^{d-1}$ 上是 $d-1$ 阶的, 则 $\mathrm{d}\,\sigma = 0$, 我们得到

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\,\xi(x_1, \cdots, x_{d-1}, t; \lambda) &= (-1)^{d-1} \underbrace{g(t, \lambda)\mathrm{d}\,x_d}_{t \mapsto \int_0^t g(s,\lambda)\mathrm{d}\,s \text{ 的微分}} \wedge \sigma \\ &= g(t, \lambda)\sigma(x_1, \cdots, x_{d-1}) \wedge \mathrm{d}\,x_d.\end{aligned}$$

之所以说是形式上证明了 β 是一个恰当微分形式, 是在下述意义下: 还需要证明, 如果令 $\gamma = \gamma' + \xi$, 则

1°　γ 是 C^∞ 类的;

2°　$\operatorname{supp}\gamma \subset Q_{d-1}$;

3°　γ 对于参数 λ 是 C^∞ 类的.

1° 和 3° 来自假设 (H_{d-1}) 和所进行的计算: 所实施的运算中唯一不平凡的是函数的积分, 积分号下求导的定理可以应用: 参见 0.4.8.

至于 2°, 由于每个 γ_t 的支集在 Q_{d-1} 内, 故 γ' 的支集必定在 $\mathbf{R}\times Q_{d-1}$ 内.

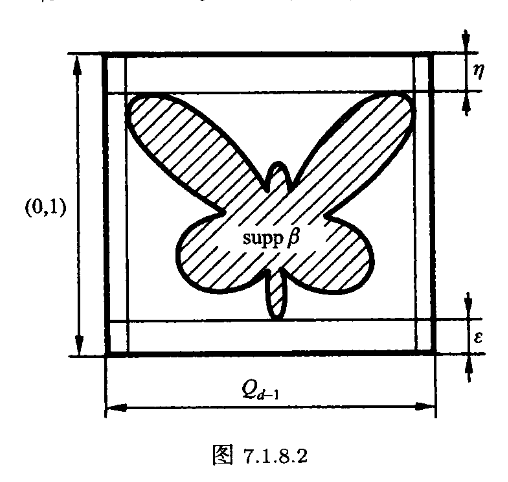


图 7.1.8.2

我们假定了 β 的支集在 Q_d 内, 故存在 $\varepsilon>0, \eta>0$, 使得 $\varepsilon<1-\eta$, 并且 $t\in \mathbf{R}-[\varepsilon,1-\eta]$ 蕴涵:

$$f(x_1,\cdots,x_{d-1},t)=0, \quad \forall x_i \quad (1\leqslant i\leqslant d-1).$$

根据构造过程, 对于这样的 t, 我们有 $\gamma_t=0$, 故 $\operatorname{supp}\gamma'\subset Q_d$. 还留下考虑 ξ 的支集. 而映射 $t\mapsto \displaystyle\int_0^t g(s,\lambda)\mathrm{d}\,s$ 当 $t\leqslant\varepsilon$ 或 $t\geqslant 1-\eta$ 时是零. 事实上, 如果 $t\leqslant\varepsilon$, 结果显然; 如果 $t\geqslant 1-\eta$, 这恰恰是由于 $\displaystyle\int_{Q_d}\beta=0$, 正是这里这个条件发挥作用. 利用富比尼定理, 并且考虑到 g 本身的定义:

$$\begin{aligned}\int_0^t g(s,\lambda)\mathrm{d}\,s &= \int_0^t\left(\int_{Q_{d-1}} f(x_1,\cdots,x_{d-1},s;\lambda)\mathrm{d}\,x_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\,x_{d-1}\right)\mathrm{d}\,s\\ &= \int_0^1\left(\int_{Q_{d-1}} f(x_1,\cdots,x_{d-1},s;\lambda)\mathrm{d}\,x_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\,x_{d-1}\right)\mathrm{d}\,s\\ &= \int_{Q_d} f(\,\cdot\,;\lambda)\mathrm{d}\,x_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\,x_d=\int_{Q_d}\beta=0.\end{aligned}$$

于是

$$\operatorname{supp}\xi\subset\left[\operatorname{supp}\left(t\mapsto\int_0^t g(s,\lambda)\mathrm{d}\,s\right)\right]\times Q_{d-1}\subset[\varepsilon,1-\eta]\times Q_{d-1}\subset Q_d.$$

引理证毕.

7.1.9 引理

设 X 是一个 d 维连通紧致流形, 则德拉姆群 $R^d(X)$ 的维数小于或等于 1.

取定 X 的一个单位分解 $\{(U_i,\varphi_i,\psi_i)\}$, 其中诸 U_i 是坐标卡的开集, 使得 $\varphi_i(U_i)=Q_d$ (如果需要的话修改映射 φ_i, 就可以满足这一要求). 由于 X 是紧致的, 可以假定这个分解关联的覆盖是有限的, 于是有 $X=\bigcup_{i=1}^{N}U_i$.

取定 $\alpha_0\in\Omega^d(X)$, 其支集在 U_1 内, 使得

7.1.10
$$\int_{\mathbf{R}^d}(\varphi_1^{-1})^*\alpha_0=1.$$

我们打算证明对于 $\Omega^d(X)$ 的所有 α, 存在一个数 k 和一个微分形式 $\mu\in\Omega^{d-1}(X)$ 使得 $\alpha=k\alpha_0+\mathrm{d}\,\mu$: 从而 α 等价于 $k\alpha_0$, 由此得到 $\dim\left(R^d(X)\right)\leqslant 1$.

由于 $\alpha=\sum_{i=1}^{N}\psi_i\alpha$, 要确立的断言具有可加性, 只需对于每个 $\psi_i\alpha$ 确立此断言, 而 $\psi_i\alpha$ 的支集在 U_i 内. 取定 i, 设 $m\in U_1,n\in U_i$, 由于 X 是连通的, 则根据 2.2.13, 存在 $\gamma\in C^0([0,1];X)$, 满足 $\gamma(0)=m,\gamma(1)=n.\gamma[0,1]$ 被某些 U_j 覆盖, 设它们是 $U_{j_1}=U_1,U_{j_2}=U_2,\cdots,U_{j_k}=U_i$, 假定这个覆盖满足条件

$$U_{j_{s+1}}\bigcap U_{j_s}\neq\varnothing\quad\forall s=1,\cdots,k-1.$$

对于 $s=1,\cdots,k-1$ 选择微分形式 $\alpha_{j_s}\in\Omega^d(X)$, 使得其支集

$$\operatorname{supp}\alpha_{j_s}\subset U_{j_{s+1}}\bigcap U_{j_s}, \text{并且}\int_{\mathbf{R}^d}(\varphi_{j_s}^{-1})^*\alpha_{j_{s-1}}=1.$$

而 $\alpha_{j_0}=\alpha_0$.

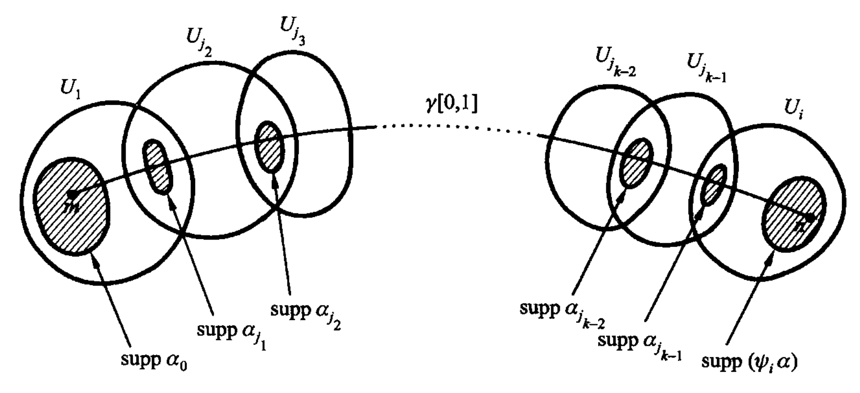


图 7.1.10

在 U_{j_s} 上有两个微分形式 $\alpha_{j_{s-1}}$ 和 α_{j_s}, 由它们得到 $(\varphi_{j_s}^{-1})^*\alpha_{j_{s-1}}$ 和 $(\varphi_{j_s}^{-1})^*\alpha_{j_s}$,

其支集在 Q_d 内. 如果令实数

$$c_s = \int_{\mathbf{R}^d} (\varphi_{j_s}^{-1})^* \alpha_{j_s},$$

则 $\alpha_{j_s} - c_s\alpha_{j_{s-1}}$ 满足下列条件:

$$\operatorname{supp}(\varphi_{j_s}^{-1})^*(\alpha_{j_s} - c_s\alpha_{j_{s-1}}) \subset Q_d \quad \text{和} \quad \int_{\mathbf{R}^d} (\varphi_{j_s}^{-1})^*(\alpha_{j_s} - c_s\alpha_{j_{s-1}}) = 0.$$

故存在 (参见 7.1.1) $\beta_s \in \Omega^{d-1}(\mathbf{R}^d)$, 使得 $\operatorname{supp}(\beta_s) \subset Q_d$, 并且

$$(\varphi_{j_s}^{-1})^*(\alpha_{j_s} - c_s\alpha_{j_{s-1}}) = \mathrm{d}\,\beta_s.$$

令 $\theta_s = \varphi_{j_s}^*(\beta_s)$ (由于 $\varphi_i(U_i) = Q_d$ 和 $\operatorname{supp}(\beta_s) \subset Q_d$, 这是可能的), 则在 X 上,

$$(\alpha_{j_s} - c_s\alpha_{j_{s-1}}) = \mathrm{d}\,\theta_s.$$

最终存在 $\theta_1, \cdots, \theta_k$ 和数 $c_1, \cdots, c_k$, 使得

$$\begin{aligned}
(\alpha_{j_1} - c_1\alpha_0) &= \mathrm{d}\,\theta_1 \\
(\alpha_{j_2} - c_2\alpha_{j_1}) &= \mathrm{d}\,\theta_2 \\
&\vdots \\
(\alpha_{j_{k-1}} - c_{k-1}\alpha_{j_{k-2}}) &= \mathrm{d}\,\theta_{k-1} \\
(\psi_i\alpha) - c_k\alpha_{j_{k-1}} &= \mathrm{d}\,\theta_k.
\end{aligned}$$

于是

$$(\psi_i\alpha) - (c_1\cdots c_k)\alpha_0 = \mathrm{d}\,(\theta_k + c_k\theta_{k-1} + \cdots + c_kc_{k-1}\cdots c_l\theta_{l-1} + \cdots + c_k\cdots c_2\theta_1),$$

故 $\psi_i\alpha$ 与 $(c_1\cdots c_k)\alpha_0$ 同调.

7.2　德拉姆群 $R^d(X)$ 的确定

7.2.1　定理

设 X 是 d 维连通紧致的流形. 如果 X 是定向的, 则有一个同构 $R^d(X) \simeq \mathbf{R}$, 如果 X 不是可定向的, 则 $R^d(X) = \{0\}$.

由 7.1.9 我们知道 $R^d(X)$ 至多是 1 维的. $F^d(X)$ 表示 d 阶闭微分形式的集合 (参见 5.4.3), 而 X 是 d 维的, 故 $F^d(X) = \Omega^d(X)$.

如果 X *是定向的*, 由于它是紧致的, 则可以引进映射 (参见 6.1.3)

$$I : F^d(X) \ni \alpha \mapsto \int_X \alpha \in \mathbf{R}.$$

如果 $\alpha = \mathrm{d}\beta$, 由斯托克斯定理推出

$$\int_X \alpha = \int_X \mathrm{d}\beta = \int_{\partial X} \beta = 0.$$

这是由于 X 作为一个带边区域, 其边界为空集. 映射 I 过渡到对于 $B^d(X)$ 的商集, 定义一个映射

$$\bar{I} : F^d(X)/B^d(X) = R^d(X) \to \mathbf{R},$$

这个映射典范地关联到 X 及其定向, 它是向量空间之间的一个同态. 而且由于 X 是定向的, 所以存在一个体积形式 ω, 使得 $\int_X \omega > 0$, 于是 $\bar{I}(\bar{\omega}) > 0$, 这里 $\bar{\omega}$ 是 ω 在 $R^d(X)$ 里的类; 故 $\bar{I}$ 是一个满射的同态. 由于 $\dim R^d(X) \leqslant 1$, 故这实际是一个同构, 并且 $\dim R^d(X) = 1$.

如果 X 不是可定向的.

对于这样的流形, 记 $\mathrm{Orient}(X) = \tilde{X}$, 典范覆叠映射 $p : \tilde{X} \to X$ 是 2 层的 (参见 5.3.27). 我们知道 (参见 5.3.29) 对于连通的 X, 它不是可定向的等价于 $\tilde{X}$ 是连通的. 任取 $\omega \in \Omega^d(X)$. 设 $s : \tilde{X} \to \tilde{X}$ 是对径映射, 它令一个定向对应其相反定向, 我们有 $p \circ s = p$, 随之 $p^*(\omega) = s^*(p^*\omega)$. 于是根据 5.3.31.1 和 6.1.4.5 有

$$\int_{\tilde{X}} p^*\omega = \int_{\tilde{X}} s^*(p^*\omega) = -\int_{\tilde{X}} p^*\omega.$$

由此得到

$$\int_{\tilde{X}} p^*\omega = 0.$$

由于 $\tilde{X}$ 是可定向的 (参见 5.3.27), 则根据注释 7.2.2, 存在 $\lambda \in \Omega^{d-1}(\tilde{X})$, 使得 $p^*\omega = \mathrm{d}\lambda$. 令

$$\mu = \frac{\lambda + s^*(\lambda)}{2}, \quad \text{我们有} \quad \mu \in \Omega^{d-1}(\tilde{X}).$$

由于 $s \circ s = \mathrm{id}$, 故 $s^*(\mu) = \mu$.

由关系 $p^*\omega = \mathrm{d}\lambda$ 得到 $s^*(p^*\omega) = s^*(\mathrm{d}\lambda) = \mathrm{d}(s^*\lambda) = (p \circ s)^*\omega = p^*\omega = \mathrm{d}\lambda$, 故

$$p^*\omega = \frac{\mathrm{d}(\lambda + s^*\lambda)}{2} = \mathrm{d}\mu.$$

根据引理 5.3.9, 存在 $\underline{\mu} \in \Omega^{d-1}(X)$, 使得 $p^*(\underline{\mu}) = \mu$. 于是有 $p^*\omega = \mathrm{d}\mu = \mathrm{d}(p^*\underline{\mu}) = p^*(\mathrm{d}\underline{\mu})$, 而 p 是平直的, 故 $\omega = \mathrm{d}\underline{\mu}$. 由于 $\omega \in \Omega^d(X)$ 是任意的, 必然得到在这种情形下 $R^d(X) = \{0\}$.

7.2.2 注释

设 X 是 d 维定向连通紧致流形. 则

$$B^d(X) = \{\alpha \in \Omega^d(X) : \exists\, \beta, \text{ 使得 } \mathrm{d}\beta = \alpha\} = \left\{\alpha \in \Omega^d(X) : \int_X \alpha = 0\right\}.$$

事实上, 对于前面引入的映射 I:

$$\left\{\alpha \in \Omega^d(X) : \int_X \alpha = 0\right\} = I^{-1}(0),$$

由于 $\bar{I}$ 是同构, 它与 $B^d(X)$ 重合.

7.2.3 莫泽定理

设 X 是 d 维定向连通紧致流形, α 和 $\beta \in \Omega^d(X)$ 是两个体积形式, 使得 $\int_X \alpha = \int_X \beta$. 则存在 $f \in \mathrm{Diff}\,(X)$, 使得 $\beta = f^*\alpha$.

这就是说, 对于 d- 体积形式, 只有在微分同胚之下, 总体积才是不变的.

定理的证明

给定两个这样的体积形式 α 和 β, 对于 $t \in [0,1]$, 令 $\alpha_t = (1-t)\alpha + t\beta$, 这仍然是一个体积形式, 并且由于 $\int_X (\beta - \alpha) = 0$, 则根据注释 7.2.2 存在 $\gamma \in \Omega^{d-1}(X)$, 使得 $\mathrm{d}\,\gamma = \beta - \alpha$. 根据推论 5.3.16, 对于所有的 t, 存在一个由 $\int (\xi(t))(\alpha(t)) = -\gamma$ 定义的向量场 $\xi(t)$; 这个场对于 t 是 C^∞ 的.

设 F 是 $\xi(t)$ 的整体流; 由于 X 是紧致的, 则它在 $[0,1]$ 上是存在的 (参见 3.5.13,3.5.6 至 3.5.14). 于是有 (像对于双线性映射求导的过程那样):

$$\frac{\mathrm{d}\,(F_t^*\alpha_t)}{\mathrm{d}\,t}(t) = \frac{\mathrm{d}\,(F_s^*\alpha_t)}{\mathrm{d}\,s}(t) + F_t^*\left(\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,s}\alpha_s\right)(t)\right) = \frac{\mathrm{d}\,(F_s^*\alpha_t)}{\mathrm{d}\,s}(t) + F_t^*(\beta - \alpha).$$

而公式 5.5.10 表明对于所有闭微分形式 ω:

$$\frac{\mathrm{d}\,(F_s^*\omega)}{\mathrm{d}\,s}(t) = F_s^*(\mathrm{d}\,(\int \xi(t)(\omega))),$$

由于 $\mathrm{d}\,\gamma = \beta - \alpha$, 由此得到

$$\frac{\mathrm{d}\,(F_t^*\alpha_t)}{\mathrm{d}\,t} = F_t^*(\beta - \alpha) + F_t^*(\mathrm{d}\,(-\gamma)) = 0.$$

故 $F_t^*\alpha_t$ 对于 t 是常值, $F_0^*\alpha = \alpha$、特别地, 有 $F_1^*\beta = \alpha$, 于是对于 $f = (F_1)^{-1}$ 有 $\beta = f^*\alpha$.

7.3 映 射 度

7.3.1 基本定理

设 X 和 Y 是两个同样维数 d 的定向紧致连通流形, $f \in C^\infty(X;Y)$. 则存在一个整数, 称为 f 的**映射度**, 记作 $\deg(f)$, 使得

1° 对于任意 $\omega \in \Omega^d(Y)$ 有

$$\int_X f^*\omega = \deg(f)\int_Y \omega;$$

2° 对于 f 的任意正则值 y, 有

$$\deg(f) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \operatorname{signe}(J_x(f));$$

如果 $f^{-1}(y) = \varnothing$, 则 $\deg(f) = 0$.

(关于 $\operatorname{signe}(J_x(f))$ 的定义, 参见证明中的 7.3.2.2).

7.3.2 注释

如果 y 是 f 的正则值, 则有一个局部覆叠映射, 并且集合 $f^{-1}(y)$ 的基数有限 (参见 4.1.5 和 4.1.6), 从而 2° 中的和的项数有限.

$f^* : R^d(Y) \to R^d(X)$ 与 $f \in C^\infty(X;Y)$ 关联 (参见性质 5.4.6). 根据 7.2.1, X 和 Y 既然是两个同样维数 d 的定向紧致连通流形, 它们的德拉姆群 $R^d(Y)$ 和 $R^d(X)$ 都典范地同构于 $\mathbf{R}$; 由此可以用这样的方式定义一个映射 $\bar{f}^* : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, 使得以下的图表是交换的:

7.3.2.1
$$\begin{array}{ccc} R^d(X) & \xleftarrow{f^*} & R^d(Y) \\ \bar{I}_X \downarrow & & \downarrow \bar{I}_Y \\ \mathbf{R} & \xleftarrow[\bar{f}^*]{} & \mathbf{R} \end{array}$$

由于 $\bar{f}^* \in L(\mathbf{R};\mathbf{R})$, 这个映射有形式 $t \mapsto k \cdot t, k \in \mathbf{R}$. 由于

$$\bar{f}^* \circ \bar{I}_Y = \bar{I}_X \circ f^*,$$

如果 $\bar{\omega} \in R^d(Y)$, 而 ω 属于 $\bar{\omega}$ 的类, $\omega \in \Omega^d(Y)$, 则

$$\int_X f^*\omega = k \int_Y \omega.$$

$\deg(f)$ 是整数这个事实将从 2° 的证明得到.

根据萨德定理 (参见 4.3.6), 存在态射 f 的正则值 y. 应用 4.1.5, 存在 $V \in O_y(Y)$, 使得如果 $f^{-1}(y) = \{x_1, \cdots, x_n\}$, 则有分解

$$f^{-1}(V) = \bigcup_{i=1}^{n} U_i, U_i \in O_{x_i}(X), \quad \text{并且} \quad f|_{U_i} \in \operatorname{Diff}(U_i;V).$$

可以取连通的 V. 取 $\omega \in \Omega^d(Y)$ 使得 $\operatorname{supp}\omega \subset V$, 并且 $\int_Y \omega \neq 0$. 我们有 $\operatorname{supp}(f^*\omega) \subset f^{-1}(V)$, 于是

$$\int_X f^*\omega = \sum_{i=1}^{n} \int_{U_i} f^*\omega.$$

由于 $f|_{U_i}$ 是从 U_i 到连通的 V 上的微分同构, 所以 $f|_{U_i}$ 保持或反转 U_i, V 的 (由 X, Y 的定向诱导的) 定向, 而这取决于 $T_{x_i}(f)$, 从而只依赖 x_i. 令

7.3.2.2
$$\operatorname{signe}(J_x(f)) = \begin{cases} +1, & \text{如果 } T_x f \text{ 保持定向}, \\ -1, & \text{如果 } T_x f \text{ 反转定向}. \end{cases}$$

则有 (根据 6.1.4.4 和 6.1.4.5)

$$\int_{U_i} f^*\omega = \operatorname{signe}(J_{x_i}(f)) \int_Y \omega,$$

$$\int_X f^*\omega = \left(\sum_{x \in f^{-1}(y)} \operatorname{signe}(J_x(f)) \right) \int_Y \omega = k \int_Y \omega;$$

由此

$$\deg(f) = k = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \operatorname{signe}(J_x(f)),$$

它必然是一个整数.

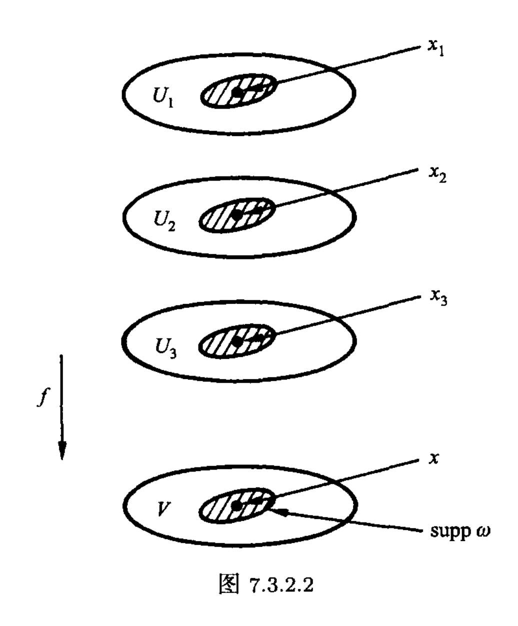


图 7.3.2.2

如果 $f^{-1}(y) = \varnothing$, 则存在 $V \in O_y(V)$, 使得 $f^{-1}(V) = \varnothing$; 对于支集在 V 内并且使得 $\int_Y \omega \neq 0$ 的 ω, 我们有

$$\int_X f^*\omega = \int_X 0 = 0,$$

由此得 $\deg(f) = 0$.

7.3.3　推论

设 X 和 Y 是两个同样维数 d 的定向紧致连通流形, $f \in C^\infty(X;Y)$. 如果 y 和 z 是 f 的两个正则值, 则整数 $\operatorname{card}(f^{-1}(y))$ 和 $\operatorname{card}(f^{-1}(z))$ 模 2 同余.

事实上, 公式

$$\deg(f) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \operatorname{signe}(J_x(f))$$

蕴涵 $\deg f \equiv \operatorname{card}(f^{-1}(y))$ 模 2.

7.3.4 命题

设 X, Y, Z 是三个同样维数 d 的定向紧致连通流形, $f \in C^\infty(X;Y), g \in C^\infty(Y;Z)$, 则 $\deg(g \circ f) = \deg(g)\deg(f)$.

参见习题 7.8.2

7.3.5 例子

7.3.5.1 如果 f 不是满射, 则 $\deg f = 0$.

7.3.5.2 如果 id_X 是从 X 到 X 上的恒等映射, 则 $\deg(\mathrm{id}_X) = 1$.

7.3.5.3 如果 Y 是圆周, 且 X 是下面的曲线:

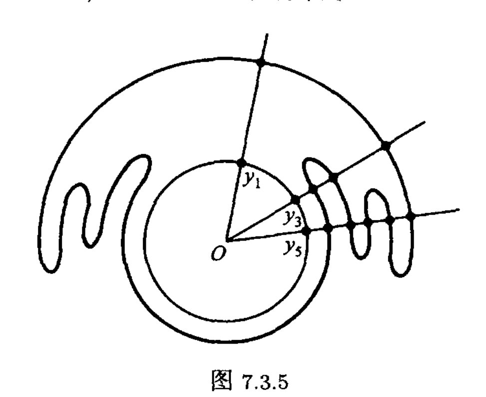


图 7.3.5

而 $f : X \to Y$ 是中心为 O 的在 Y 上的投影. Y 的点 y_1, y_3, y_5 是正则值, $f^{-1}(y_1)$, $f^{-1}(y_3)$ 和 $f^{-1}(y_5)$ 的基数分别是 1,3 和 5.

7.3.5.4 如果 $X = Y = S^d$, 而 s 表示对径映射, 即 $s = -\mathrm{id}_{S^d}$, 则

$$\deg(s) = (-1)^{d+1}.$$

事实上, 如果 ω 是 S^d 的典范体积形式, 则 $s^*\omega = (-1)^{d+1}\omega$ (参见 5.3.18), 故

$$\int_{S^d} s^*\omega = (-1)^{d+1} \int_{S^d} \omega.$$

7.3.5.5 设 $X = Y = S^1 \subset \mathbf{R}^2$; 把 $\mathbf{R}^2$ 和复数集合 $\mathbf{C}$ 等同化. 设 $f : S^1. \ni z \mapsto z^n \in S^1$, 则 $\deg(f) = n$.

7.3.6 注释

7.3.6.1 如果同时反转 X 和 Y 的定向, 映射度保持不变.

7.3.6.2 设 $f \in \mathrm{Diff}\,(X)$; 如果 f 保持定向, 则 $\deg(f)=1$, 如果 f 反转定向, 则 $\deg(f)=-1$.

7.3.7 定义, 例子

设 E 是 2 维定向欧几里得空间, $\alpha \in C^\infty(S^1;E)$. 给定 $a \in E-\alpha(S^1)$ 和由

$$\mu(t)=\frac{\alpha(t)-a}{\|\alpha(t)-a\|}$$

定义的映射 $\mu: S^1 \to S^1$, μ 的映射度称为 a 对于 α 的指标.

为了了解更一般的情形, 请参见 7.6.7.

7.3.8 注释

根据 3.4.1, 上面的 7.3.7 可以应用到平面 E 的 1 维紧致子流形.

7.4 映射度对于同伦的不变性. 应用

7.4.1 定义

给定两个流形 X 和 Y, 我们称 f 和 $g \in C^\infty(X;Y)$ 是**同伦的**, 如果存在 f 和 g 之间的一个**同伦**, 即存在一个映射 $F:[0,1]\times X \to Y$, 使得

(i) $\forall t \in [0,1]$, 由 $x \mapsto F(t,x)$ 定义的映射 $F_t \in C^\infty(X;Y)$;

(ii) 由 $(T\cdot F)(t,x)=T_xF_t$ 定义的映射 $(T\cdot F):[0,1]\times TX \to TY$ 是连续的;

(iii) $F_0=f, F_1=g$.

7.4.2 注释

如果存在 $\varepsilon>0$, 使得 F 是 $\bar{F}\in C^\infty((-\varepsilon,1+\varepsilon)\times X;Y)$ 的限制, (i) 和 (ii) 必然满足.

7.4.3 定理

设 X 和 Y 是两个相同维数的定向紧致连通流形, f 和 $g \in C^\infty(X;Y)$ 是两个同伦的映射, 则 $\deg(f)=\deg(g)$ (如果 F 是 f 和 g 之间的同伦, 则 $\deg(F_t)$ 不依赖于 t).

事实上, 设 $\omega \in \Omega^d(Y)$ 使得 $\displaystyle\int_Y \omega \neq 0$. 根据 7.3.1 的 1°, 对于所有 t,

$$\deg(F_t)=\frac{\displaystyle\int_X F_t^*\omega}{\displaystyle\int_Y \omega},$$

这是一个整数. 如果我们证明了映射

$$t \mapsto \int_X F_t^*\omega$$

是连续的, 则 $t \mapsto \deg(F_t)$ 就是连续的, 由此即得它是常数. 而上面映射的连续性从 5.2.10.6 和 6.1.4.11 就可得到.

7.4.4 推论

设 X 是一个定向连通紧致流形, 则映射 id_X 决不同伦于一个不满射的 $f \in C^\infty(X;Y)$

应用例子 7.3.5.1, 7.3.5.2 和定理 7.4.3 即可.

7.4.5 第一个应用:球面上的向量场

7.4.6 定理

当且仅当 d 是奇数, 在球面 S^d 上存在处处非零的向量场 ξ.

对于奇数 d, 证明存在一个这样的向量场. 为此, 把 $\mathbf{R}^{2d}$ 跟

$$\mathbf{R}^{2d} = \mathbf{R}^2 \times \cdots \times \mathbf{R}^2 = \mathbf{C} \times \cdots \times \mathbf{C} = \mathbf{C}^d$$

等同, 由

$$\xi(z_1, \cdots, z_d) = \theta^{-1}_{(z_1,\cdots,z_d)}(iz_1, \cdots, iz_d)$$

定义在 $S^{2d-1} \subset \mathbf{R}^{2d} = \mathbf{C}^d$ 上的向量场 ξ. 显然处处 $\xi \neq 0$.

证明对于偶数 d, 不能在 S^d 上定义处处非零的向量场. 设 ξ 是这样的向量场, 由于 $\xi(x) \neq 0$, 所以可以对于所有 $x \in S^d$ 定义

$$\eta(x) = \frac{\xi(x)}{\|\xi(x)\|} .$$

再由

$$F(t, x) = \cos \pi t \cdot x + \sin \pi t \cdot \theta_x(\eta(x))$$

定义 $F \in C^\infty(\mathbf{R} \times S^d; S^d)$.

由于 $\|x\| = \|\eta(x)\| = 1$ 和 $(x|\theta_x(\eta(x))) = 0$, 必然 $\|F(t, x)\| = 1 \quad \forall t \quad \forall x \in S^d$. 从而 7.4.1 的条件是满足的 (参见 7.4.2), 从而 F 是一个同伦映射; 而

$$\deg(F_0) = \deg(\mathrm{id}_{S^d}) = 1, \quad \deg(F_1) = \deg(-\mathrm{id}_{S^d}) = (-1)^{d+1},$$

后者是根据 7.3.5.4, 如果 d 是偶数, 则不可能有 $\deg(F_0) = \deg(F_1)$.

例如, S^2 上的所有向量场至少在一个点是零, 人们不能把球面上的毛发梳理得没有一绺乱发. 存在 S^2 上的向量场恰好在一个点是零: 参见图 7.4.6 中左面的一个.

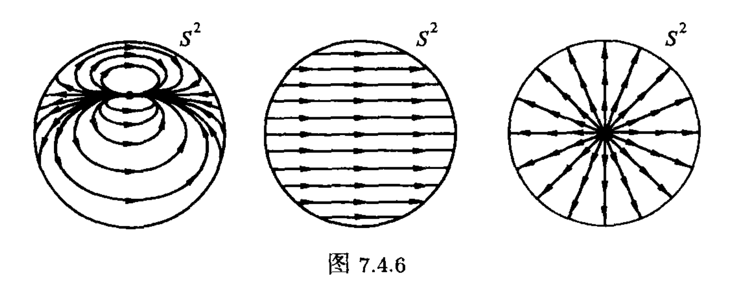


图 7.4.6

7.4.7 第二个应用: 两条曲线的交错

7.4.8　定义

直到 7.4.14 (含), 我们称从 S^1 到 $\mathbf{R}^3$ 的 C^∞ 类的一个嵌入 f 为 $\mathbf{R}^3$ 的曲线. 给定两条曲线 f 和 g, 如果使得 $f(S^1)\bigcap g(S^1)=\varnothing$, 则称 f 和 g 的有序对称为**曲线对**, 这样的曲线对记作 $\{f,g\}$.

两个曲线对 $\{f,g\}$ 和 $\{f',g'\}$ 之间的一个同伦是给定的两个同伦 F 和 G (在 7.4.1 的意义下) 的有序对, 其中 F 是 f 和 f' 之间的一个同伦, 而 G 是 g 和 g' 之间的一个同伦, 使得对于每个 $t\in[0,1]$, $\{F_t,G_t\}$ 是曲线对、在曲线对之间的一个这样的同伦记作 $\{F,G\}$.

7.4.9　定义

给定曲线对 $\{f,g\}$. 由

$$\mu(t,s)=\frac{f(t)-g(s)}{\|f(t)-g(s)\|}$$

定义的映射 $\mu\in C^\infty(S^1\times S^1;S^2)$ 的映射度称为曲线对 $\{f,g\}$ 的**交错数**, 记作 $\operatorname{entrel}(f,g)$.

7.4.10　由两个圆周

$$f_0\begin{cases}z=0\\(x-2)^2+y^2-1=0\end{cases}$$

$$g_0\begin{cases}z=0\\(x+2)^2+y^2-1=0\end{cases}$$

组成的曲线对记作 $\{f_0,g_0\}$.

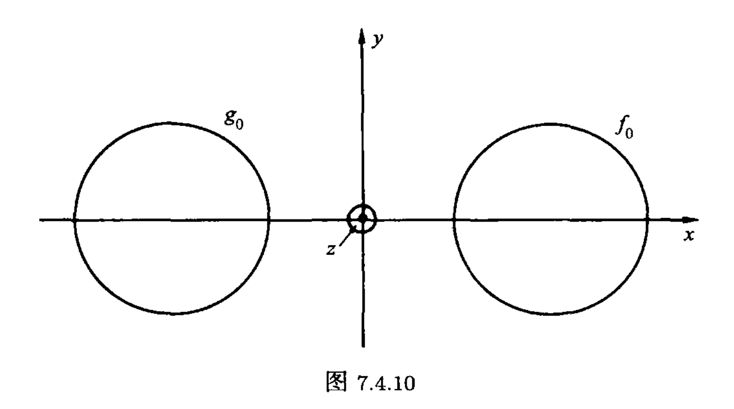


图 7.4.10

7.4.11　定义

如果曲线对 $\{f,g\}$ 同伦于 7.4.10 定义的曲线对 $\{f_0,g_0\}$, 则称 $\{f,g\}$ 是**不交错的**. 否则, 称它是**交错的**.

7.4.12 定理

设两个曲线对 $\{f,g\}$ 和 $\{f',g'\}$ 是同伦的, 则

$$\text{entrel}\,(f,g) = \text{entrel}\,(f',g').$$

如果 $\text{entrel}\,(f,g) \neq 0$, 则曲线对 $\{f,g\}$ 由交错曲线组成.

给定两个同伦的曲线对 $\{f,g\}$ 和 $\{f',g'\}$, 而 $\{F,G\}$ 是两个曲线对之间的同伦. 对于固定的 t, 令曲线对 $\{F_t,G_t\}$ 关联一个 $S^1 \times S^1 \to S^2$ 的映射 μ_t :

$$\mu_t(x,y) = \frac{F_t(x) - G_t(y)}{\|F_t(x) - G_t(y)\|}.$$

由 $(t,x,y) \mapsto \mu_t(x,y)$ 定义的映射 $\mu : [0,1] \times S^1 \times S^1 \to S^2$ 满足 7.4.1 的条件. 从而 μ 是一个同伦, 随之 $\deg(\mu_t) =$ 常数 (参见 7.4.3). 特别地, 有

$$\text{entrel}\,(f,g) = \deg(\mu_0) = \deg(\mu_1) = \text{entrel}\,(f',g').$$

对于定理的第二部分, 我们将证明如果 f 和 g 是不交错的, 则 $\text{entrel}\,(f,g) = 0$. 而如果 $\{f,g\}$ 是不交错的, 意味着这个曲线对与曲线对 $\{f_0,g_0\}$ 同伦, 从而 $\text{entrel}\,(f,g) = \text{entrel}\,(f_0,g_0)$. 我们有 $\text{entrel}\,(f_0,g_0) = 0$. 事实上, 由于 f_0 和 g_0 是位于平面 $z=0$ 上的两个圆周, 在 7.4.9 中引进的映射 μ 对于这两个圆周的像集是 $\mathbf{R}^3$ 内的平面 $z=0$ 上的模为 1 的向量组成的, 故 μ 不是满射的, 随之 $\deg(\mu) = 0$ (参见 7.3.5.1).

7.4.13 例子

考虑图 7.4.13 所示的两个圆周, 分别放在两个垂直的平面上, 它们的中心位于两个平面的交线上. 我们有 $\text{entrel}\,(f,g) = \pm 1$, 特别的推论: f 和 g 是交错的.

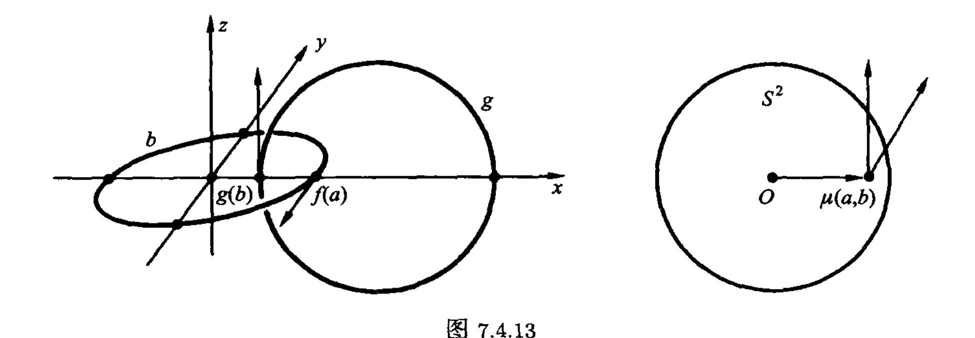


图 7.4.13

为了计算 $\text{entrel}\,(f,g)$, 考虑映射 $\mu : S^1 \times S^1 \to S^2$, 其定义是

$$\mu(t,s) = \frac{f(t) - g(s)}{\|f(t) - g(s)\|}\ .$$

如此选择坐标系: 两个圆周分别放置在平面 xOy 和 xOz 上, 中心都在 Ox 上. 取 S^2 的点 $e_1 = (1,0,0)$, 如果 $f(a)$ 和 $g(b)$ 是图上所标出的点, 则 $\mu^{-1}(e_1) = \{(a,b)\}$, 这是因为如果 $(s,t) \in \mu^{-1}(e_1)$, 则向量 $f(s) - g(t)$ 应该跟 Ox 的单位向量同一方向.

此外, e_1 是一个正则值, 理由如下: 因为有 $T_{(a,b)}(S^1 \times S^1) \simeq T_aS^1 \times T_bS^1$, 又由于 $f'(a)$ 和 $g'(b)$ 是正交的, 故

$$\left(T_{(a,b)}\mu\right)\left(T_{(a,b)}(S^1 \times S^1)\right) = T_{\mu(a,b)}S^2.$$

从 7.3.1 的 2° 得到 μ 的映射度是 ± 1 (在 $\mu^{-1}(e_1)$ 里仅有一个元素).

7.4.14 提请注意

定理 7.4.12 的第二部分的逆命题不成立. 事实上 (参见习题 7.8.5), 图 7.4.14 所画的两个曲线对的交错数都是零, 但是右侧的曲线对是交错的 (参见在 7.8.11 和 [34] 中的一些出人意料的应用).

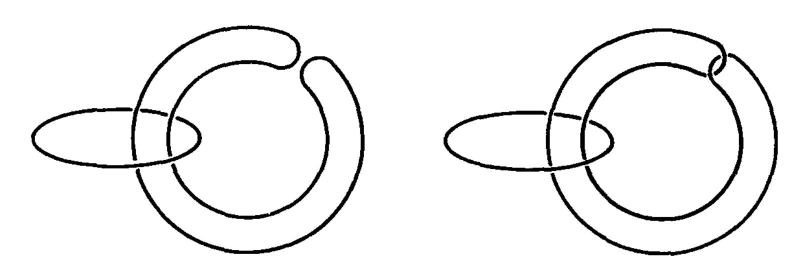


图 7.4.14

7.4.15 第三个应用: $\mathbf{R}^d$ 的向量场在一个孤立零点的指标

设 U 是 $\mathbf{R}^d$ 的一个开集, $\xi \in C^\infty(U;\mathbf{R}^d)$ 是 U 上的一个 (在 1.2.1 的初等意义下的) 向量场, $m \in U$ 是 ξ 的一个孤立零点, 即 $\xi(m) = 0$, 并且存在 $V \in O_m(U)$, 使得对于 $V - \{m\}$ 的所有 $x, \xi(x) \neq 0$. 用 $S(m,\varepsilon)$ 表示中心为 m 半径为 ε 的在 $\mathbf{R}^d$ 上的球面.

7.4.16 命题

从 S^{d-1} 到 S^{d-1} 内的映射 $x \mapsto \dfrac{\xi(m+\varepsilon x)}{\|\xi(m+\varepsilon x)\|}$ 的映射度不依赖于使得 $S(m,\varepsilon) \subset V$ 的 $\varepsilon > 0$. 这个映射度称为 ξ 在 m 的**指标**, 记作 $\mathrm{indice}_m\xi$.

给定 ε 和 $\eta > 0$, 使得半径分别为 ε 和 η 的球面在 V 内. 为了利用映射度的同伦不变定理 (参见 7.4.3), 由

$$F(t,x) = \frac{\xi(m+((1-t)\varepsilon+t\eta)x)}{\|\xi(m+((1-t)\varepsilon+t\eta)x)\|}$$

定义映射 $F:[0,1]\times S^{d-1} \to S^{d-1}$. 由于 $\xi \in C^\infty(U;\mathbf{R}^d)$, 并且 ξ 在 $V-\{m\}$ 不为零, 故存在 $\alpha > 0$, 使得 $\forall t \in (-\alpha, 1+\alpha), \forall x \in S^{d-1} : m + ((1-t)\varepsilon + t\eta)x \in V - \{m\}$. 于

是根据注释 7.4.2, $F(t,x)$ 满足定义 7.4.1 的条件, 并且有

$$F_0 = \left\{ x \mapsto \frac{\xi(m+\varepsilon x)}{\|\xi(m+\varepsilon x)\|} \right\} \quad 和 \quad F_1 = \left\{ x \mapsto \frac{\xi(m+\eta x)}{\|\xi(m+\eta x)\|} \right\}.$$

定理 7.4.3 保证得到命题的结论.

7.4.17 例子

7.4.17.1 $\xi = \mathrm{id}_{\mathbf{R}^d}$, 0 是 ξ 的孤立零点, $\mathrm{indice}_0\, \xi = 1$.

7.4.17.2 $\xi = -\mathrm{id}_{\mathbf{R}^d}$, 根据 7.3.5.4, $\mathrm{indice}_0\, \xi = (-1)^d$.

7.4.17.3 在 $\mathbf{R}^2$ 内, $\xi(x,y) = (-y, x)$: $\mathrm{indice}_0\, \xi = 1$.

7.4.17.4 在 $\mathbf{R}^2$ 内, $\xi(x,y) = (x^2-y^2, 2xy)$: $\mathrm{indice}_0\, \xi = 2$.

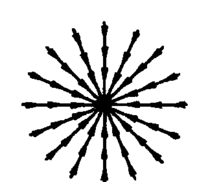
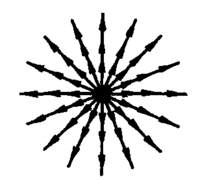
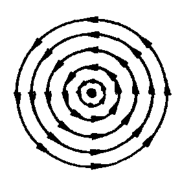
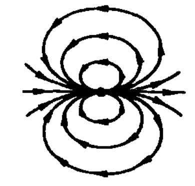





图 7.4.17

现在 (从三个方面: 维数, 允许 ξ 有零点, 以及 ξ 不必是法向的) 推广定理 6.3.7.

7.4.18 定理

设 $\xi \in C^\infty(\mathbf{R}^d)$ 是一个向量场, 在 $B(0,1)$ 仅有孤立零点 $x_1, \cdots, x_n$, 在 S^{d-1} 上是进入的, 即对于 S^{d-1} 的所有 x 有 $(x|\xi(x)) < 0$, 则

$$\sum_{i=1}^n \mathrm{indice}_{x_i}\, \xi = (-1)^d.$$

由于在一个紧致集合内有有限孤立零点 $x_1, \cdots, x_n$, 可以围绕每个点 x_i 做两两不交的闭球 $D_i = \bar{B}(x_i, \varepsilon_i)$, 并且在这些球上, $\xi|_{B(x_i,\varepsilon_i)-\{x_i\}}$ 不再取零值.

引进带边区域

$$\bar{D} = \bar{B}(0,1) - \bigcup_{i=1}^n \mathring{D}_i.$$

向量场在 S^{d-1} 上是进入的, 故非零, 于是存在 $U \in O_{\bar{B}(0,1)}(\mathbf{R}^d)$, 使得 ξ 在 $U - \bigcup_{i=1}^n \{x_i\}$ 上非零.

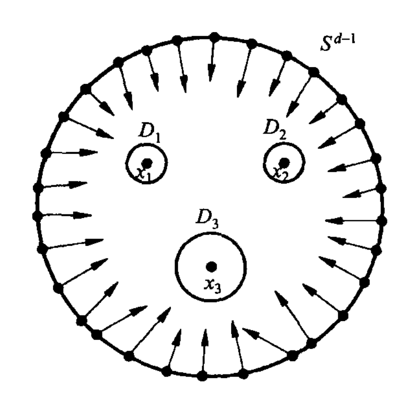
映射 $f : x \mapsto \dfrac{\xi(x)}{\|\xi(x)\|}$ 在 $U - \bigcup_{i=1}^n \{x_i\}$ 上定义, 属于 $C^\infty\left(U - \bigcup_{i=1}^n \{x_i\}; S^{d-1}\right)$.

用 σ 表示 S^{d-1} 的典范体积形式, 像 6.3.8 那样, 根据斯托克斯公式:

$$0 = \int_{\bar{D}} \mathrm{d}(f^*\sigma) = \int_{S^{d-1}} f^*\sigma - \sum_{i=1}^n \int_{S(x_i,\varepsilon_i)} f^*\sigma.$$

对于每个 i, $\int_{S(x_i,\varepsilon_i)} f^*\sigma = \mathrm{indice}_{x_i}\xi$ (参见 7.4.16), 故

$$\int_{S^{d-1}} f^*\sigma = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{indice}_{x_i}\xi.$$



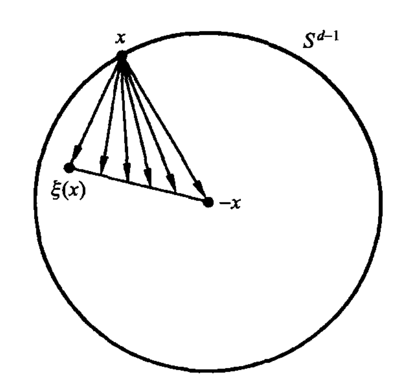


图 7.4.18

留下的是计算此式左端的积分. 如果令

$$F(t,x) = \frac{(1-t)\xi(x) - tx}{\|(1-t)\xi(x) - tx\|},$$

则由于 $(x|\xi(x)) < 0$ 蕴涵 $\forall x \in S^{d-1}$ 和 $\forall t \in [0,1], (1-t)\xi(x) - tx \neq 0$, 故存在 $\alpha > 0$, 使得对于 $t \in (-\alpha, 1+\alpha)$ 和 $x \in S^{d-1}, F_t$ 是 C^∞ 类的. 对于 $[0,1]$ 的所有 $t, (1-t)\xi(x) - tx$ 表示从点 x 到联结 $\xi(x)$ 和 $-x$ 的线段上一点的向量.

这个映射 F 是 $F_0 = f|_{S^{d-1}}$ 和 $F_1 = -\mathrm{id}\,|_{S^{d-1}}$ 之间的同伦 (参见 7.4.1), 故 $f|_{S^{d-1}}$ 同伦于 $-\mathrm{id}\,|_{S^{d-1}}$, 从而 $\int_{S^{d-1}} f^*\sigma = (-1)^d$ (参见 7.3.5.4 和 7.4.3).

7.4.19 推论

设 $\xi \in C^\infty(\mathbf{R}^d)$, 在 S^{d-1} 上是进入的, 则 ξ 至少一次取零值.

对于一般流形情形, 参见 7.7 节.

7.5 管形的体积 (结尾)和高斯-博内公式

设 E 是一个 n 维欧几里得空间, X 是 E 的 d 维连通紧致子流形. E 的单位球记作 $S(E), NUX$ 是 X 的单位法丛 (参见 6.7.6), $\gamma: NUX \to S(E)$ 是由 $\gamma(x,v) = v$ 定义的高斯映射 (参见 6.8.14). 如果给 E 定向, 那么 $S(E)$ 作为 $B_E(0,1)$ 的边界随之定向 (参见 6.8.14), NUX 亦如此 (参见 6.7.22 和 6.7.26). 两个流形 $S(E)$ 和 NUX 都是 n 维定向连通紧致的, 故可以定义 $\deg(\gamma)$. 由于 $S(E)$ 和 NUX 是同时典范定向的, 故 $\deg(\gamma)$ 不依赖在 E 上选取的定向 (参见 7.3.6.1).

命题 6.9.15 中的公式可以写成:

$$\int_X K_d \delta = \int_{NUX} W_d \psi = \int_{NUX} \gamma^* \Sigma = \deg(\gamma) \int_{S(E)} = \operatorname{Vol} S(E) \cdot \deg(\gamma).$$

为了计算 $\deg(\gamma)$, 我们利用下列妙招: 令 $(x,v) \in NUX$ 对应函数 $f_{(x,v)} \in C^\infty(X)$:

7.5.1 $$f_{(x,v)} : y \mapsto (v|y).$$

在第四章 (4.1.4.2) 我们已经看到: 当且仅当 $v \in N_y X$ 时, X 的 y 是 $f_{(x,v)}$ 的临界点. 于是对于所有 v, x 是 $f_{(x,v)}$ 的临界点. 以下推理要使用的基本工具是莫尔斯理论 (参见 4.2.11 和 4.2.24) 以及:

7.5.2 引理

设 $(x,v) \in NUX$. 当且仅当 (x,v) 不是高斯映射 $\gamma : NUX \to S(E)$ 的临界点, 映射 $f_{(x,v)}$ 在 (x,v) 有非退化临界点. 此外, 如果 d 是偶数, 则有 $\operatorname{signe}(J_{(x,v)}\gamma) = (-1)^{\operatorname{indice}_x f^{(x,v)}}$.

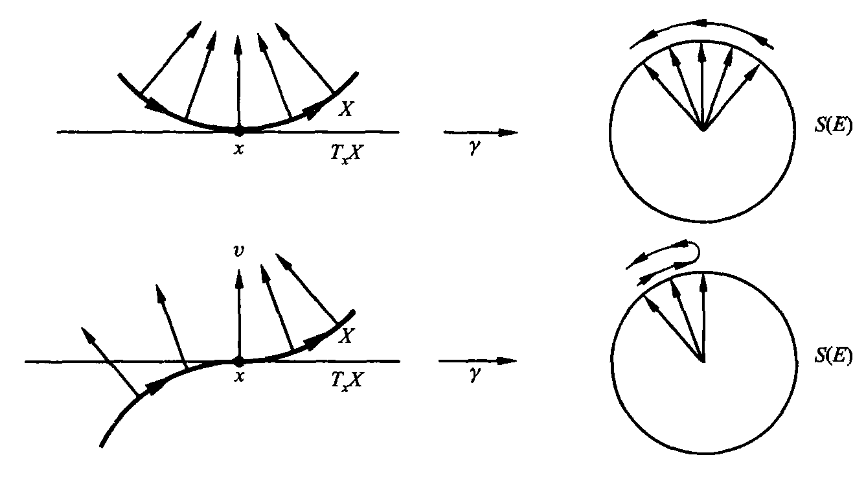


图 7.5.2

可以给这个引理一个富有启发性的解释. 假定 X 是一条平面曲线, 在图 7.5.2 中, $f_{(x,v)}$ 是纵坐标 (高度), 它显然在 x 是临界的. 如果 X 在 x 的曲率不是零, 这个临界点是非退化的 (参见 8.2.2.15 例子); 在这种情形下, γ 在 (x,v) 不是临界的; 如果反之, 比如 X 在 x 有拐点, 在映射 γ 下 X 在 $S(E)$ 上的像曲线将有一个稳定点; 见图. 为了使在平面曲线的简单情形上述说法是严格的, 在 8.5 节包含了所必须的内容. 此外, 读者还需验证在这种简单情形计算 $\operatorname{signe}(J_{(x,v)}\gamma)$ 的公式.

引理 7.5.2 的证明.

设 $(x,v) \in NUX$. 取 X 的一个参数表示 (U,h), 再取 NUX 的一个在 6.7.11 里定义的那种类型的参数表示 $(U \times \mathbf{R}^{n-d}, H)$, 使得采用那里的记号有:

1° $h(u) = x$;

2° $\left\{\frac{\partial h}{\partial u_i}(u)\right\}$ $(i = 1, \cdots, d)$ 是 T_xX 的 (对于一个局部体积形式 β 是正的) 标准正交基底;

3° $\nu_{d+1}(u) = v$;

4° 矩阵 $\left(\frac{\partial^2(f_{(x,v)} \circ h)}{\partial u_i \partial u_j}(u)\right)$ $(1 \leqslant i, j \leqslant d)$ 是对角矩阵, 即对于 $i \neq j$ 有 $\frac{\partial^2(f_{(x,v)} \circ h)}{\partial u_i \partial u_j}(u) = 0$.

上面的 4° 之所以能够实现是基于在正交群里二次形式的化简: [2], 36.9.4.

根据定义 4.2.11, 当且仅当

$$\prod_{i=1}^{d} \frac{\partial^2(f_{(x,v)} \circ h)}{\partial u_i^2}(u) \neq 0,$$

$f_{(x,v)}$ 在 (x, v) 是非退化的. 其中的 $f_{(x,v)} \circ h(u) = (v|h(u))$. 根据 H 的构造:

$$\left(\nu_{d+1}(w) \middle| \frac{\partial h}{\partial u_i}(w)\right) = 0, \quad \forall w \in U, \ \forall i = 1, \cdots, d.$$

这个等式对于 u_j ($\mathbf{R}^d \supset U$ 的第 j 个坐标) 求导, 并且在 u 求值:

$$0 = \left(\frac{\partial \nu_{d+1}}{\partial u_j}(u) \middle| \frac{\partial h}{\partial u_i}(u)\right) + \left(\nu_{d+1}(u) \middle| \frac{\partial^2 h}{\partial u_i \partial u_j}(u)\right).$$

还利用在 6.8.5 引进的记号表示 E 在 $\theta(T_xX)$ 上的投影:

$$0 = \left(\left(\frac{\partial \nu_{d+1}}{\partial u_j}\right)^T(u) \middle| \frac{\partial h}{\partial u_i}(u)\right) + \left(v \middle| \frac{\partial^2 h}{\partial u_i \partial u_j}(u)\right).$$

但是当 v 固定时对于标量积 $(v|w)$ 中的 w 求导得

$$\left(v \middle| \frac{\partial^2 h}{\partial u_i \partial u_j}(u)\right) = \frac{\partial^2 h}{\partial u_i \partial u_j}(v|h(u)).$$

代入后得到

$$\left(\left(\frac{\partial \nu_{d+1}}{\partial u_j}\right)^T(u) \middle| \frac{\partial h}{\partial u_i}(u)\right) = -\frac{\partial^2 h}{\partial u_i \partial u_j}(f_{(x,v)} \circ h|)(u).$$

由 $\left(\frac{\partial \nu_{d+1}}{\partial u_j}\right)^T(u)$ 在 $\frac{\partial h}{\partial u_i}(u)$ 组成的标准正交基底中的这个分解得到

7.5.3 $$\left(\frac{\partial \nu_{d+1}}{\partial u_i}(u)\right)^T = -\frac{\partial^2 h}{\partial u_i^2}(f_{(x,v)} \circ h|)(u) \cdot \frac{\partial h}{\partial u_i}(u).$$

由于基底 $\left\{\dfrac{\partial h}{\partial u_i}(u)\right\}_{i=1,\cdots,d}$ 对于 β 是正的并且是标准正交的, 故得

$$\beta\left(\left(\frac{\partial \nu_{d+1}}{\partial u_1}\right)^T(u),\cdots,\left(\frac{\partial \nu_{d+1}}{\partial u_d}\right)^T(u)\right)=(-1)^d\prod_{i=1}^d\frac{\partial^2}{\partial u_i^2}(f_{(x,v)}\circ h)(u).$$

由于 (参见 6.8.15)

$$\gamma^*(\Sigma)=W_dH,$$

以及 (参见 6.8.19)

$$W_d(x,v)=\beta\left(\left(\frac{\partial \nu_{d+1}}{\partial u_1}\right)^T(u),\cdots,\left(\frac{\partial \nu_{d+1}}{\partial u_d}\right)^T(u)\right)=(-1)^d\prod_{i=1}^d\frac{\partial^2}{\partial u_i^2}(f_{(x,v)}\circ h)(u),$$

我们确信 $f_{(x,v)}$ 的临界点 (x,v) 是非退化的, 恰好对应 (x,v) 不是 γ 的临界点, 即 γ 在 (x,v) 是平直的.

此外, 如果 d 是偶数, 因子 $(-1)^d$ 等于 1, 留下的是

$$\operatorname{signe}(J_{(x,v)}\gamma)=\operatorname{signe}(W_d(x,v))=\operatorname{signe}\prod_{i=1}^d\frac{\partial^2}{\partial u_i^2}(f_{(x,v)}\circ h)(u)=(-1)^{\operatorname{indice}_x f(x,v)}.$$

7.5.4 定理

设 X 是 n 维欧几里得向量空间的维数 d 为偶数的一个连通紧致子流形. 又设 γ 是高斯映射. 则 $\deg(\gamma)=\chi(X),\chi(X)$ 是 X 的欧拉示性数, 并且 $\int_X K_d\delta=\chi(X)\cdot\operatorname{Vol}(S^{n-1})$ (**高斯 - 博内定理**).

设 $\gamma: NUX\to S(E)$, 根据萨德定理 (参见 4.3.6), 存在 γ 的正则值 $v\in S(E)$; 那么 $\gamma^{-1}(v)=\bigcup_{i=1}^k\{(x_i,v)\}$ 是有限的.

对于这个 v, 用 f_v 表示从 X 到 $\mathbf{R}$ 内的映射 $y\mapsto(v|y), f_v\in C^\infty(X)$, 而且当且仅当 $v\in N_yX$, 即 $\gamma(y,v)=v,y$ 是其临界点. 换句话说, 当且仅当 y 是诸 x_i 中的一个, y 是其临界点. 于是 x_i 的集合就是 f_v 的临界点的集合. 根据假设, v 是 γ 的正则值, 由引理 7.5.2 得到, 每个点 x_i 是 f_v 的非退化临界点. 应用莫尔斯的基本定理 (参见 4.2.24.4), 即得

$$\chi(X)=\sum_{h=0}^d(-1)^hC_h(f_v),$$

其中 $C_h(f_v)$ 是 f_v 的指标为 h 的临界点的数目. 于是

$$\begin{aligned}\chi(X)&=\sum_{h'=0}^{h'\leqslant d/2}C_{2h'}(f_v)-\sum_{h''=0}^{h''\leqslant d/2}C_{2h''+1}(f_v)\\&=\operatorname{Card}(\{x_i:\operatorname{indice}_{x_i}f_v\ \text{是偶数}\})-\operatorname{Card}(\{x_i:\operatorname{indice}_{x_i}f_v\ \text{是奇数}\}).\end{aligned}$$

由于 d 是偶数, 根据引理 7.5.2, 有

$$\chi(X) = \mathrm{Card}\left(\{(x_i, v) : \mathrm{signe}\,(J_{(x_i,v)}\gamma) = +1\}\right) - \\ \mathrm{Card}\left(\{(x_i, v) : \mathrm{signe}\,(J_{(x_i,v)}\gamma) = -1\}\right).$$

根据映射度的基本定理, 这正是 γ 的映射度 (参见 7.3.1, 2°). 利用本节开头复习的公式, 并且由于 E 是 n 维欧几里得空间, $\mathrm{Vol}\,(S(E)) = \mathrm{Vol}\,(S^{n-1})$, 就得到等式 $\int_X K_d\delta = \chi(X)\cdot \mathrm{Vol}\,(S^{n-1})$.

7.5.5 推论

设 X 是 n 维欧几里得空间的维数 d 为偶数的连通紧致子流形. 在 6.9.9 得到的计算 $\mathrm{Vol}\,(TUB^{\varepsilon}X)$ 的公式的最后一项是

$$\frac{\varepsilon^n}{n}\mathrm{Vol}(S^{n-1})\cdot\chi(X).$$

特别地, 如果 $d = 2$(X 是一个曲面), 则

$$\mathrm{Vol}\,(TUB^{\varepsilon}X) = \varepsilon^{n-2}\cdot\mathrm{Vol}\,(B_{n-2}(0,1))\cdot\mathrm{Aire}\,(X) + \frac{\varepsilon^n}{n}\mathrm{Vol}\,(S^{n-1})\cdot\chi(X),$$

从而这个体积只依赖 $n, \varepsilon, \mathrm{Aire}\,(X), \chi(X)$, 而与 X 嵌入 E 的方式无关.

7.5.6 例子

7.5.6.1 取 $\mathbf{R}^3$ 中的 $X = S^2$. 我们有 $\chi(S^2) = 2$ (可以通过 5.7.1 中的德拉姆群检验), 于是 $\mathrm{Vol}\,(TUB^{\varepsilon}X) = 8\pi\varepsilon + \frac{8\pi}{3}\varepsilon^3$. 注意到 $TUB^{\varepsilon}X = B_3(0, 1+\varepsilon) - B_3(0, 1-\varepsilon)$:

$$\mathrm{Vol}\,(TUB^{\varepsilon}X) = \frac{4\pi}{3}\left[(1+\varepsilon)^3 - (1-\varepsilon)^3\right] = \frac{4\pi}{3}(2\varepsilon^3 + 6\varepsilon),$$

这是意料之中的结果.

7.5.6.2 在 n 维的任意欧几里得空间 E 里, 如果 $X = T^2$, 那么可以从 5.8.1 的德拉姆群验证得到 $\chi(X) = 0$, 于是

$$\mathrm{Vol}\,(TUB^{\varepsilon}X) = \mathrm{Vol}\,(B_{n-2}(0,\varepsilon))\cdot\mathrm{Aire}\,(X).$$

7.5.6.3 X 表示 g 个洞的环面 (参见 4.2.24.3): $\chi(X) = 2(1-g)$. 如果这个面以任意方式嵌入到 $\mathbf{R}^3$ 内 (图 4.2.24.3), 则有

$$\mathrm{Vol}\,(TUB^{\varepsilon}X) = 2\varepsilon\cdot\mathrm{Aire}\,(X) + \frac{8\pi\varepsilon^3}{3}(1-g).$$

注意这个体积小于 $2\varepsilon\cdot\mathrm{Aire}(X)$.

7.5.7 注释

公式 $\int_X K_d\delta = \chi(X)\cdot\mathrm{Vol}\,(S^{n-1})$ 称为*高斯–博内公式*, 对于黎曼 (抽象) 流形 X 仍有意义: 定义一个曲率, 如果 X 嵌入 E, 它在 x 等于 $\frac{K_d(x)}{\mathrm{Vol}\,(S^{n-1})}$. 这个量仅依

赖 X, x 和黎曼结构. 这个公式的证明在 [18], 318 页可以找到. 高斯 – 博内公式的价值在于提供了一个不变量 $\int_X K_d\delta$, 它不依赖 X 嵌入 E 的方式. 还可以参见 6.9.8 和 11.7.1.

7.6 属于 $C^0(S^1;S^1)$ 的映射的映射度

我们知道在代数拓扑里对于定向连通紧致的流形建立的映射度理论, 仅要求流形是拓扑意义下的, 而对于映射 f 只要求 $f \in C^0(X;Y)$, 对于 $C^p(p \geqslant 1)$ 类的函数这个理论跟前面我们建立的理论一致 (参见 [13], 125 页). 我们对于 $d=1$ 的情形建立这个理论, 以便满足第九章的需要 (参见 9.1.10 和 9.4).

设 X 和 Y 是 C^1 类的紧致流形, 那么 X 和 Y 微分同胚于 S^1 (参见 3.4.1). 于是我们认为 $X = Y = S^1$. 在这种情形下, 理论是初等的, 这是由于我们拥有覆叠映射 $p: \mathbf{R} \to S^1$ (参见 2.4.3), 并且德拉姆群 (同调于 $\mathbf{R}$) 可以代之以作用在 $\mathbf{R}$ 上的群 $\mathbf{Z}$.

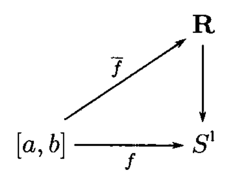
事实上, 更确切地, 我们取

7.6.1 由 $t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = (\cos t, \sin t) \in \mathbf{R}^2$ 定义的 $p: \mathbf{R} \to S^1 = \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$.

如果用 σ 表示 S^1 的典范长度形式, 则 $p^*\sigma = \mathrm{d}t$, 后者是 $\mathbf{R}$ 的典范长度形式 (参见 5.3.17.2 和 5.2.8.4).

7.6.2 引理

*设 $I = [a,b] \in \mathbf{R}, f \in C^0([a,b];S^1)$, 而且 $u \in p^{-1}(f(a))$. 则存在唯一的 $\bar{f} \in C^0(I;\mathbf{R})$, 使得 $p \circ \bar{f} = f$, 并且 $\bar{f}(a) = u$. 把 $\bar{f}$ 称为 f 的一个*提升.



这是下列结果 (它本身也是同伦提升定理的十分特殊的情形: [13], 18 页) 的一个特殊情形:

7.6.3 引理

设 $F \in C^0([0,1] \times [a,b]; S^1), u \in p^{-1}(F(0,a))$. 则存在唯一的

$$\bar{F} \in C^0([0,1] \times [a,b]; \mathbf{R}),$$

使得 $p \circ \bar{F} = F$, 并且 $\bar{F}(0,a) = u$.

事实上, 如果 $\bar{F}$ 存在, 它必然是唯一的. 因为如果 $\bar{F}'$ 和 $\bar{F}$ 都满足引理的条件, 则

$$\bar{F}' - \bar{F} \in C^0([0,1] \times [a,b]; \mathbf{R}), \quad \text{并且} \quad p \circ \bar{F}' = p \circ \bar{F},$$

于是对于所有 $t \in [0,1]$ 和所有 $s \in [a,b]$, 我们有 $(\bar{F}' - \bar{F})(t,s) \in 2\pi\mathbf{Z}$. 映射 $\bar{F}' - \bar{F}$ 是连续的, 在离散拓扑空间取值, 它局部地是常数, 从而特别地在连通的 $[0,1]\times[a,b]$ 上是常数. 于是

$$(\bar{F}' - \bar{F})(t,s) = (\bar{F}' - \bar{F})(0,a) = u - u = 0.$$

$\bar{F}$ 的存在性. 映射 F 在一紧致集合上连续, 必然在那里一致连续, 于是存在 $\varepsilon > 0$, 使得对于任意 $(x,y) \in [0,1]\times[a,b]$, 只要 $\|x-y\| < \varepsilon$, 就有 $\mathrm{d}\,(F(x),F(y)) \leqslant \sqrt{2}$ (这里涉及由 $\mathbf{R}^2$ 的距离诱导的 S^1 上的距离).

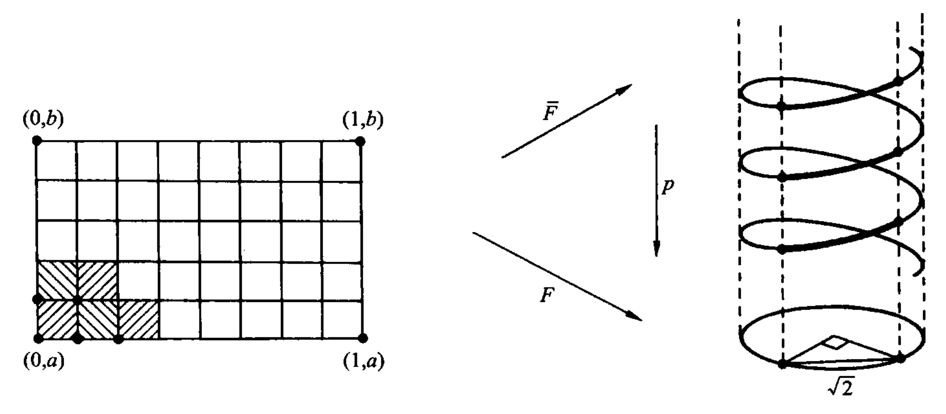


图 7.6.3

而 S^1 的所有长度为 $\pi/2$ 的弧可以被 p 提升 (参见 2.4.3). 用直径小于 ε 的矩形格子分割 $[0,1]\times[a,b]$. 可以在每个矩形上提升 F. 为了得到 $\bar{F}$, 我们安排一个取小矩形的次序: 从左下角的矩形开始, 我们要求 $\bar{F}$ 在小矩形的下边和左边的取值跟映射在前面已经定义的小矩形上的取值相同. 如此确立的 $\bar{F}$ 的相容性来自唯一性. 由于连续性是局部性的, 利用覆叠映射和提升过程从 F 的连续性得到 $\bar{F}$ 的连续性. 这就完成了引理 7.6.3 的证明.

设 $f \in C^0(S^1;S^1)$ 是从 S^1 到 S^1 内的任意一个连续映射. 把第一个 S^1 看作 $\mathbf{R}/L\mathbf{Z}$(其中的 $L>0$), 并且把 $f \in C^0(S^1;S^1)$ 等同于 L- 周期映射 $f \in C^0(\mathbf{R};S^1)$. 设 $t \in \mathbf{R}, u \in p^{-1}(f(t)), \bar{f}$ 是由引理 7.6.2 与 f 在 $[t,t+L]$ 上的限制关联的映射, 于是 $\bar{f}(t) = u$. 由于

$$p(\bar{f}(t+L)) = f(t+L) = f(t) = p(\bar{f}(t)),$$

我们有 $\bar{f}(t+L) - \bar{f}(t) \in 2\pi\mathbf{Z}$. 现在可以证明下列定理:

7.6.4　定理

*沿用前面的记号, 满足条件 $\bar{f}(t+L) - \bar{f}(t) \in 2k\pi$ 的整数 k 既不依赖于 $t \in \mathbf{R}$, 也不依赖于 $u \in p^{-1}(f(t))$. 这个整数 k 称为 $f \in C^0(S^1;S^1)$ 的***映射度***, 记之为 $\deg(f)$; 如此定义的映射度跟 7.3 节的映射度一致.*

1°　*k 不依赖于 u.*

设 $u' \in p^{-1}(f(t))$. 由

$$\bar{f}'(s) = \bar{f}(s) + u' - u$$

定义的映射 $\bar{f}'$ 是 f 的一个提升, 使得 $\bar{f}'(t) = \bar{f}(t) + u' - u = u + u' - u = u'$, 故这是一个对应 u' 的提升. 我们得到 $\bar{f}' - \bar{f}$ 是常数, 于是

$$\bar{f}'(t+L) - \bar{f}(t+L) = \bar{f}'(t) - \bar{f}(t),$$

由此得到

$$\bar{f}'(t+L) - \bar{f}'(t) = \bar{f}(t+L) - \bar{f}(t).$$

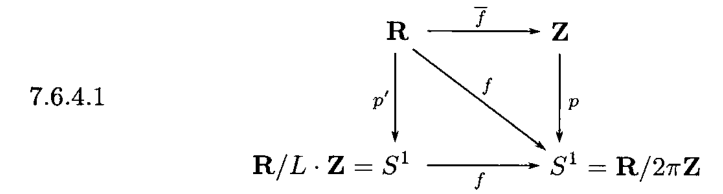
2° k 不依赖于 t.

$\bar{f} \in C^0([t,t+L];\mathbf{R})$ 是 f 在 $[t,t+L]$ 的限制的提升, 这次把引理 7.6.2 应用到 f 在 $[t+L,t+2L]$ 的限制和 $u = \bar{f}(t+L)$, 得到 f 在 $[t,t+2L]$ 的限制的提升 $\bar{f}$, 它是连续的. 如此对于区间 $[t+kL, t+(k+1)L]$ 应用归纳法, 得到 $f \in C^0(\mathbf{R};S^1)$ 的一个提升 $\bar{f} \in C^0(\mathbf{R};\mathbf{R})$

3° 这里定义的映射度跟 7.3 节的定义一致.

这次设 $f \in C^\infty(S^1;S^1)$, 并且用 σ 表示 S^1 的长度形式. 考虑 2° 中构造的映射 $\bar{f}:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$. 把 $f: S^1 \to S^1$ 跟 L- 周期函数 $f:\mathbf{R}\to S^1$ 视作等同是适宜的. 由此得到 $f = p\circ\bar{f}$.

7.6.4.1



并且根据 5.2.8.4,

$$f^*\sigma = (p\circ\bar{f})^*\sigma = \bar{f}^*(p^*\sigma) = \bar{f}^*(\mathrm{d}\,t).$$

而由 2.5.23.2 和 2.5.17.3 得到:

$$\bar{f}^*(\mathrm{d}\,t)(1_t) = \mathrm{d}\,t\left((T\bar{f})(1_t)\right) = \frac{\mathrm{d}\bar{f}}{\mathrm{d}\,t},$$

$\dfrac{\mathrm{d}\bar{f}}{\mathrm{d}\,t}$ 是 $\bar{f}:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 的普通导数. 仍然把 $f: S^1\to S^1$ 和 $f:\mathbf{R}\to S^1$ 视作等同, 则有:

$$\int_{S^1} f^*\sigma = \int_t^{t+L} f^*\sigma = \int_t^{t+L} \frac{\mathrm{d}\bar{f}}{\mathrm{d}\,t}\mathrm{d}\,t = \bar{f}(t+L) - \bar{f}(t) = 2\pi\cdot\deg(f).$$

但是在 7.3 节的意义下, $\int_{S^1} f^*\sigma$ 等于 $\deg(f)\int_{S^1}\sigma$, 故映射度的两个定义一致.

7.6.5　定理 (映射度的同伦不变性)

设 $F \in C^0([0,1] \times S^1; S^1)$, 而 F_s 是映射 $x \mapsto F(s,x)$. 则 $\deg(F_s)$ 是常数. 特别地, 有 $\deg(F_0) = \deg(F_1)$.

把 F 看作 $F \in C^0([0,1] \times \mathbf{R}; S^1)$ 的映射, 并且对于第二个变量是 L- 周期的. 根据引理 7.6.3 把它提升为 $[0,1] \times [0,L]$ 上的 $\bar{F}$. 于是有

$$2\pi \deg(F_s) = \bar{F}_s(L) - \bar{F}_s(0) = \bar{F}(s,L) - \bar{F}(s,0) \in 2\pi\mathbf{Z}.$$

映射 $s \mapsto \bar{F}(s,L) - \bar{F}(s,0)$ 是连续的, 在一个离散空间取值. 而 $[0,1]$ 是连通的, 故在 $[0,1]$ 是常数.

7.6.6　复合映射的映射度

设 $f, g \in C^0(S^1; S^1)$, 则 $\deg(g \circ f) = \deg(g) \cdot \deg(f)$ (参见习题 7.8.19).

7.6.7　例子

设 γ 是 $\mathbf{R}^2$ 的一个圈, 即一个映射 $\gamma \in C^0([a,b]; \mathbf{R}^2)$, 使得 $\gamma(a) = \gamma(b)$. 从 γ 典范地得到 $(b-a)$- 周期的 $\widehat{\gamma} \in C^0(\mathbf{R}; \mathbf{R}^2)$, 由此也可以认为 $\gamma \in C^0(S^1; \mathbf{R}^2)$. 这些交待清楚后, 设 $x \in \mathbf{R}^2, x \notin \gamma([a,b])$, 考虑映射

$$\widetilde{\gamma} : S^1 \ni t \mapsto \frac{\gamma(t) - x}{\|\gamma(t) - x\|} \in S^1.$$

7.6.8　定义

$\widetilde{\gamma}$ 的映射度称为**点 x 对于圈 γ 的指标**.

这个指标在单复变函数论中扮演一个重要的角色; 对于我们来说, 在第九章若当定理的证明中也将起关键的作用: 参见 9.1.10 和 9.2 节.

7.6.9　定理 7.6.5 的逆命题成立 (习题 7.8.20); 这两个结果等价于说 S^1 的基本群 $\pi_1(S^1)$ 同构于 $\mathbf{Z}$: 参见 [13], 13 页.

7.7　抽象流形上向量场的指标

7.7.0　　| 在整个这一节里所有有关对象都是 C^∞类的 |

7.7.1　定义

给定两个流形 X 和 Y; 一个同伦 $F : [0,1] \times X \to Y$, 如果使得对于所有 $t \in [0,1]$, F_t 是一个微分同胚, 则 F 称为是一个**同痕**. 微分同胚 F_0 和 F_1 称为**同痕的**.

同痕关系是一个等价关系.

7.7.2　向量场的转移

给定两个向量场 X 和 $Y, f \in \mathrm{Diff}\,(X; Y)$ 和 X 上的向量场 ξ. ξ 经过 f 的转移, 记作 $f_*\xi$, 是

$$\eta = f_*\xi = Tf \circ \xi \circ f^{-1}.$$

7.7.2.1

$$\begin{array}{ccc} TX & \xrightarrow{Tf} & TY \\ \xi \uparrow \downarrow p & & p \downarrow \uparrow f_*\xi \\ X & \xleftarrow{f^{-1}} & Y \end{array}$$

如果 $f \in \mathrm{Diff}(X;Y), g \in \mathrm{Diff}(Y;Z)$, 则 $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$. 如果 $\xi(x) = 0$, 则点 $x \in X$ 称为向量场 ξ 的一个零点. 如果 $x \in X$ 是向量场 ξ 的一个零点, 并且 $\exists U \in O_x(X)$, 使得 $\forall y \in U - \{x\}$ 有 $\xi(y) \neq 0$, 则 x 称为 ξ 的一个孤立零点.

7.7.3 引理 (指标对于微分同胚的不变性)

设 $U, U' \in O(\mathbf{R}^n), f \in \mathrm{Diff}(U;U')$, 而 ξ 是 U 上的一个向量场, $x_0 \in U$ 是其孤立零点. 则 $f(x_0)$ 是 $\eta = f_*\xi$ 的孤立零点, 并且

$$\mathrm{indice}_{x_0}\xi = \mathrm{indice}_{f(x_0)}\eta.$$

根据这个引理, 可以给出

7.7.4 定义

*设 X 是一个流形, 而 ξ 是 X 上的一个向量场, x_0 是其孤立零点. 称 $\mathrm{indice}_{\varphi(x_0)}(\varphi_*\xi)$ 为 ξ 在 x_0 的**指标, 记作** $\mathrm{indice}_{x_0}\xi$. 这里 (U,φ) 是 X 在 x_0 的一个坐标卡.*

这里定义的指标不依赖坐标卡的选取. 事实上, 如果 (V,ψ) 是 X 在 x_0 的另一个坐标卡, 由于 $\psi \circ \varphi^{-1} \in \mathrm{Diff}(\varphi(U);\psi(V))$, 根据引理 7.7.3, 得

$$\mathrm{indice}_{\varphi(x_0)}(\varphi_*\xi) = \mathrm{indice}_{\psi(x_0)}(\psi_*\xi).$$

为了证明 7.7.3, 我们预先需要:

7.7.5 引理

$\mathbf{R}^n$ 的一个星形开集上的所有保持原点和定向的微分同胚都同痕于恒等映射.

设 $U \in O(\mathbf{R}^n), f \in \mathrm{Diff}(U;f(U)), f(0) = 0$. 由

$$\begin{cases} F(t,x) = \dfrac{f(t \cdot x)}{t} & \forall t \in (0,1], \quad \forall x \in U; \\ F(0,x) = f'(0)(x) & \forall x \in U. \end{cases}$$

定义 $F : [0,1] \times U \to \mathbf{R}^n$.

对于每个 $t \in [0,1], F_t$ 是微分同胚. 留下的是要确信 7.4.1 的条件是满足的. 而这可以由类似于 4.2.13 的表达式 $f = \sum_i x_i g_i$ 得到, 所不同的是现在 g_i 取向量值.

这样就推知 f 同痕于 $f'(0) \in L(\mathbf{R}^n;\mathbf{R}^n)$, 并且 $f'(0)$ 保持定向. 而保持定向的 $\mathbf{R}^n$ 的同构的线性群 $\mathrm{Isom}^+(\mathbf{R}^n;\mathbf{R}^n)$ 是连通的, 因为这是 $\mathbf{R}^{n^2}$ 的子空间, 从而是道路连通的 (参见 2.2.13); 对于这种连通性, 例如参见习题 7.8.22. 一个在 $\mathrm{Isom}^+(\mathbf{R}^n;\mathbf{R}^n)$ 内的弧提供 $f'(0)$ 和 id_U 之间的一个同痕.

引理 7.7.3 的证明.

首先假定 f 保持定向; 可以设 $x_0 = 0$, 并且添加条件 $f(0) = 0$, 通过缩小 U, 可以设 U 是星形的. 根据 7.7.5, 存在 f 和 id_U 之间的一个同痕, 即一族 $F_t \in \mathrm{Diff}\,(U; F_t(U)), t \in [0,1]$. 参照 7.4.16, 由 $[0,1]$ 和球的紧致性以及一致连续性, 存在 $\varepsilon > 0$, 使得对于 $t \in [0,1], \eta_t = (F_i)_*\xi$ 在 $B(0,\varepsilon) - \{0\}$ 上不取零值. 现在只需利用定义 7.4.16 和映射度对于同伦的不变性, 就可以确信 $\mathrm{indice}_0\eta_t$ 是常数. 特别地, 得到 $\mathrm{indice}_0\eta_0 = \mathrm{indice}_0 f_*\xi = \mathrm{indice}_0\eta_1 = \mathrm{indice}_0\xi$. 再假设 f 反转定向, 引入对于 $\mathbf{R}^n$ 的任意超平面的对称映射 ρ, 用 $\rho_*\xi$ 代替 ξ, 用 $f \circ \rho^{-1}$ 代替 ρ, 而 $f \circ \rho^{-1}$ 保持定向. 我们有 $\mathrm{indice}_0(\rho_*\xi) = \mathrm{indice}_0\xi$ 和 $f_*\xi = (f \circ \rho^{-1})_*(\rho_*\xi)$, 这就归结到保持定向的情形. 引理 7.7.3 至此证毕.

7.7.6 有关知识

现在知道了如何定义流形上的一个向量场在一个孤立零点的指标, 自然会问是否对于流形有一个类似于定理 7.4.18 的结果. 果然有下列定理, 我们承认而不给予证明:

7.7.6.1 定理

设 X 是一个紧致流形, ξ 是 X 上的向量场, 它有孤立零点 $x_1, \cdots, x_n$, 如果用 $\chi(X)$ 表示 X 的欧拉示性数, 则

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{indice}_{x_i}\xi = \chi(X).$$

如果流形带边界, 向量场在边界都是外出的, 则定理保持有效. 我们已经遇到这个定理的两个特殊情形:

(i) 7.4.18. 这个情形是 $X = \bar{B}(0,1)$, 于是根据 4.2.24.2 和 5.6.1, $\chi(X) = 1$. 而 $(-1)^d$ 来自于必须把 ξ 换成 $-\xi$, 以便得到在边界上的外出向量场, 这就要在指标前面乘以 $(-1)^d$.

(ii) 7.4.5. 这个情形是 $X = S^d$, 于是根据 4.2.24.2 和 5.7.1, $\chi(X) = 1 + (-1)^d$.

定理 7.7.6.1 的证明在 [19], 32 至 41 页可以找到, 读者领会其内容不会遇到困难:2.7 节的管形邻域起着关键作用. 对于 $d = 2$ 的情形, 还可以参见 11.7.4.

7.7.7 引理 7.7.5 的一个应用

这个结果将在 9.8 节用到, 在某些情形下它提供了指标的一个便捷计算方法.

7.7.8 命题

设 ξ 是 $U \in O(\mathbf{R}^n)$ 上的一个向量场, x_0 是它的一个孤立零点; 再假定 $\xi'(x_0) \in \mathrm{Isom}\,(\mathbf{R}^n; \mathbf{R}^n)$. 则

$$\begin{cases} \mathrm{indice}_{x_0}\xi = 1 & \text{如果 } J_{x_0}(\xi) > 0, \\ \mathrm{indice}_{x_0}\xi = -1 & \text{如果 } J_{x_0}(\xi) < 0. \end{cases}$$

这里 ξ 看作一个映射 $U \to \mathbf{R}^n$, 而 J 表示通常的雅可比行列式; 参见 0.2.8.9. 为了证明, 只需注意在 x_0 的邻域内 ξ 是一个微分同胚. 于是如果 ξ 保持定向, 即

$J_{x_0}(\xi) > 0$, 则存在 ξ 与 id_U 之间的一个同痕映射. 每个 F_t 可以看作以 x_0 为孤立零点的向量场, 而映射度对于同伦的不变性蕴涵

$$\mathrm{indice}_{x_0} F_0 = \mathrm{indice}_{x_0} \xi = \mathrm{indice}_{x_0} F_1 = \mathrm{indice}_{x_0}(\mathrm{id}_U) = 1.$$

如果反转方向, 用 ρ 表示对于一个超平面的对称映射, 考虑 $\xi \circ \rho$ 就归结为前面的情形. 命题得证.

7.8 习 题

除非做相反的明确申明, 所有有关对象是 C^∞ 的, 并且流形是定向的

7.8.1 设 X 是一个 d 维定向紧致流形, 未必是连通的, 计算 $R^d(X)$.

7.8.2 用两个不同的方式证明 7.3.4.

7.8.3 设 X 是一个紧致流形, Y 是一个同样维数的紧致定向流形, 而 f 是从 X 到 Y 内的映射, 在所有正则点保持定向. 证明如果 f 不是满射的, 则 f 只有临界点.

7.8.4 设 f 和 g 是从 X 到 S^d 内的两个映射, 使得对于 X 内的所有 x 有 $\|f(x) - g(x)\| < 2$ (这里取 $\mathbf{R}^{d+1}$ 内的范数). 证明 f 和 g 是同伦的.

如果 $\dim X < d$, 证明从 X 到 S^d 内的所有映射同伦于一个常值映射.

7.8.5 计算图 7.4.14 中的曲线对的交错数.

7.8.6 计算图 7.8.6 中的曲线对的交错数. 其中的环形螺线管有 n 圈.

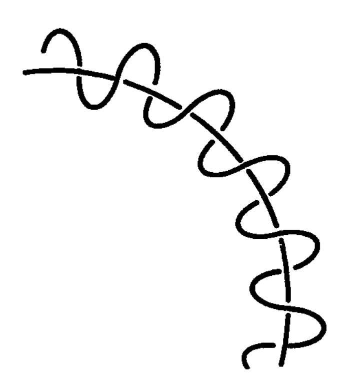


图 7.8.6

7.8.7 推广定理 7.4.18 到下列情形: 在 $B(0,1)$ 内挖一个球形洞, 而向量场沿洞是进入的.

7.8.8 设 f 是从 S^d 到 S^d 内的一个映射, 使得 $\deg(f) \neq (-1)^{d+1}$, 证明 f 至少有一个不动点.

7.8.9 证明从 S^d 到 T^d 内的所有映射的映射度为零. 如果 X 是 d 维连通紧致流形, 并且对于一个整数 $k(0<k<d), R^k(X)=0$, 则所有从 X 到 T^d 内的映射的映射度都是零.

7.8.10 设 S^2 是 $\mathbf{R}^3$ 内的方程为 $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$ 的球面; 用 s^+ 和 s^- 表示极分别为 $(0,0,1)$ 和 $(0,0,-1)$ 的在平面 $x_3=0$ 上的球面投影, 并且令 $z=x_1+ix_2$. 对于所有从 $\mathbf{C}$ 到 $\mathbf{C}$ 内的多项式映射 P, 对应一个从 S^2 到 S^2 内的映射 $\bar{P}$, 其定义是

$$\text{若 } x\neq(0,0,1), \bar{P}(x)=(s^-)^{-1}(P(s^+(x))), \text{ 而 } P(0,0,1)=(0,0,-1).$$

a) 证明 $\bar{P}$ 是从 S^2 到 S^2 内的一个 C^∞ 态射.

b) 如果 $P(z)=z^n$, 则 $\bar{P}$ 的映射度是 n.

c) 如果 Q 是一个 n 阶多项式, 则 $\bar{Q}$ 同伦于在 $b)$ 中考虑的映射 $\bar{P}$. 由此得到达朗贝尔定理的一个证明.

7.8.11 设 M 是默比乌斯带, 它是下列从 $[0,4\pi]\times[0,3/4]$ 到 $\mathbf{R}^3$ 内的映射的像集:

$$(\theta,r)\mapsto\left(\cos\theta+r\cos\theta\cos\frac{\theta}{2},\sin\theta+r\sin\theta\cos\frac{\theta}{2},r\sin\frac{\theta}{2}\right).$$

令 $r=1/4$ 和 $r=3/4$ 得到两条闭曲线, 求它们的交错数. 画一个图 (比传统的画面更直观: 参见 [34], 294 至 297 页).

7.8.12 设 f 是从 S^d 到 S^d 内的映射. 证明在以下两个情形下, f 至少把一对对径点变换成对径点:

a) d 是偶数;

b) $\deg(f)$ 是奇数.

7.8.13 假定 f 和 g 是满足下列条件的两条曲线: 存在 $\mathbf{R}^2$ 的一个 $\mathbf{R}^2$ 上的包含 $B(0,1)$ 的开集 U, 一个从 U 到 $\mathbf{R}^3$ 内的嵌入 F, 使得 $F|_{S^1}=f, F(B(0,1))\bigcap g(S^1)=\{x_1,\cdots,x_n\}$ 是有限集, 并且对于每个 x_i,

$$T_{x_i}(F(B(0,1)))\bigcap T_{x_i}(g(S^1))=\{0\}.$$

如果 $T_{x_i}(F(B(0,1)))$ 的一个正的基底和 $T_{x_i}(g(S^1))$ 的一个正的基底的并集是 $\mathbf{R}^3$ 的一个正的基底, 则令 $\operatorname{sign}(x_i)=+1$, 否则令 $\operatorname{sign}(x_i)=-1$.

证明 $\operatorname{entrel}(f,g)=\sum_i \operatorname{sign}(x_i)$.

(在 $B(0,1)$ 内在 $F^{-1}(x_i)$ 周围放置以 $F^{-1}(x_i)$ 为中心的两两不交的小圆盘 C_i, 并且对于带边区域 $(\bar{B}(0,1)-\bigcup_i C_i)\times S^1\subset U\times S^1)$ 应用斯托克斯公式; 留下要证的则是对于任意 g 和在 $g(S^1)$ 的点的周围的小圆周有 $\operatorname{entrel}(f,g)=\pm1$, 正负号需要明确).

7.8.14 处于平衡中的旅行者

在 $\mathbf{R}^3$ 内分布一个均匀的重力场, 一个被模拟成固体平板的车在水平平面 $z=0$ 上运动. 其运动是给定的, 并且假定是 C^∞ 的. 我们研究一个质量均匀分布的直棒 AB 的运动, 它的一个端点 A 固定在车的地板上. 证明存在 B 的一个初始位置, 使得在运动的过程中, 它的竖坐标保持严格正的.

7.8.15 安培定理

设 f,g 是 7.4.7 意义下的曲线对, 只不过这里的 f,g 是从 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}^3$ 的 2π- 周期函数.

a) 用 f,g 的坐标和它们的导数表示 entrel(f,g).

b) 假定曲线 f 是电流强度为常值 i 的电流通过的回路. 由这个回路在点 p 产生的磁场是

$$i\int_0^{2\pi}\frac{(f(t)-p)}{\|f(t)-p\|^3}\wedge f'(t)\mathrm{d}\,t.$$

计算 "沿 g 的磁通量", 由此证明安培定理.

c) 假定 $g([0,2\pi])$ 是一个与 $f([0,2\pi])$ 不相交的曲面的定向边界. 证明 entrel$(f,g)=0$.

7.8.16 如果 X 是 E 的子流形, 也是 $E\times F$ 的子流形 (这里 F 是任意欧几里得空间并且在 $X\times\{0\}\subset E\times F$ 的形式下). 证明

$$K_d^{X,E\times F}=(\text{普适数值})K_d^{X,E},$$

其中按照 X 嵌入 E 内或 $E\times F$ 内而把 K_d 记作 $K_d^{X,E}$ 或 $K_d^{X,E\times F}$.

7.8.17 对于充分小的 ε 和韦罗内塞曲面 $X\subset\mathbf{R}^6$:

$$X=\{(x^2,y^2,z^2,\sqrt{2}yz,\sqrt{2}zx,\sqrt{2}xy):x^2+y^2+z^2=1\},$$

(参见 6.10.20), 计算 $\mathrm{Vol}\,(TUB^\varepsilon X)$.

7.8.18 当 $\dim X=2$ 时计算 $\mathrm{Vol}\,(\partial(TUB^\varepsilon X))$(参见 6.10.22).

7.8.19 对于 $f,g\in C^0(S^1;S^1)$, 证明 $\deg(g\circ f)=\deg(g)\cdot\deg(f)$.

7.8.20 如果 $f,g\in C^0(S^1;S^1)$ 使得 $\deg(f)=\deg(g)$, 证明 f 和 g 同伦.

7.8.21 设 $U\in O_0(\mathbf{R}^n)$, 而 $f\in C^\infty(U)$, 使得 $f'(0)=0$. 证明 0 是 f 的非退化临界点, 则 0 是向量场 $\widehat{f}:x\mapsto(f'(x))^\#$ 的孤立零点, 这里#是在 $\mathbf{R}^n$ 的对偶空间和 $\mathbf{R}^n$ 之间的典范同构. 给出一个联系 $\mathrm{indice}_0 f$ 和 $\mathrm{indice}_0\widehat{f}$ 的公式.

7.8.22 证明 $\mathrm{Isom}^+(\mathbf{R}^n;\mathbf{R}^n)$ 是连通的.

7.8.23 设 X 是连通紧致流形, δ,δ' 是 X 上的两个密度, 使得 $\int_X\delta=\int_X\delta'$. 是否存在 X 上的一个微分同胚 f, 使得 $f^*\delta'=\delta$?

第八章　曲线的局部理论

这一章我们研究弧, 即 $\mathbf{R}$ 的一个区间到有限维仿射或向量空间内的浸入映射 (8.1.1). 我们对于弧定义点、切线、密切平面和凸性的概念 (8.2).

此外, 如果我们是在欧几里得空间内, 那么就可以定义长度、弧长参数表示 (8.3). 在有向平面弧的情形, 可以定义代数曲率, 对于平面弧无需再引入其他不变量, 其充足的理由是: 不计位移, 平面弧由它作为弧长的函数的曲率刻画特征 (8.5.7).

对于 3 维欧几里得空间的弧, 在曲率之外, 还可以定义挠率: 在这类空间里的弧, 不计位移, 由作为弧长的函数的曲率和挠率刻画特征 (8.6.13).

事实上, 必须区分参数弧 (一个开区间到空间内的浸入映射) 和几何弧, 后者是参数弧的等价类 (8.1.4). 前述的所有概念都应该重复两次; 为了精简本章篇幅, 我们并不处处给出针对参数弧以及针对几何弧这两个关联的概念.

8.0 引　　言

基于多种理由 (比如运动学的), 我们所研究的作为数学对象的曲线比有限维仿射空间的 1 维子流形更广泛.

在整个这一章里, 取 E 为有限维向量空间 (或关联到向量空间 $\overrightarrow{A}$ 的仿射空间 A). 我们将定义曲线作为从 $\mathbf{R}$ 的一个开区间 I 到一个向量空间 E 的 C^p 类的浸入: 如果 $f \in C^p(I;E)$, 这里 $p \geqslant 1$, 是一个浸入, 则 (参见 0.2.24) 对于 I 的所有 t, 存在 $J \in O_t(I)$, 使得 $f(J)$ 是 E 的 1 维子流形.

于是允许曲线有重点或更复杂的点, 但是对于不是由浸入映射定义的曲线, 即使它们是 C^∞ 类的也不予以考虑, 因为对于它们的研究既不简单, 又无系统, 特别说来, 它们的奇异性也无从分类.

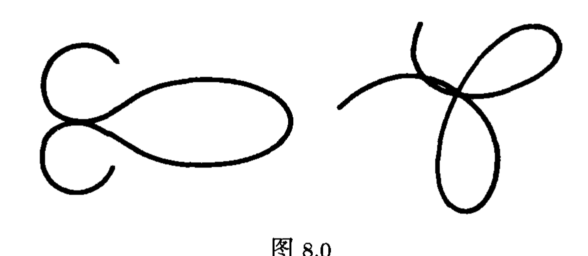


图 8.0

8.0.1　例子

8.0.1.1

$$f\begin{cases} t \mapsto (0, e^{1/t}) & \text{若 } t < 0, \\ 0 \mapsto (0,0) & \\ t \mapsto (e^{-1/t}, 0) & \text{若 } t > 0. \end{cases}$$

我们定义了 $f \in C^\infty(\mathbf{R};\mathbf{R}^2)$, 它在 $t = 0$ 不是一个浸入, 其图形是下面图 8.0.1 的左图.

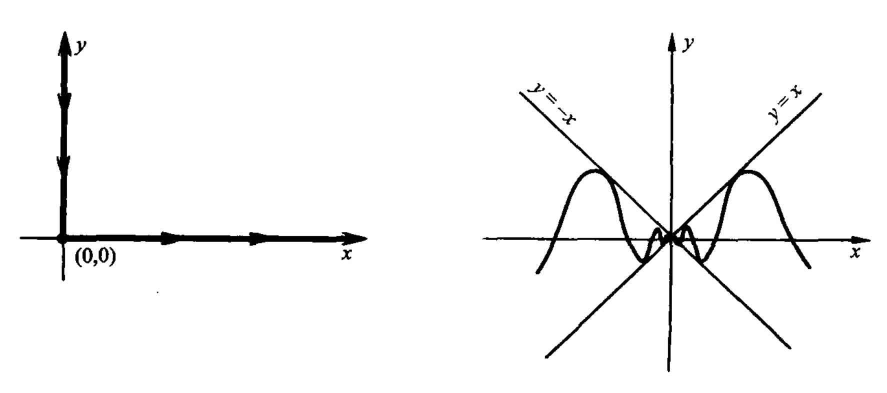


图 8.0.1

8.0.1.2 由

$$f\begin{cases} t\mapsto (e^{-1/t}, e^{-1/t}\sin(e^{1/t})) & 若\ t>0, \\ 0\mapsto (0,0) & \\ t\mapsto (e^{1/t}, e^{1/t}\sin(e^{-1/t})) & 若\ t<0. \end{cases}$$

定义的映射 $f\in C^\infty(\mathbf{R};\mathbf{R}^2)$ 的像夹在直线 $y=\pm x$ 之间, 在 $(0,0)$ 有无穷多条切线. 在 $t=0$, 这不是一个浸入.

8.0.2 注释

8.0.2.1 C^0 曲线的理论也是颇为复杂的 (例子: 皮亚诺曲线). 反之, 如果 $p\geqslant 1, I$ 是一个开区间, E 是一个向量空间, $f\in C^p(I;E)$, 当 $\dim E\geqslant 2$ 时, $f(I)$ 的测度是零: 参见 0.4.4.5.

对于具有如下性质的 C^0 类曲线, 有一个相当丰富而长的理论: 它是单射, 而且如果曲线由 $f\in C^0([a,b];E)$ 给定, f 是从 $[a,b]$ 到其像集的一个同胚, 参见 [20].

8.0.2.2 未必是浸入的映射的奇异性在下列情形下是可以分类的: C^ω 类 (即实解析的), 一般 C^p 类和代数曲线类.

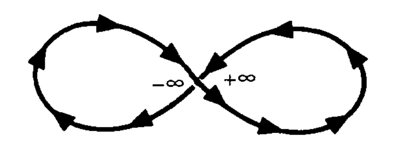
8.0.2.3 作者们经常称一个配对 (I,f) 为参数弧, 其中 I 是 $\mathbf{R}$ 的区间, $f\in C^p(I;E), p\geqslant 1$, 而 E 是向量空间. 如果 f 在 t 是一个浸入, 则说曲线在 t 是正则的. 对于我们来说, 参数弧是所有点都是正则点的参数弧.

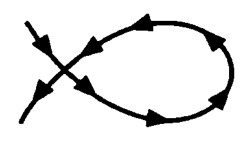
8.1 定 义

8.1.1 定义

一个配对 (I,f), 如果满足下列条件: I 是一个开区间, $f\in C^p(I;E), E$ 是有限维向量空间, 而 f 是一个浸入 (即 $f'(t)\neq 0, \forall t$), 则称为 C^p 类**参数弧**.

8.1.1.1 于是对于 I 的每个 t, 存在 $J\in O_t(I)$, 使得 $f(J)$ 是 E 的 1 维子流形, 并且 $f|_J\in \mathrm{Diff}\,(J;f(J))$. 但是 $f(I)$ 一般不是子流形, 即使 f 是单射: 参见 2.1.5. 这里是对应参数弧的像集, 但它们不是子流形.





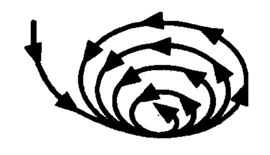


图 8.1.1

8.1.2 注释

必须强调的是, 即使 $f(I)$ 是 E 的子流形, $f(I)$ 也未必是一个参数表示, 因为 f 一般不是单射 (例如圆周的情形, 它由配对 $(\mathbf{R},f)$ 定义, 这里 $f:t\mapsto(\cos t,\sin t)$).

不过, 如果 f 是单射, 那么它是 $f(I)$ 整体参数表示 (在 2.1.8 的意义下): 这可从 0.2.24 推出.

8.1.3 例子

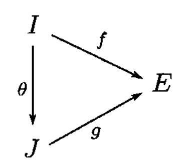
如果 E 和 E' 是两个向量空间, 如果 (I, f) 是 E 的一个参数弧, 并且 $F \in \operatorname{Isom}(E, E')$, 那么 $(I, F \circ f)$ 是 E' 的一个参数弧, 称为 (I, f) 在 F 下的像.

8.1.4 定义

两个 E 的 C^p 类的参数弧 (I, f) 和 (J, g) 称为是 C^p- 等价的, 如果存在 $\operatorname{Diff}(I; J)$ 中的 θ, 使得 $f = g \circ \theta$. E 的 C^p **类几何弧**是参数弧的等价类.

可以直接验证上面定义的确实是一个等价关系. 如果 C 是一个几何弧, 而 $(I, f) \in C$, 则说 (I, f) 是 C 的一个参数表示.

8.1.4.1



8.1.5 注释

8.1.5.1 参数弧的像不足以确定几何弧.

如果 (I, f) 和 (J, g) 是几何弧 C 的两个, 参数表示, 于是有 $\theta \in \operatorname{Diff}(I; J)$, 使得 $f = g \circ \theta, f(I) = g(J)$: 像集是相同的. 但是反之不真; 例如, $I = \mathbf{R}, f : t \mapsto (\cos t, \sin t)$, 而 $J = (-\pi/2, 5\pi/2), g : t \mapsto (\cos t, \sin t)$, 则 $f(I) = g(J) = S^1$. 但是 (I, f) 和 (J, g) 不可能是等价的: 为了确信这一断语, 其实只需考虑

$$f^{-1}((1,0)) = 2\pi\mathbf{Z} \quad \text{和} \quad g^{-1}((1,0)) = \{0, 2\pi\}.$$

看清此事实的最好方法是注意到对于 (I, f), 所有点都是无穷重的, 而对于 (J, g), 所有点的重数是 1 或 2 (参见 8.1.8).

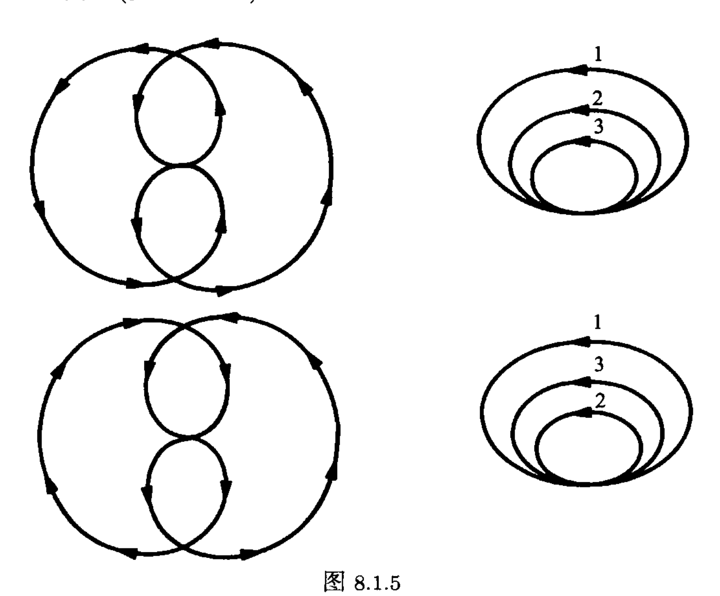


图 8.1.5

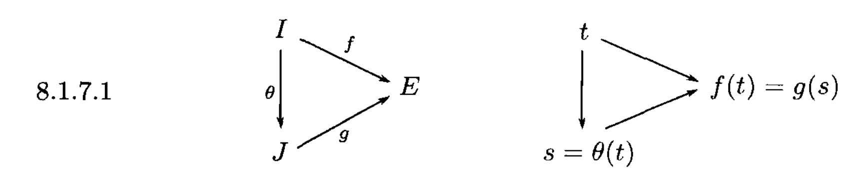
图 8.1.5 提供了另外的不同的几何弧却有相同的像的例子

8.1.6　例子

如果 E 和 F 是两个向量空间, $\Phi \in \operatorname{Isom}(E;F)$, 而 C 是 E 的一个几何弧, 由此得到 F 的一个几何弧, 记作 $\Phi \circ C$, 称为 C 在 Φ 下的像, 其一个参数表示是 $(I, F\circ f)$, 这里 (I,f) 是 C 的一个参数表示.

8.1.7　定义

设 C 是几何弧, 我们要定义三元组 (I,f,t) 的等价关系 $\sim$, 其中 $(I,f)\in C, t\in I$, 类似取 (J,g,s). 当且仅当存在 $\theta \in \operatorname{Diff}(I;J)$, 使得 $s=\theta(t)$, $f=g\circ\theta$, 则说 (I,f,t) 和 (J,g,s) 等价, 记作 $(I,f,t)\sim(J,g,s)$. 这种三元组的一个等价类称为几何弧 C 的**点**. E 的公共元素 $f(t)=g(s)$ 称为 C 的这个点 m 的**像**, 记作 $\textcircled{m}$. 这些像的集合称为 C 的像.



有时候, 对于 $p\in E$, 可能关联多个点 $m\in C$, 使得 $p=\textcircled{m}$; 但是如果 $(I,f)\sim(J,g), p\in E$, 则有 $f^{-1}(p)=\theta^{-1}(g^{-1}(p))$, 于是集 $f^{-1}(p)$ 和 $g^{-1}(p)$ 有相同的基数, 由此得:

8.1.8　定义

基数$\#\,(f^{-1}(\textcircled{m}))$ 称为一个点 $m\in C$ 的重数; 一个点称为**简单的** (**多重的**, **二重的**, **三重的**, $\cdots$), 如果其重数是 $I(>1$, 是 2, 是 $3, \cdots)$.

8.1.8.1　即使 C 的像是一个子流形, 曲线还是可以有重点, 参见 8.1.5.1.

8.1.8.2　重数可能为无穷. 不过, 根据 8.1.1.1, $f^{-1}(\textcircled{m})$ 由 I 内的孤立点组成, 于是是可数的. 从而点的重数或是一个整数, 或是具有 $\mathbf{N}$ 的基数的 ∞.

8.1.8.3　对于简单点, 像确定点. 而在重点, 宁肯把 C 的一个点看作 C 的经过这个点的像的一支.

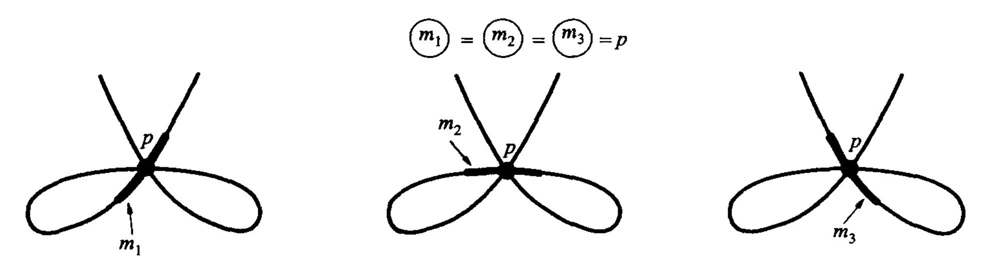


图 8.1.8

为了推广 1 维子流形的概念我们引进了 (曲线) 弧的概念, 现在明确不同对象之间的关系.

8.1.9 命题

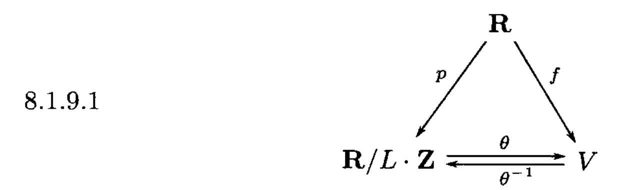
向量空间 E 的所有 1 维连通子流形对应一个几何弧.

事实上, 设 E 的维数 $d \geqslant 1$, 而 V 是其 $C^p(p \geqslant 1)$ 类 1 维连通子流形, 我们知道 (参见 3.4.1) V 微分同胚于 $\mathbf{R}$ 或 S^1. 在定理 3.4.1 的证明中, 曾经看到:

在第一种情形, 即 V 微分同胚于 $\mathbf{R}$, 存在 V 的整体弧长参数表示, 即一个配对 (I, f), 这里 $f \in \mathrm{Diff}\,(I; V)$ (参见 3.4.6). 两个这样的弧长参数表示是等价的 (在 8.1.4 的意义下): 即如果 $g \in \mathrm{Diff}\,(J; V)$, 则有 $g^{-1} \circ f \in \mathrm{Diff}\,(I; J)$. 于是这两个弧长参数表示定义同一个几何弧, 此几何弧典范地关联到 V.

在第二种情形, V 微分同胚于 S^1, 并且存在周期弧长参数表示 $f : \mathbf{R} \to V$ (参见 3.4.6). 设 $(\mathbf{R}, f)$ 和 $(\mathbf{R}, g)$ 是这样的弧长参数表示. 由于 $f : \mathbf{R} \to V$ 是周期的, 它可以做如下的分解

8.1.9.1



其中 $U = \mathbf{R}/L{\cdot}\mathbf{Z}$, 而 L 是周期. 7.6 节发展的理论可以应用到覆叠映射 $\mathbf{R} \xrightarrow{p} U$, 以致所有从一个区间到 U 内的映射可以提升, 并且在原点限定之后是唯一的. 经过 θ 的转换, 就得到对于 $\mathbf{R} \xrightarrow{f} V$ 的提升的存在性和唯一性.

特别对于 $g : \mathbf{R} \to V$ 通过 $\mathbf{R} \xrightarrow{f} V$ 提升为 $\bar{g} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$:

8.1.9.2



我们取 t 使得 $g(t) = f(0)$, 并且要求 $\bar{g}(t) = 0$. 同样通过 $\mathbf{R} \xrightarrow{g} V$ 提升 f 成 $\bar{f}$, 并且要求 $\bar{f}(0) = t$:

8.1.9.3



那么 $\bar{g} \circ \bar{f} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 使得 $f \circ (\bar{g} \circ \bar{f}) = (f \circ \bar{g}) \circ \bar{f} = g \circ \bar{f} = f$, 即映射图

8.1.9.4



是交换的. 此外 $(\bar{g}\circ\bar{f})(0)=\bar{g}(t)=0$. 由于 $\mathrm{id}_{\mathbf{R}}$ 同样使得 $f\circ\mathrm{id}_{\mathbf{R}}=f$ 和 $\mathrm{id}_{\mathbf{R}}(0)=0$, 故得 (根据提升的唯一性) $\bar{g}\circ\bar{f}=\mathrm{id}_{\mathbf{R}}$. 同样证明 $\bar{f}\circ\bar{g}=\mathrm{id}_{\mathbf{R}}$. 于是 $\bar{g}\in\mathrm{Diff}\,(\mathbf{R};\mathbf{R})$. 而 $f\circ\bar{g}=g$; 故两个弧长参数表示定义关联到 V 的同一条几何弧.

8.1.10 定向

设 $\theta\in\mathrm{Diff}\,(I;J)$, 并且 $\theta'(t)\neq 0$; 而 I 是连通的, 故 $\theta'(t)$ 保持固定符号. 如果用 $\mathrm{Diff}^{+}(I;J)$ 表示递增 (即 $\theta'(t)>0$) 微分同胚的集合, 而用 $\mathrm{Diff}^{-}(I,J)$ 表示递减 (即 $\theta'(t)<0$) 微分同胚的集合, 则导致:

8.1.11 定义

两个弧 $(I;f)$ 和 (J,g) 称为**严格等价的**, 如果存在 $\theta\in\mathrm{Diff}^{+}(I;J)$, 使得 $f=g\circ\theta$. 对于这个严格等价关系的参数弧的一个等价类称为**定向几何弧**.

一个几何弧恰好对应两个定向几何弧. 一个参数弧产生一个定向几何弧, 使得所考虑的参数表示属于这个定向几何弧.

如果 V 是 E 的一个定向连通子流形, 如果所取的诸参数表示是正的, 那么命题 8.1.9 中的对应的定向是一致的.

8.2 仿射不变量: 切线, 密切平面, 凸性

8.2.1 切线

在这一节, 曲线至少是 C^1 类的.

8.2.1.1 定义

设 (I,f) 是实向量空间 E(对应的, 仿射空间 A) 的一个 C^1 类的参数弧. 弧 (I,f) 在 I 的点 t 的**切线**是 E 的 1 维向量子空间 $\mathbf{R}f'(t)=\{sf'(t):s\in\mathbf{R}\}$(对应的, A 的仿射子空间 $f(t)+\mathbf{R}f'(t)$).

8.2.1.2 注释

我们把 $f'(t)\in L(\mathbf{R};E)$ 与 $f'(t)\cdot 1$ 等同. 我们有 $f'(t)\neq 0$, 这是因为按照定义 f 是一个浸入. 此外, 十分严格地说, 由于 $f(I)$ 局部地是 E 的一个子流形, 如果 θ 是在 $f(t)$ 的这个子流形的切空间和 $\mathbf{R}$ 之间的典范同构, 那么 $\mathbf{R}f'(t)$ 是这个局部子流形在 $f(t)$ 的切空间在 θ 下的像.

8.2.1.3 例子

设 $\Phi\in\mathrm{Isom}\,(E;F)$, 而如果 (I,f) 是 E 的弧, 则 $(I,\Phi\circ f)$ 在 t 的切线是 (I,f) 在 t 的切线在 Φ 下的像.

切线的这个概念对应等价关系是保持的, 故可以过度到几何弧: 事实上, 设 C 是几何弧, m 是 C 的一个点. 如果 m 由 (I,f,t) 和 (J,g,s) 表示, 那么存在 $\theta\in\mathrm{Diff}\,(I;J)$, 并且 $f=g\circ\theta, s=\theta(t)$(定义 8.1.7). 我们有 $f'(t)=(g\circ\theta)'(t)=g'(\theta(t))(\theta'(t))=\theta'(t)g'(s)$, 其中由于 θ 是微分同胚, $\theta'(t)\neq 0$; 从而 $\mathbf{R}\cdot f'(t)=\mathbf{R}\cdot g'(s)$.

由此得到:

8.2.1.4 定义

给定向量空间 E 的 (对应的, 仿射空间 A 的) 一个几何弧 C 及 C 的一个点 m, 其代表是三元组 (I,f,t). 则子空间 $\mathbf{R}f'(t)$(对应的, 仿射子空间 $f(t)+\mathbf{R}f'(t)$) 仅依赖几何弧 C 和点 m, 称之为 C 在 m 的**切线**, 记作 tg_mC.

8.2.1.5 如果 C 是 E 的一个几何弧, $\Phi\in\mathrm{Isom}(E;F)$, 则

$$\mathrm{tg}_{\Phi(m)}(\Phi\circ C)=\Phi(\mathrm{tg}_mC).$$

这样我们关于本节标题中的词汇不变量中的 "不变" 有两层意思:

a) 表示不依赖参数表示;

b) 切线在映射 $\Phi\in\mathrm{Isom}(E;F)$(以及同样在仿射空间的曲线和仿射意义下的切线的情形的同构) 下保持.

8.2.1.6 定向.

如果几何弧 C 是定向的 (参见 8.1.11), m 是 C 的点, 设此点有两个三元组 (I,f,t) 和 (J,g,s) 表示, $\theta\in\mathrm{Diff}(I;J)$, 使得 $f=g\circ\theta$ 和 $\theta(t)=s$, 并且 $\theta'(t)>0$, 那么子空间 $\mathbf{R}f'(t)=\mathbf{R}g'(s)$ 由 $f'(t)$ 和 $g'(s)$ 定向, 其方式是等同的.如果 C 是定向的几何弧,那么由 $f'(t)$ 定义的 tg_mC 不依赖参数表示.

经常用箭头指出弧及其切线的一个定向, 这明显是非常方便的:

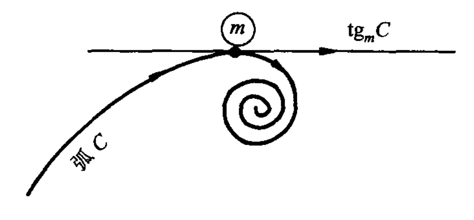


图 8.2.1.6

还可以把一个定向想象为行走的方向.

8.2.1.7 与几何定义的关系

设 E 是一个向量空间, 其 1 维向量子空间等同于投影空间 $P(E)$, 这是 $E-\{0\}$ 对于等价关系 $\sim$ 的商空间, 这里 $x\sim y\Leftrightarrow y=kx, k\in\mathbf{R}^*$. 给 $P(E)$ 配备以商拓扑, 并且记典范投影 $E-\{0\}\to P(E)$ 为 p(如果读者原意, 可以验证: 如果 E 是欧几里得空间, $S(E)$ 是其单位球, 那么 $S(E)$ 关于对径映射 (参见 2.4.12.2) 的商流形当 $E=\mathbf{R}^{n+1}$ 时在集合的意义上正是 $P(E)$, 并且其拓扑跟上面引入的一致).

现在设 (I,f) 是一个参数弧, $t\in I$; 由于 $f'(t)\neq 0$, 所以对于充分接近 t 的 s, 只要 $s\neq t$, 就有 $f(s)\neq f(t)$ (参见 8.1.1.1). 于是有:

8.2.1.8 定理

极限 $\lim\limits_{s\to t,s\neq t}p(f(s)-s(t))$ 在 $P(E)$ 内存在, 并且等于 $p(\mathbf{R}\cdot f'(t))=(I,f)$ 在 $f(t)$ 的切向量.

事实上, 对于充分接近 t 的 s, $s \neq t$, 定义一个映射

$$\theta : s \to \frac{f(s)-f(t)}{s-t};$$

由于 f 是 C^1 类的, 故存在 $\lim\limits_{s\to t, s\neq t} \theta(s) = f'(t)$, 根据商拓扑的定义, 这就证明了定理.

8.2.1.9 对于涉及几何弧的一个类似性质, 参见习题 8.7.1.

8.2.2 密切平面

这里假定弧至少是 C^2 类的.

8.2.2.1 定义

*参数弧 (I,f) 在 t 称为是**双正则的**, 如果 $f'(t)$ 和 $f''(t)$ 是线性无关的, 这里的导数是在通常的意义下计算的.*

8.2.2.2 定义

*称子空间 $\mathbf{R}f'(t)+\mathbf{R}f''(t)$(对应的 $f(t)+\mathbf{R}f'(t)+\mathbf{R}f''(t)$) 是向量空间 E(对应的, 仿射空间 A) 的双正则参数弧 (I,f) 在点 (I,f,t) 的**密切平面**.*

8.2.2.3 例子

如果弧 (I,f) 是平面的, 即存在 E 的 2 维子空间 V 使得 $f(I)\subset V$, 则在一个双正则点的密切平面就是固定的 V. 其逆是平凡的.

8.2.2.4 如果 $\Phi \in \operatorname{Isom}(E;F)$, 则双正则性和密切平面的概念被 Φ 保持.

考虑几何弧 C 的一个点 m, 给定弧的两个参数表示 (I,f) 和 (J,g), 这里存在 $\theta\in\operatorname{Isom}(I;J)$, 使得 $f=g\circ\theta$, 设 m 由 (I,f,t) 和 (J,g,s) 表示, 如果 θ 是 C^2 类的, 则:

8.2.2.5
$$\boxed{f'(t)=\theta'(t)\cdot g'(s)},$$

8.2.2.6
$$\boxed{f''(t)=\theta''(t)\cdot g'(s)+\theta'^2(t)\cdot g''(s)}.$$

由于 $\theta'(t)\neq 0$(θ 是微分同胚), 这就证明了如果 (I,f) 在 t 是双正则的, 则 (J,g) 在 $s=\theta(t)$ 亦然, 并且

$$\mathbf{R}g'(s)+\mathbf{R}g''(s)=\mathbf{R}f'(t)+\mathbf{R}f''(t).$$

这诠释了下列定义的合理性:

8.2.2.7 定义

*给定几何弧 C 的一个代表为 (I,f,t) 的点 m. 如果 (I,f) 在 t 是双正则的, 则说 C 在 m 是**双正则的**. 称 (I,f) 在 t 的密切平面为 **C 在 m 的密切平面**, 记作 $\operatorname{oscul}_m C$.*

对于术语双正则的解释, 参见 8.0.2.3.

8.2.2.8 例子

如果 $\Phi \in \mathrm{Isom}\,(E;F)$, 则

$$\mathrm{oscul}_{\Phi(m)}(\Phi \circ C) = \Phi(\mathrm{oscul}_m C).$$

对于仿射空间的几何弧和仿射意义下的密切平面有类似的结果.

8.2.2.9 几何定义

如果能够在 E 的 2 维向量子空间的集合上安置典范拓扑, 就可以证明如果参数弧 (I,f) 在 t 是正则的, 则在 t 的密切平面是平面 $\mathbf{R}f'(t)+\mathbf{R}(f(s)-f(t))$ 当 s 趋于 t 时的极限, 这里 $s \neq t$. 在 $\dim E = 3$ 的情形这是十分容易的. 为此, 参见习题 8.7.3.

8.2.2.10 凹侧

由于 $\theta'^2(t) \geqslant 0$, 公式 8.2.2.6 表明半平面

$$\mathbf{R}f'(t)+\mathbf{R}_+f''(t) \quad 和 \quad \mathbf{R}g'(s)+\mathbf{R}_+g''(s)$$

重合. 这就验证了下列定义的合理性:

8.2.2.11 定义

*给定几何弧 C 的一个以三元组 (I,f,t) 为代表的点 m. 称半平面 $\mathbf{R}f'(t)+\mathbf{R}_+f''(t)$ 为 C 在 m 的*__凹侧__, 记作 $\mathrm{concav}_m C$. 在仿射空间的情形, 对应的是仿射半平面 $f(t)+\mathbf{R}f'(t)+\mathbf{R}_+f''(t)$.

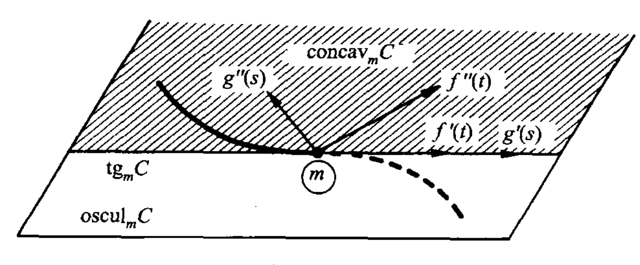


图 8.2.2.11

8.2.2.12 如果 $\Phi \in \mathrm{Isom}\,(E;F)$, 则 $\mathrm{concav}_{\Phi(m)}(\Phi \circ C) = \Phi(\mathrm{concav}_m C)$.

在平面曲线的情形, 我们会发现凹侧有更明确的含义.

8.2.2.13 定义

*在极坐标里研究的平面曲线在不同于坐标系的极点的点, 如果这个极点属于凹侧的仿射开半平面我们说该曲线*__把其凹侧朝向极点.__

以下给出的计算, 得以明确决定由映射 $t \mapsto \rho(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ 表示的曲线凹侧是否朝向极点. 如果基底 $\{-f(t), f'(t)\}$ 和 $\{f''(t), f'(t)\}$ 的方向相同, 即这两个向量配对的行列式 $\omega_0(-f,f')$ 和 $\omega_0(f'',f')$ 符号相同, 则原点将在凹侧, 这里 ω_0 是 $\mathbf{R}^2$ 的典范面积形式 (参见例子 6.4.2). 而

$$f' = \rho'\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + \rho(\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}),$$
$$f'' = (\rho''-\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + 2\rho'(\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}).$$

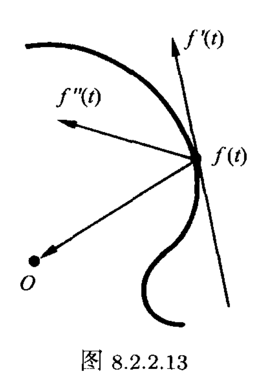


图 8.2.2.13

由于 $\omega_0(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}, \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) = 1$, 我们有

$$\omega_0(-f, f') = -\rho^2 \quad 和 \quad \omega_0(f'', f') = -(\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''),$$

由此得到判别法:

8.2.2.14　在不是极点的双正则点, $\rho \neq 0$, 当 $\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho'' > 0$ 时曲线的凹侧朝向极点.

8.2.2.15　命题 (在双正则点的局部凸性)

给定二维仿射空间 A 的一个几何弧 C 及其一个双正则点 m. 则在 m 的一个邻域内局部地 C 严格地在其凹侧内, 即如果 $(I, f) \in C, (I, f, t) \in m$, 则存在开区间 $J \subset I$, $J \ni t$, 使得对于任意 $s \in J - \{t\}, f(s)$ 属于 C 在 m 的凹侧的开半平面.

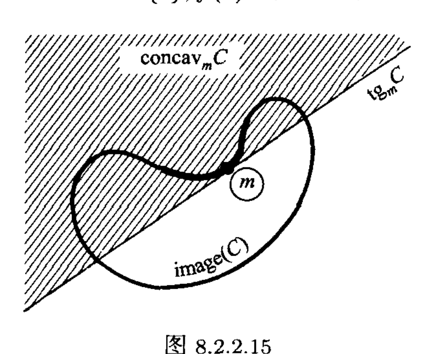


图 8.2.2.15

证明: 令 $u = f'(t), v = f''(t)$; 它们构成 $\vec{A}$ 的一个基底. 在 t 应用泰勒 - 统格公式

$$f(t+h) = f(t) + h \cdot u + \frac{h^2}{2}v + o(h^2),$$

改写为

$$f(t+h) - f(t) = h(1 + o(h))u + \frac{h^2}{2}(1 + o(1))v.$$

于是对于充分小的 $h \neq 0, f(t+h) - f(t)$ 沿 v 的坐标保持是严格正的.

8.2.2.16　注释

双正则性是本质的, 图 8.2.2.16 中左图表明这一点.

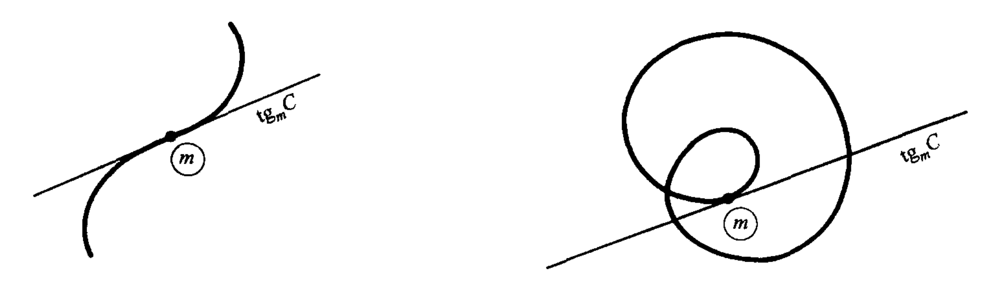


图 8.2.2.16

此外, 图 8.2.2.16 中的右图表明 8.2.2.15 仅仅局部地成立. 这是一个从局部到整体的过渡问题的例子. 在 9.6 节将解决这个问题, 在那里将看到如果 C 是封闭的, 简单的 和处处双正则的, 那么对于所有 $m \in C$, 它整体在 $\mathrm{concav}_m C$ 内.

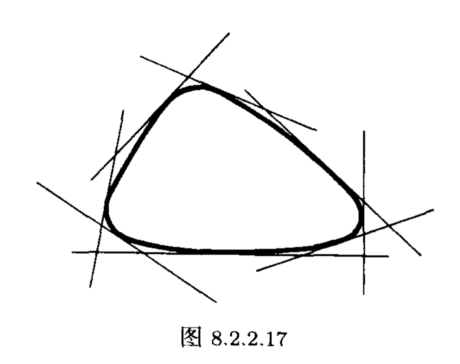


图 8.2.2.17

8.3 长度. 欧几里得空间的曲线的弧长参数表示

今后假定向量 (对应的, 仿射) 空间 E (对应的, A) 配备欧几里得结构. 既然这个结构更加丰富, 曲线理论随之也更多彩, 这里我们将会发现新的不变量.

给定 E 的 C^1 类几何弧 C, 假定 $(I, f) \in C$ 是从 I 到 $f(I) = V \subset E$ 的一个嵌入, 由于 V 有典范密度, 就使得 V 的弧长参数表示的概念有了依托 (关于典范密度, 参见 6.6.1; 关于弧长参数表示, 参见 3.4.3). 考虑到在 $f'(t)$ 和 $T_t f(1_t)$ 之间的等同, 如果 δ 表示 V 的典范密度, 而配对 (I, f) 是一个弧长参数表示, 则有 $\delta(f(t))(T_t f(1_t)) = 1$, 即 $\|f'(t)\| = 1$ (参见 6.5.3).

这导致在一般情形下提出:

8.3.1 定义

*欧几里得空间 E 的几何弧 C 的参数表示 $(I, f) \in C$, 如果使得对于 I 的所有 t, $\|f'(t)\| = 1$, 则 (I, f) 称为***弧长参数表示**.

8.3.2 命题

所有几何弧具有**弧长参数表示**. 如果 (I, f) 是一个弧长参数表示, 所有其他弧长参数表示的形式是 $t \mapsto f(t+a)$ 或 $t \mapsto f(-t+a)$, 其中 a 是任意的.

存在性: 这里模仿引理 3.4.4 的证明. 设 $(J, g) \in C, s \in J$. 假定 λ 是从 I 到 J 上的一个微分同胚, 使得对于 $f = g \circ \lambda, (I, f)$ 是一个弧长参数表示. 我们将有

$$\|f'(t)\| = \|f'(\lambda(t))\| \, \lambda'(t) = 1.$$

任意取定 a, 对于 $t \in J$, 令,

$$\theta(t) = \int_0^t \|g'(s)\| \mathrm{d}\, s.$$

设 $I = \theta(J)$, 我们有 $\theta'(t) = \|g'(t)\| > 0$, 故 θ 是可逆的. 设 $\lambda = \theta^{-1}$, 则 $\lambda \in \operatorname{Diff}(I; J)$, 由于

$$\text{如果} \quad s = \theta(t) \quad \text{则} \quad \lambda'(s) = \frac{1}{\theta'(t)},$$

故 $\lambda'(s) \neq 0$. 此外, 如果 $s = \theta(t) = \lambda^{-1}(t)$, 则 $f = g \circ \lambda$ 使得

$$\|f'(s)\| = \|g'(\lambda(s))\| \, \lambda'(s) = \frac{\|g'(t)\|}{\|g'(t)\|} = 1,$$

于是 (I, f) 确实是一个弧长参数表示.

唯一性: 设 (I, f) 和 (J, g) 是两个弧长参数表示, $\lambda \in \operatorname{Diff}(I; J)$ 使得 $f = g \circ \lambda$. 我们有

$$\|f'(t)\| = 1 = \|g'(\lambda(t))\| \, |\lambda'(t)| = |\lambda'(t)|, \text{ 于是 } |\lambda'(t)| = 1,$$

由此得到 $\lambda'(t) = \pm 1$, 由于 λ' 在连通的 I 上是连续的, 我们有 $\lambda'(t) = 1 \forall t \in I$ 或 $\lambda'(t) = -1 \forall t \in I$; 遂有 $\lambda(t) = t + a$ 或 $\lambda(t) = -t + a$.

8.3.3 注释

如果对于弧长参数表示要求 $f(t_0) = m$, 则仅有两个可能的弧长参数表示.

8.3.4 等距映射下的不变性

如果 $\Phi \in \operatorname{Isom}(E; F)$, 并且 (I, f) 是 C 的弧长参数表示, 则 $(I, \Phi \circ f)$ 是 $\Phi \circ C$ 的弧长参数表示. 这里 $\operatorname{Isom}(E; F)$ 表示从 E 到 F 上的等距同构的集合.

8.3.5 弧长参数表示中 "弧长" 的合理性

我们知道, 如果 (J, g) 是任意参数弧, $[a, b] \subset J$, 则存在 (J, g) 从 a 到 b 的长度, 其定义是

8.3.6 $$\sup \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} \|g(t_{i+1}) - g(t_i)\| : n \in \mathbf{N}, a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b \right\},$$

并且业已证明 (参见 [2], 53 章), 它等于

$$\int_a^b \|f'(t)\| \, \mathrm{d}t.$$

这表明, 如果 (I,f) 是一个弧长参数表示, 而 t_0 和 t 在 I 内, 则 $f(t)$ 恰好是 (I,f) 从 t_0 到 t 的长度; 此即弧长参数表示中弧长二字的由来.

8.3.7 定义

积分 $\int_a^b \|f'(t)\|\,\mathrm{d}t$ 称为**参数弧** (I,f) **从** a **到** $b(a,b\in I)$ **的弧长.**

8.3.8 不利用 8.3.6 就可以直接验证, 如果考虑一个几何弧 C 及其一个参数表示 $(I,f)\in C$, 实数

$$\int_I \|f'(t)\|\,\mathrm{d}t$$

不依赖参数表示. 尽管如此, 8.3.6 还是保证以下定义的合理性:

8.3.9 定义

设 m,n 是几何弧 C 的用 (I,f,a) 和 (I,f,b) 表示的两个点. 积分

$$\int_a^b \|f'(t)\|\,\mathrm{d}t$$

称为 C 的**弧** mn **的长度**.

8.3.10 设 $\Phi\in\mathrm{Isom}(E;F)$, m,n 是弧 C 的两个点, 则 $\Phi\circ C$ 的弧 $\Phi(m)\Phi(n)$ 的长度等于 C 的弧 mn 的长度.

8.3.11 定义

给定欧几里得空间的一个定向几何弧. 称向量 $\dfrac{f'(t)}{\|f'(t)\|}$ 为在三元组 (I,f,t) 表示的点 m 的**单位切向量**, 记作 $\tau(m)$.

8.3.12 注释

8.3.12.1 如果 (I,f) 是一个弧长参数表示, 则 $\tau(m)=f'(t)$.

8.3.12.2 C 的定向的变更变换 $\tau(m)$ 为其相反向量.

8.3.12.3 单位切向量在等距映射下不变.

8.3.12.4 弧长参数表示经常称为 "曲线横坐标".

8.4 欧几里得空间的曲线的曲率

给定几何弧 C 的一个点 m. 设 f 和 g 是两个弧长参数表示, 而 m 由三元组 (I,f,t) 和 (J,g,s) 表示, 并且 $f=g\circ\theta$. 那么根据 8.3.2, $\theta'(t)=\pm1$, 从而 $f''(t)=g''(s)$.

8.4.1 定义

给定几何弧 C 的用三元组 (I,f,t) 表示的点 m. 如果 (I,f) 是弧 C 的弧长参数表示, 则数 $\|f''(t)\|$ 只依赖于 C 和 m, 称为 C 在 m 的 (数值) **曲率**, 记作 K_mC.

8.4.2 注释

8.4.2.0 参见紧跟公式 8.5.6 之后的有关术语曲率的解释.

8.4.2.1　我们没有引进由 $f''(t) = g''(s)$ 构成的不变量. 事实上, 由于 $\|f'(t)\| = 1$, 对于所有 t, $f'(t)$ 和 $f''(t)$ 是垂直的, 于是 $f''(t)$ 在凹侧的半平面 (或是零向量), 并且垂直于 $f'(t)$: 它完全由其模确定. 不过对于定向曲线参见 8.5 节.

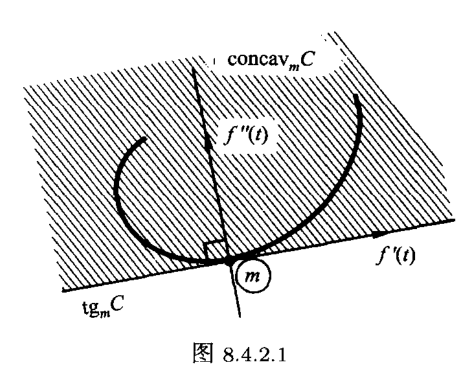


图 8.4.2.1

8.4.3　命题

当且仅当 $K_m C \neq 0$, 几何弧 C 在 m 是双正则的.

8.4.4　命题

设 $\Phi \in \mathrm{Isom}\,(E; F)$, C 是 E 的一个几何弧, 则 $K_{\Phi(m)}(\Phi \circ C) = K_m C$.

这两条性质可以直接验证.

8.4.5　运动学观点: 曲率的实际计算

设 (J, g) 是欧几里得空间的一个参数弧, C 是由它表示的几何弧. 我们让正的实的数量

8.4.6
$$v(s) = \|g'(s)\|$$

与之关联, $v(s)$ 称为"运动" 在 $g(s) = m$ 的 (由参数弧确定的 "运动" 的) (数量) 速度. 如果 C 是定向的 (未必由 (J, g) 定向), 我们称由

8.4.7
$$g'(s) = v(s)\tau(g(s))$$

定义的数量 $v(s)$ 为 "运动" 在 $g(s) = m$ 的 (代数) 速度, 其中 $\tau(g(s))$ 是 C 的单位切向量 (参见 8.3.11).

于是, 如果 (I, f) 是 C 的一个弧长参数表示, 而 $g = f \circ \theta$, 这里 $\theta \in \mathrm{Diff}\,(J; I)$. 令 $t = \theta(s)$, 则 $g'(s) = v(s)f'(t) = f'(t)\theta'(s)$, 故 $v = \theta'$.

还要引进:

8.4.8　定义

几何弧在用 (J, g, s) 表示的点 m 的曲率称为**参数弧** (J, g) 在 $s \in J$ 的**曲率**, 记作

8.4.9
$$K(s) = K_{g(s)}C.$$

8.4.10 曲率的计算

为了发现曲率而计算弧长参数表示往往十分复杂甚至不可能. 下面 (8.4.14) 将提供一个利用任意参数表示计算曲率的明晰公式.

设 (I, f) 是几何弧 C 的弧长参数表示, 它关联到所考虑的参数弧 (J, g), 而 $\theta \in \text{Diff}(J; I)$ 使得 $g = f \circ \theta$. 在 $m = g(s) = f(t)$, 向量 $g''(s)$ 是运动 (J, g) 的加速度. 如果 $\theta(s) = t$, 那么在 8.2.2.6 建立的公式给出

$$g''(s) = \theta'^2(s) f''(t) + \theta''(s) f'(t).$$

在 m 是双正则的情形, 我们令:

8.4.11 $$f''(t) = (K_m C) \cdot \nu(m).$$

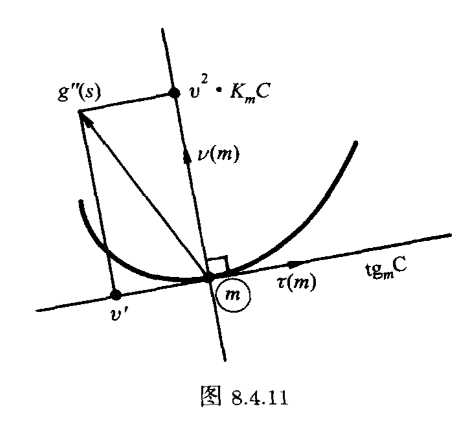


图 8.4.11

其中 $\nu(m)$ 是一个单位向量, 称为主法向量 (它是法向量, 这是因为 $\|f'(t)\| = 1, f''(t)$ 垂直于 $f'(t)$), 由于 $K_m C \neq 0$, 它由 8.4.11 完全确定. 如果点不是双正则的, 则主法向量不存在.

如果记 $v = \theta'$, 则 $\theta'' = v'$, 由于 τ 和 ν 仅依赖定向几何弧, 我们获得"加速度的内蕴分量":

8.4.12 $$\boxed{g''(s) = (v^2 K_m C) \cdot v(m) + v' \cdot \tau(m)}.$$

为了计算 $K_m C$, 只需把 8.4.12 跟下式联立

8.4.13 $$\boxed{g'(s) = v \cdot \tau(m)}.$$

两式作在 0.1.15.7 定义的向量积 $\cdot \wedge \cdot$ 便得

8.4.13.1 $$\boxed{K_m C = \frac{\|g'(s) \wedge g''(s)\|}{v^3} = \frac{\|g'(s) \wedge g''(s)\|}{\|g'(s)\|^3}}.$$

8.4.14　例子

8.4.14.0　实际含义

加速度法向分量 v^2K_mC 表示质量为 1 以速度 v 沿 C 运动的质点的离心力, 即它作用在曲线上朝着凹侧外的力. 例如在铁路的路轨上, 如果打算车箱不出轨或者路轨不变形, 这个力不应当有太大的间断. 于是事实上人们要求 K 在 C 上连续, 即 C 应当是 C^2 类的. 但是在轨道的直线部分, 曲率是零, 跟两个直线部分 D_1 和 D_2 衔接的曲线 C 在 m_1 和 m_2 的曲率应当为零. 发现在给定点衔接两条直线的曲线并非那么容易. 圆周不足以衔接. 有足够多的抛物线, 但一个抛物线的曲率是常值而非零.

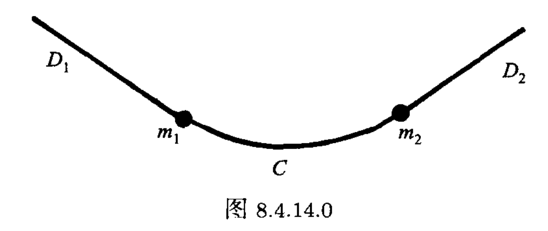


图 8.4.14.0

对于高速公路的线路有同样的问题. 此外, 人们谋求在以下意义下的最佳曲线 C, 当 D_1 和 D_2 的位置给定时, 在 C 上的 K 的最大值是最小可能的. 形形色色的曲线族被试探过, 有关的文献也是车载斗量. 例如读者可参见 [119], 294 页.

8.4.14.1　在 2 维欧几里得仿射空间 E 里, 考虑中心为 a 半径为 r 的圆周. 可以用参数表示 $t \mapsto a + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t}$.

$$g'(t) = \mathrm{i}\,r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t}, g''(t) = -r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t}, g'(t) \wedge g''(t) = -r^2(\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t} \wedge \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t}).$$

于是对于所有点 m,

$$\|g'(t) \wedge g''(t)\|^2 = r^2, \quad \text{由此得到} \quad K_mC = \frac{r^2}{r^3} = \frac{1}{r}.$$

半径为 r 的圆周的曲率是等于 $1/r$ 的常值.

8.4.14.2　用极坐标计算曲率

给定 $\mathbf{R}^2$ 的参数弧 $g(t) = \rho(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t}$. 那么

$$\begin{aligned} g' &= \rho'(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t} + \rho(t)\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t}, \\ g'' &= (\rho''(t) - \rho(t))\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t} + 2\rho'(t)\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t}, \end{aligned}$$

由此得到

$$\|g'(t) \wedge g''(t)\|^2 = \left|\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''\right|,$$

而

$$v(t) = \|g'(t)\| = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}.$$

由此得到

8.4.14.3 $$\boxed{K(C) = \frac{|\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''|}{(\rho^2 + \rho'^2)^{3/2}}}.$$

例如, 参数弧 $\rho(t) = 1 + 2\cos t$ 给出

$$\rho'(t) = -2\sin t, \quad \rho''(t) = -2\cos t,$$

于是

$$K_{g(t)}C = \frac{3(3 + 2\cos t)}{(5 + 4\cos t)^{3/2}}.$$

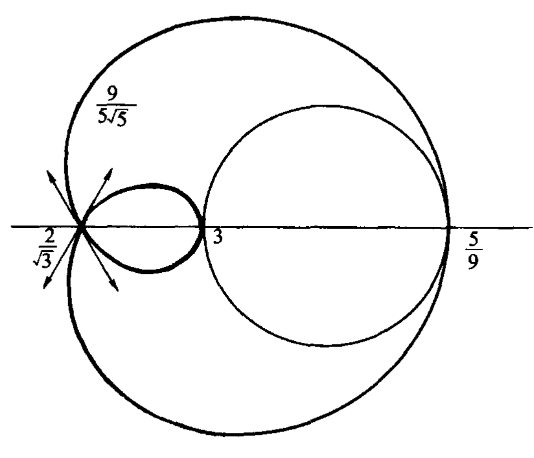


图 8.4.14.3

如果令 $x = \cos t$, 则

$$K(x) = \frac{3(3 + 2x)}{(5 + 4x)^{3/2}}, \quad \frac{\mathrm{d}\,K}{\mathrm{d}\,x} = -12(5 + 4x)^{-5/2}(x + 2) < 0,$$

于是对于 $x \in [-1, 1]$, 即 $t \in [0, \pi]$, 曲率从 5/9 严格增加到 3, 当 $t = \pi/2$ 时, 曲率是 $9/(5\sqrt{5})$, 当 $t = 2\pi/3$ 时, 曲率是 $2/\sqrt{3}$. 曲线是帕斯卡蜗线.

8.4.14.4 圆柱螺旋线

这是 $\mathbf{R}^3$ 的参数弧 $g : t \mapsto (\cos t, \sin t, kt)$; 对于所有 t, 我们有 $K_{g(t)} = (1 + k^2)^{-1}$.

8.4.15 定义

设 m 是 C 的双正则点, 称 $R_mC = \dfrac{1}{K_mC}$ 为 C 在 m 的**曲率半径**.

半径为 R_mC, 通过 m 并且在 C 的凹侧的圆周称为 C 在 m 的**密切圆**. 这个圆的中心称为 C 在 m 的**曲率中心**.

关于曲率圆的几何含义参见习题 8.7.4.

8.4.16 曲率的度量定义

参见习题 8.7.13.

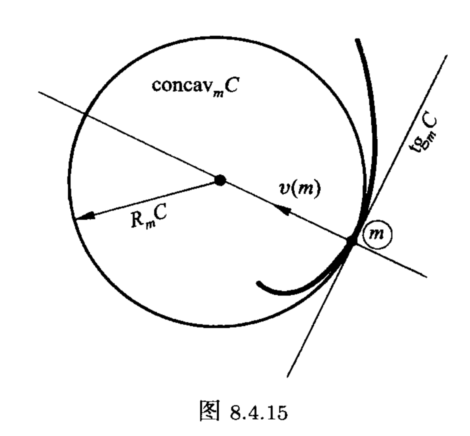


图 8.4.15

8.5　在欧几里得定向平面内的定向平面曲线的代数曲率

在整个这一节, C 表示定向欧几里得平面 E 的定向几何弧. 总可以给欧几里得平面 E 及其几何弧 C 定向, 以便应用下面的理论, 有时这样做既有益, 又有趣.

8.5.1　在定向欧几里得平面 E 内, 用 i 表示旋转 $\pi/2 : x \mapsto ix$, 它由三个条件决定: $\|x\| = \|ix\|, (ix|x) = 0$ 以及 $\{x, ix\}$ 是正的基底. 必须明白, 无需建立 E 和复数集合 $\mathbf{C}$ 之间的同构, 就可以定义这个旋转; 而该同构并非唯一.

设 m 是定向几何弧的一个点, 它对应 (参见 8.3.11) 单位切向量 $\tau(m) = f'(m)$, 这里 (I, f) 是 C 的弧长参数表示 (C 由这个参数表示定向), 并且 $m = f(t)$ 现在取定 C 在 m 的法向量 $i\tau(m)$, 提醒注意, 一般说来, $i\tau(m)$ 未必就是在 8.4.11 中引进的 $\nu(m)$: 因为 $\nu(m)$ 可能是 $i\tau(m)$, 也可能是其相反向量.

存在一个数 k_mC 使得 $f''(t) = (k_mC) \cdot (i\tau(m))$. 由于 $f''(t)$ 不依赖弧长参数表示 (I, f), 故可以给出:

8.5.2　定义

给定几何弧 C 的一个弧长参数表示 (I, f) 和 C 的一个点 $m = f(t)$. 称满足等式 $f''(t) = (k_mC) \cdot (i\tau(m))$ 的数 k_mC 为 C 在 m 的**代数曲率**.

请注意, 跟 8.4.10 的情形相反, 因为曲线是平面的, 所以不论点 m 是否是双正则的, 法向量 $i\tau$ 总存在.

8.5.3　局部形式

图 8.5.3 给出了代数曲率的符号 (纸平面是通常定向的), 其中箭头表示曲线的定向.

8.5.4　初等性质

8.5.4.1
$$K_mC = |k_mC|.$$

8.5.4.2　设 Φ 是 E 的一个仿射位移(即保持定向的关联到一个向量等距的仿射

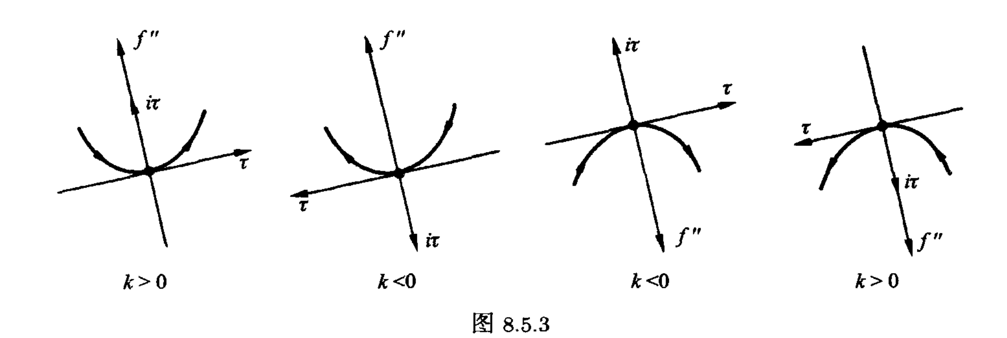


图 8.5.3

变换),则

$$k_{\Phi(m)}(\Phi\circ C)=k_mC.$$

其中 $\Phi\circ C$ 由 Φ 和 C 定向.

8.5.4.3 代数曲率的符号

如果改变 E 的定向, 则 k_mC 变为 $-k_mC$. 如果改变 C 的定向, 则 k_mC 变为 $-k_mC$.

8.5.4.4 在双正则点, 凹侧 (参见 8.2.2.11) 是半平面:

如果 $k>0$, 它位于 $\tan_mC$ (由 C 定向) 的左侧,

如果 $k<0$, 它位于 $\tan_mC$ 的右侧.

我们现在打算证明 (参见 8.5.7), 存在一个具有给定的从一个点算起的长度的代数曲率函数的几何弧, 并且不计位移是唯一的. 为此, 要建立一个今后还会用到的公式. 设 (I,f) 是弧 C 的一个弧长参数表示, 从 I 到 E 内的映射 f', 其值在 E 的单位圆

$$S(E)=\{x\in E:\|x\|=1\}$$

内, 并且 $f'(t)=\tau(t)$ 是单位切向量. 设 σ 是由 E 典范定向的 $S(E)$ 的长度形式, 则

8.5.5 $$\boxed{\tau^*\sigma=k_mC\cdot \mathrm{d}\,t}.$$

事实上, 我们根据 τ^* 的定义有 $(\tau^*\sigma)(1_t)=\sigma(\tau(t))((T_t\tau)(1_t))$. 而如果 ω_0 是 E 的典范体积形式, 从已经做过的计算 (参见 6.4.5) 可以得到 $\sigma(t)=\mathrm{int}(\tau(t))\omega_0$, 再根据定义 8.5.2, 我们得到

$$\begin{aligned}(\tau^*\sigma)(1_t)&=[\mathrm{int}\,(\tau(t))\cdot\omega_0](\theta^{-1}(\tau'(t)))\\&=\omega_0(\tau(t),\tau'(t))\\&=\omega_0(f'(t),f''(t))=\omega_0(\tau(t),k_mC\cdot(i\tau(t))).\end{aligned}$$

而由 i 的定义, $\omega_0(\tau,i\tau)=1$; 随之得到 8.5.5.

现在以任意方式固定圆周 $S(E)$ 上的一个起点 x; 由此产生一个覆叠映射 $\mathbf{R} \to S(E)$, 本质上等同于覆叠映射 $\mathbf{R} \to S^1$, 其定义是

8.5.5.1
$$p : \mathbf{R}. \ni t \mapsto (\cos t)x + (\sin t)(ix).$$

7.6 节的理论这里仍然可以应用, 并且得到公式 $p^*\sigma = \mathrm{d}\,t$, 而如果 $\bar{\tau} : I \to \mathbf{R}$ 是 $\tau : I \to S(E)$ 的一个提升, 则完全跟定理 7.6.4 的证明中的 3° 一样得到 $\tau^*\sigma = \dfrac{\mathrm{d}\,\bar{\tau}}{\mathrm{d}\,t}$.

8.5.5.2
$$\begin{array}{ccc} & \mathbf{R} & \\ {}^{\bar{\tau}}\nearrow & & \searrow^{p} \\ I & \xrightarrow[\tau]{} & S(E) \end{array}$$

比较 $\tau^*\sigma = \mathrm{d}\,\bar{\tau}/\mathrm{d}\,t$ 和 8.5.5 便得我们曾经看到过的公式:

8.5.6
$$\boxed{k_m C = \frac{\mathrm{d}\,\bar{\tau}}{\mathrm{d}\,t}}.$$

直观解释:"我们由连续性确定切线跟 Ox 的夹角, 那么曲率指出切线随在单位弧长上转动多少角度". 在相等的弧长上, 切线转动越快, 所考虑的弧就越弯曲.

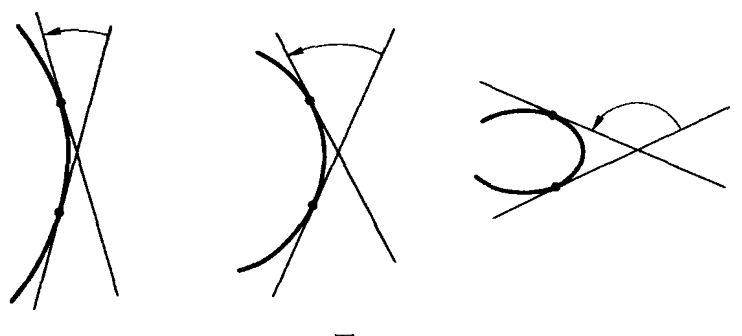


图 8.5.6

8.5.7　定理

设 I 是 $\mathbf{R}$ 的一个区间, c 属于 $C^0(I;\mathbf{R}), I$ 包含 0. 又设 a 和 b 是 E 的两个元素. 则存在 E 的一个几何弧 C, 而且是唯一的, 其一个弧长参数表示使得 $f(0) = a, f'(0) = b, \forall t \in I$, 有 $k_{f(t)}C = c(t)$. 换句话说; 不计位移, 一个平面曲线由其代数曲率确定 (内蕴方程).

事实上, 设 (I, f) 是一个解. 则 $f' = \tau \in C^1(I; S^1)$; 设 $\bar{\tau} \in C^1(I;\mathbf{R})$ 是 τ 的提升. 根据 8.5.6, 必有 $\dfrac{\mathrm{d}\,\bar{\tau}}{\mathrm{d}\,t} = c$, 于是存在由

$$\bar{\tau}(t) = \tau(0) + \int_0^t c(u)\mathrm{d}\,u = b + \int_0^t c(u)\mathrm{d}\,u$$

定义的满足给定条件的 $\bar{\tau}$. 从已知的 $\bar{\tau}$ 得到 $\tau = p \circ \bar{\tau} = f'$, 由积分

$$f(t) = a + \int_0^t p\,(\bar{\tau}(u))\mathrm{d}\,u$$

得到 f.

对于明晰计算的例子, 参见 8.7.7.

8.5.8 注释

由于非双正则点的出现, 当用 K 代替 k 时定理 8.5.7 的类似命题是错误的. 例如下面的两条曲线的 K 作为弧长的函数是相同的, 但是不能经过位移从一个得到另外一个.

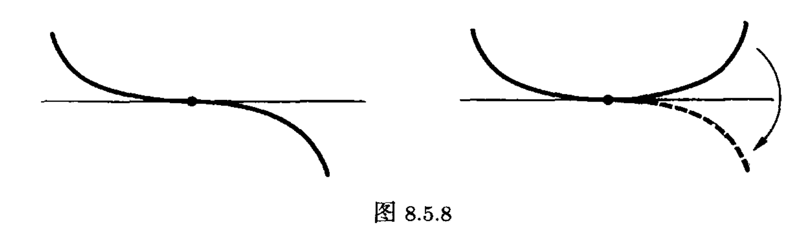


图 8.5.8

8.6 欧几里得空间 (3 维的) 双正则曲线的挠率

在这一节假定 C 是 3 维定向 (若未定向, 给它定向) 欧几里得空间的定向几何曲线. 将证明如果 C 是 C^3 类的, 不计位移, 这个弧由曲线坐标的两个函数: 曲率和挠率所确定.

设 (I, f) 是 C 的一个弧长参数表示, $m = f(t)$ 是 C 的一个点. m 对应一个单位切向量 $\tau(m) = f'(t)$, 并且如果 $f \in C^p(I; E)$, 则 $\tau \in C^{p-1}(I; E)$.

如果 m 是双正则的, 还可以考虑主法向量 $\nu(m)$ (参见 8.4.11). 如果 C 处处是双正则的, 则

$$\nu(t) = \frac{f''(t)}{\|f''(t)\|}, \text{于是} \nu \in C^{p-2}(I; E).$$

下面我们将假定 C 处处是双正则的.

直到本章末尾, 都假定所有弧是双正则的.

由于 E 是定向的, 所有点 m 对应向量 $\beta(m)$ (如果 $f(t) = m$, 还可记作 $\beta(t)$), 使得 $\{\tau(m), \nu(m), \beta(m)\}$ 是 E 的正的正交规范基底. 即 (参见 0.1.15.3):

8.6.1 $$\boxed{\beta(m) = \tau(m) \wedge \nu(m)}.$$

我们有 $\beta \in C^{p-2}(I; E)$.

8.6.2　定义

向量 $\nu(m)$ 和 $\beta(m)$ 分别称为**主法向量**和**次法向量**.

在 8.4.11 我们看到, 如果 $f(t) = m$, 则

8.6.3 $\boxed{\tau'(t) = K_m C \cdot \nu(m)}$, 其中 $K \in C^{p-2}(I; \mathbf{R})$.

现在假设 C 至少是 C^3 类的.

对关系 $\|\beta(t)\|^2 = 1$ 和 $(\beta(t)|\tau(t)) = 0$ 求导得到

$$(\beta(t)|\beta'(t)) = 0$$

和

$$\begin{aligned}(\beta'(t)|\tau(t)) &= -(\beta(t)|\tau'(t)) = -(\beta(t)|K_m C \cdot \nu(t)) \\ &= -(K_m C)(\beta(t)|\nu(t)) = 0.\end{aligned}$$

终于得到 $\beta'(t)$ 跟 $\nu(t)$ 共线, 故存在一个数值, 记作 $T_m C$, 使得

8.6.4 $\boxed{\beta'(t) = T_m C \cdot \nu(m)}$,

而函数 $t \mapsto T(t) = T_{f(t)} C$ 在 $C^{p-3}(I; \mathbf{R})$ 内.

8.6.5　定义

由 8.6.4 定义的数值 $T_m C$ 称为几何弧 C 在 m 的挠率.

对关系 $\|\nu^2\| = 1, (\nu|\tau) = 0, (\nu|\beta) = 0$ 求导得到

$$(\nu'|\nu) = 0, (\nu'|\tau) = -(\nu|\tau') = -K, (\nu'|\beta) = -(\nu|\beta') = -T,$$

随之得

8.6.6 $\boxed{\nu'(t) = -K_m C \tau(m) - T_m C \beta(m)}$.

公式 8.6.3, 8.6.4 和 8.6.6 称为弗雷内公式, 而 $(\tau(m), \nu(m), \beta(m))$ 称为 C 在 m 的弗雷内标架. 矩阵爱好者会情不自禁地写出

$$\begin{matrix} \tau \\ \nu \\ \beta \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & -K & 0 \\ K & 0 & T \\ 0 & -T & 0 \end{pmatrix}. \\ \quad\ \ \tau' \quad \nu' \quad \beta'$$

8.6.7 注释

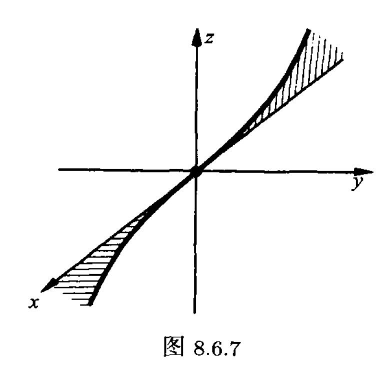


图 8.6.7

如果 K 取零值, 就无从定义挠率. 事实上, 考虑参数弧

$$\begin{cases} t \mapsto (t, e^{-1/t}, 0), & \text{如果 } t > 0, \\ 0 \mapsto (0,0,0), & \\ t \mapsto (t, 0, e^{1/t}), & \text{如果 } t < 0. \end{cases}$$

除 $t=0$ 外都是双正则点. 当 $t \geqslant 0$ 时, 像集完全在平面 xOy 上, 当 $t \leqslant 0$ 时, 像集完全在 xOz 平面内; 对于所有 $t \neq 0$, 挠率是零. 但是对于 $t=0$, 即使由连续性把挠率延拓为 0, 曲线还会是病态的: 参见 8.6.12 和 8.6.15.

8.6.8 初等性质

8.6.8.1 挠率的符号

如果反转 E 的定向, 则 T 改变为 $-T$; 如果反转 C 的定向, 则 T 亦改变为 $-T$.

8.6.8.2 如果 Φ 是一个位移, 则 $T_{\Phi(m)}(\Phi \circ C) = T_m C$.

参数弧挠率的计算. 下面提供一个利用任意参数表示计算 T 的公式, 而不限于弧长参数表示.

8.6.9 定义

设 (U, g) 是 3 维定向欧几里得空间的一个参数弧, C 是对应的几何弧. 称数值 $T_{g(s)}C$ 为参数弧**在** $g(s)$ (**也可以说在** s) **的挠率**.

8.6.10 为了计算挠率, 首先考虑 C 的一个弧长参数表示 (I, f). 沿用前面的记号, 曲线 C 的曲率和挠率简写为 K 和 T, 我们有弗雷内公式:

8.6.10.1
$$\begin{cases} f'(t) = \tau(t) \\ f''(t) = \tau'(t) = K_{f(t)}C \cdot \nu(t) = K(t) \cdot \nu(t) \\ f'''(t) = K'\nu + K\nu' = K'\nu - KT\beta - K^2\tau. \end{cases}$$

由此得到混合积 $(f', f'', f''') = -K^2 T$.

再考虑任意一个参数表示 (J, g).

设 $\theta \in \mathrm{Diff}\,(J; I)$, 使得 $g = f \circ \theta$, 则

$$g' = \theta' f'; g'' = \theta'' f' + \theta'^2 f''; g''' = \theta''' f' + 2\theta''\theta' f'' + \theta'^3 f'''.$$

于是, 计算混合积 (g', g'', g''') (参见 0.1.16)

$$(g', g'', g''') = \theta'^6(f', f'', f''') = -K^2T\theta'^6 = -K^2Tv^6.$$

由于 $\|g' \wedge g''\| = \left\|\theta'^3 f' \wedge f''\right\| = Kv^3$, 最后得到

8.6.10.2 $$\boxed{T = -\frac{(g', g'', g''')}{\|g' \wedge g''\|^2}}.$$

8.6.11 例子

8.6.11.1 圆柱螺旋线

$g : t \mapsto (a\cos t, a\sin t, kt)$. 我们有 (参见 8.4.14.4)

$$K = \frac{a}{a^2 + k^2} \quad 和 \quad T = -\frac{k}{a^2 + k^2}.$$

8.6.11.2 如果弧 C 是平面像集, β 是固定的, 则 $T = 0$.

8.6.11.3 对于每个整数 n, 考虑 $\mathbf{R}^3$ 的参数弧:

$$P_n : t \mapsto \left(\left(\frac{1}{\sin\frac{2\pi}{n}} + \cos t\right)\cos\frac{t}{n} - \frac{1}{\sin\frac{2\pi}{n}}, \sin t, \left(\frac{1}{\sin\frac{2\pi}{n}} + \cos t\right)\sin\frac{t}{n}\right).$$

那么存在充分大的 n, 使得弧的挠率处处非零.

事实上, P_n 是 $2n\pi$ 周期的, 并且 $t \mapsto t + 2\pi$ 在 P_n 上诱导一个 (绕 Oy 轴的) $2\pi/n$ 旋转: 于是只需研究在 $[0, 2\pi]$ 上的挠率.

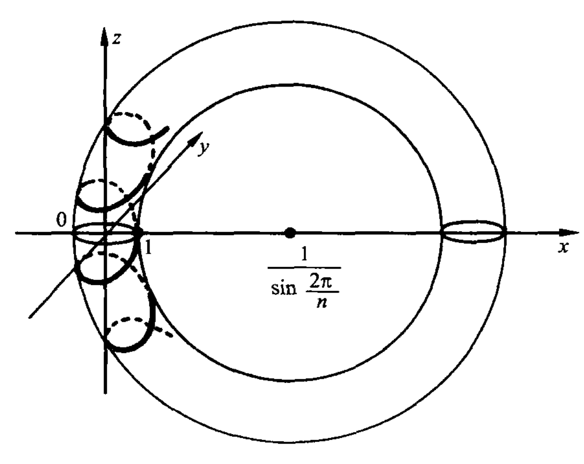


图 8.6.11.3

容易发现 $\lim\limits_{n\to\infty} P_n$ 是函数 $P : t \mapsto (\cos t, \sin t, t/2\pi)$, 在 $[0, 2\pi]$ 上这个收敛是一致的, P_n 的所有阶的导数在这个区间上也一致收敛到 P 的相应导数. 于是 P_n 的

挠率一致收敛到圆柱螺旋线 $P: t \mapsto (\cos t, \sin t, t/2\pi)$ 的挠率, 即 $-\dfrac{2\pi}{1+4\pi^2}$ (参见 8.6.11.1), 故对于充分大的 n, $T<0$.

可以把 P_n 看作一个环形螺线管, 环形有大的半径 $\dfrac{1}{\sin\dfrac{2\pi}{n}}$, 它有 n 匝, 匝有较小的半径 1, 当 $n\to\infty$, 这个环形螺线管趋于圆柱螺线管.

8.6.12 挠率的几何含义

8.6.12.1 由于 $\beta(t)$ 垂直于密切平面, 如果 (I,f) 是一个弧长参数表示, 则在 $m=f(t)$, β' 显示 $\text{oscul}_m C$ 随曲线坐标的改变转动多少. 可以说挠率测量曲线平面性的缺失. 特别说来, 如果曲线是平面的, 密切平面是固定的, 故 $\beta'=0$, 随之 $T=0$.反之, 如果处处 $T=0$, 则 (根据 8.6.4) $\beta'(t)=0$, 于是 $\beta(t)=\tau(t)\wedge\nu(t)$ 是常向量: $\tau(t)$ 垂直于固定向量 $\beta(t)=B$. 关系 $f'(t)\cdot B=\tau(t)\cdot B=0$ 给出 $f(t)\cdot B=$ 常值: 曲线是平面的.

8.6.12.2 曲线相对于弗雷内标架的局部位置

设 (I,f) 是 C 的一个弧长参数表示, 在 8.6.10.1 建立的公式代入 3 阶泰勒公式, 其形式是

$$f(t)-f(t_0)=(t-t_0)\tau+\frac{(t-t_0)^2}{2}K\nu+\frac{(t-t_2)^3}{6}(-K^2\tau+K'\nu-KT\beta)+o((t-t_0)^3),$$

其中 (τ,ν,β) 是在 $m_0=f(t_0)$ 的弗雷内标架, 按照这个标架的分量改写成

$$\begin{aligned}f(t)-f(t_0)&=(t-t_0)\left(1-K^2\frac{(t-t_0)^2}{6}+o((t-t_0)^2)\right)\tau\\&\quad+\frac{(t-t_0)^2}{2}\left(K+K'\frac{t-t_0}{3}+o(t-t_0)\right)\nu+\frac{(t-t_0)^3}{6}(-KT+o(1))\beta.\end{aligned}$$

8.6.12.3 由此得到弧在此标架的三个坐标平面的投影的样子如图 8.6.12.3:

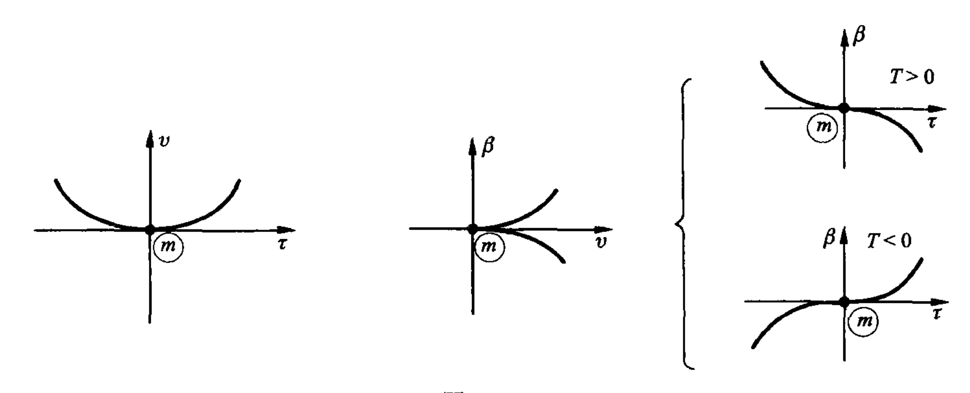


图 8.6.12.3

8.6.12.4 特别看到, 如果 $T\neq 0$, 则曲线严格穿过其密切平面. 我们还可以辨认挠率的符号. 比如对于普通圆柱螺旋线, 它是负的 (参见 8.6.11.1).

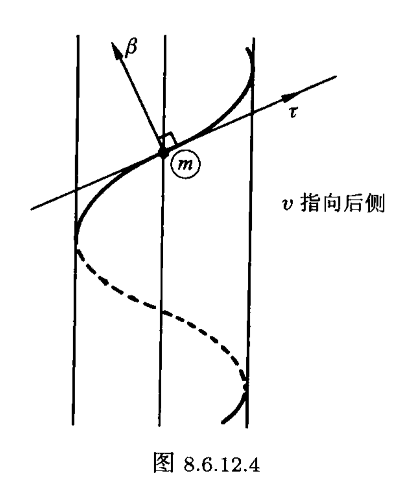


图 8.6.12.4

8.6.13　基本定理

设 I 是 $\mathbf{R}$ 的一个区间, $c \in C^1(I;\mathbf{R}_+^*), d \in C^0(I;\mathbf{R})$, 而 u, v, w 是 3 维欧几里得向量空间 E 的三个点. 则存在唯一的 C^3 类的 (必然是双正则的) 定向几何弧 C, 使得其弧长参数表示 (I, f) 满足 $f(0) = u, f'(0) = v, \dfrac{f''(0)}{\|f''(0)\|} = w$, 并且对于所有 $t \in I$ 有

$$K_{f(t)}C = c(t), T_{f(t)}C = d(t).$$

唯一性将从下面的证明得到, 不过有一个美妙而初等的方法可以证明唯一性, 我们首先加以陈述.

设 (I, f) 和 $(I, \underline{f})$ 是两个满足定理条件的弧长参数表示, 而 (τ, ν, β) 和 $(\underline{\tau}, \underline{\nu}, \underline{\beta})$ 是相应的弗雷内标架. 我们来计算

$$\alpha = (\tau|\underline{\tau}) + (\nu|\underline{\nu}) + (\beta|\underline{\beta}),$$

这是一个属于 $C^1(I;\mathbf{R})$ 的函数. 利用公式 8.6.3,8.6.4 和 8.6.6 我们得到

$$\begin{aligned}\alpha' = &(K_mC\nu|\tau) + (\tau|K_mC\underline{\nu}) + (-K_mC\tau - T_mC\beta|\underline{\nu}) + \\ &(\nu| - K_mC\underline{\tau} - T_mC\underline{\beta}) + (T_mC\nu|\underline{\beta}) + (\beta|T_mC\underline{\nu}).\end{aligned}$$

于是有 $\alpha'(t) = 0$, 从而

$$\alpha(t) = \alpha(0) = 3.$$

而 $|(\tau|\underline{\tau})| \leqslant \|\tau\|\,\|\underline{\tau}\|$, 并且如果 τ 和 $\underline{\tau}$ 不共线, 不等式是严格的. 由于弗雷内标架中的向量是单位向量, 我们有 $|(\tau|\underline{\tau})| \leqslant 1$, 只有 $\tau = \pm\underline{\tau}$, 等式才能成立, 故当且仅当 $\tau = \underline{\tau}$ 时等式成立. 对于 $(\nu|\underline{\nu})$ 和 $(\beta|\underline{\beta})$ 是同样的, 故对 $\forall t, \alpha(t) \leqslant 3$. 于是 $\alpha(t) = 3$ 蕴涵 $\tau(t) = \underline{\tau}(t)$. 我们得到 $\tau = \underline{\tau}$, 而 $\tau = f'(t) = \underline{\tau} = \underline{f}'(t)$, 又 $f(0) = \underline{f}(0)$, 故 $f = \underline{f}$.

定理的证明.

在 E^3 里, 考虑微分方程:

$$F' = (X', Y', Z') = (cY, -cX - dZ, dY)$$

其中 $F(t) = (X(t), Y(t), Z(t))$ 是定义在 I 上在 E^3 取值的函数; 我们要找对应初始条件 $F(0) = (v, w, v \wedge w)$. 由于 c 和 d 是连续的, 而且这里遇到的是线性方程组, 根据定理 1.6.6, 它在整个 I 上对于给定的初始条件有唯一解. 我们将指出, 这个解正是满足定理结论的弧长参数表示的弧的弗雷内三元组 (τ, ν, β).

首先, 对所有的 $t, (X, Y, Z)$ 是正向规范正交的.

事实上, (X, Y, Z) 是前面微分方程的解, 考虑由

$$\theta(t) = (\|X\|^2, \|Y\|^2, \|Z\|^2, (X|Y), (X|Z), (Y|Z)) \text{ 定义的函数 } \theta : I \to \mathbf{R}^6.$$

$$\theta'(t) = ((2cY|X), -2c(X|Y) - 2d(Z|Y), 2d(Y|Z),$$
$$c\|Y\|^2 - c\|X\|^2 - d(X|Z), c(Y|Z) + d(X|Y), -c(X|Z) - d\|Z\|^2 + d\|Y\|^2).$$

于是 θ 的 6 个坐标函数满足一个连续微分方程组. 而常值映射 $\eta(t) = (1,1,1,0,0,0)$ 满足这个微分方程组和同样的初始条件, 根据 1.3.1, 我们得到 $\theta(t) = (1,1,1,0,0,0)$ $\forall t \in I$. *这证明标架是规范正交的.*

令 $f(t) = u + \int_0^t X(s)\mathrm{d}\,s$, 则 $f'(t) = X(t)$, 并且 $\|X(t)\| = 1$.

于是 $f(t)$ 是一个弧长参数表示, 由于 $X' = cY$, 而 c 跟 Y 是 C^2 类的, 于是 f 是 C^3 类的. 随后, 由于 $X(t) = \tau(t)$(对于对应这个弧长参数表示的曲线 C), 我们得到

$\tau'(t) = X'(t) = c(t)Y(t)$, 这里 $Y(t)$ 是单位向量, 故 $c(t) = K_{f(t)}C$ 是这个弧的曲率. 由于 $c(t) > 0, C$ 是处处双正则的弧. 于是 Y 是主法向量, $Z = X \wedge Y$ 是次法向量, 并且 $Z'(t) = d(t) \cdot X(t)$, 从而 $d(t) = T_{f(t)}C$.

8.6.14 定理 8.6.13 本质上说的是存在具有给定的作为弧长的函数的曲率和挠率的一条曲线, 并且不计空间的一个位移, 这样的曲线是唯一的.

8.6.15 提请注意

双正则性是一个本质的假设. 否则, 挠率必定不存在, 即使通过连续性, 延拓挠率, 还是可以发现有同样的曲率和同样的挠率的两条曲线, 但是不可能通过位移把一条转换成另一条. 例如, 图8.6.15所示的两条曲线. 左面的曲线是例子 8.6.7 中的. 右面的曲线的参数表示是

$$\begin{cases} t \mapsto (t, e^{-1/t}, 0), & \text{如果 } t > 0, \\ 0 \mapsto (0,0,0), \\ t \mapsto (t, e^{1/t}, 0), & \text{如果 } t < 0, \end{cases}$$

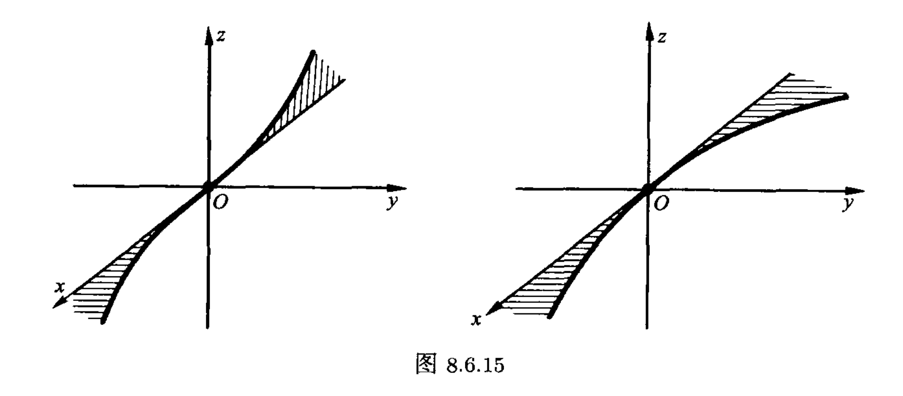


图 8.6.15

8.6.16 例子

曲率和挠率皆为非零常数的曲线是圆柱螺旋线. 事实上, 只需应用定理 8.6.13 的唯一性, 并且注意到一条圆柱螺旋线具有给定的常数曲率 K 和挠率 T, 再从 8.6.11.1 的公式解出

$$a = \frac{K}{K^2+T^2}, \quad b = -\frac{T}{K^2+T^2}.$$

8.6.17 敏锐的读者会洞察到对于 n 维空间 E 的弧, 存在 $(n-1)$ 个不变量, 不计位移, 用以刻画弧, 定理 8.5.7 对于 $n=2$ 和定理 8.6.13 对于 $n=3$ 断言的正是这个事实. 事情确实如此. 参见 [21], 第1章.

8.7 习 题

8.7.1 对于一个几何弧 $C, m \in C$, 定义 "在 C 上 n 趋于 m". 证明

$$\lim_{n \to m, n \neq m} (ⓝ - ⓜ) = \mathrm{tg}_m C.$$

8.7.2 没有任何双正则点的曲线是什么样的?

8.7.3 设 (I, f) 是一个参数弧, 而弧在 $t \in I$ 是双正则的.

a) 如果 E 是 3 维欧几里得空间, 在平面 (E 的 2 维向量子空间) 集合 P 上配备由实投影拓扑转换的拓扑, 而这个转换来自令平面对应与之垂直的直线的映射. 证明当 s 趋于 t 时, 由 $f'(t)$ 和 $f(s)-f(t)$ 生成的平面趋于 (I, f) 在 t 的密切平面 (首先要证明对于充分接近 t 的 s, 这两个向量是线性无关的).

b) 如果 E 是任意维的, 对于 E 的 2 维向量子空间的集合配备如习题 2.8.8 中在它上面安排的流形结构拓扑, 证明与 a) 同样的结果.

8.7.4 密切圆

a) 设 m 是几何弧 C 的一个双正则点. 证明当在 C 上 n 趋于 m 时 (参见 8.7.1), 过 m 点且在 n 与 C 相切的圆周趋于 C 在 m 的密切圆周 (如果可能的话, 可以在

平面圆周的集合上安排拓扑, 不然可以简单地求当 n 趋于 m 时, 所考虑圆周的中心的极限).

b) 证明: 还可以作过曲线 C 的三个点的圆周, 当它们趋于 C 的一个点时的极限而得到密切圆周.

c) 假定对于一个弧长参数表示, 曲率函数在 m 有严格正的导数. 证明参数大于 (小于) m 的参数的点严格位于在 m 的密切圆周内部 (外部).

d) 证明密切圆周在反演下保持 (如果有必要, 参见 [40] 的 10.8 节).

8.7.5 让我们处于一个欧几里得定向平面里.

设 f 是一个 C^2 类的定向几何弧 C 的一个弧长参数表示.

a) 在什么条件下可以找到数量函数 α 使得 $g = f + \alpha\nu$ 定义一个几何弧 D, 而 D 在 $g(t)$ 的切线是 C 在 $f(t)$ 的法线? 证明 D 既不依赖 C 的定向, 也不依赖 E 的定向. 曲线 D 称为 C 的渐屈线.

b) 反之, 给定一条曲线 D, 确定以 D 为渐屈线的曲线. 研究 D 是一个圆周和对数螺线的情形.

c) 设 C' 是没有任何顶点的曲线 C 的子弧. C' 的两个密切圆周的相对位置如何?(关于顶点的定义, 参见 9.7.1).

8.7.6 假设 K_mC 不是零, 叙述并且证明与定理 8.5.7 类似的关于 K_mC 的结果.

8.7.7 沿用定理 8.5.7 的记号, 求满足下列条件的曲线:

a) $c^2(s) + s^2 = 1$;

b) $c(s) = \dfrac{1}{s}$;

c) $c(s) = ks$.

8.7.8 设 (I, f) 和 (J, g) 分别是几何弧 C 和 D 的弧长参数表示. 假定对于 I 的所有 t, $k_{f(t)}C \leqslant k_{g(t)}D$. 证明对于 I 的所有充分靠近的 t 和 t', 有

$$\mathrm{d}\,(f(t), f(t')) \leqslant \mathrm{d}\,(g(t), g(t')).$$

8.7.9 对于 $\mathbf{R}^3$ 的一个弧, 给出密切球面的概念并确定该球面.

8.7.10 螺旋线

设 C 是 $\mathbf{R}^3$ 的一个双正则的定向弧. 证明以下四个性质等价:

—— 切线跟一个固定方向构成常值的角;

—— 主法线平行于一个固定平面;

—— 次法线跟一个固定方向构成常值的角;

—— $\dfrac{T}{K}$ 是常数.

证明在这些条件下, C 有一个形式为

$$t \mapsto f(t) + (t - t_0)\alpha$$

的参数表示，其中 f 是一条平面曲线的弧长参数表示，而 α 是一个垂直于此曲线所在平面的向量.

称 C 为一条螺旋线.

8.7.11 我们称 $\mathbf{R}^d$ 的两个 C^∞ 类的 p 维子流形 M 和 N 在 x 有至少 k 阶接触，如果 M 和 N 的参数表示分别是 (U,f) 和 (U,g)，它们使得 $0\in U$，对于 $0\leqslant n\leqslant k$ 有 $f^{(n)}(0)=g^{(n)}(0)$. 我们称 M 和 N 有 k 阶接触，如果它们有至少 k 阶的接触，但是没有至少 $k+1$ 阶的接触. 我们称 p 维子流形 M 和 $q(p\leqslant q)$ 维子流形 N 在 x 有 k 阶的接触，如果存在 N 的 p 维子流形 N'，它与 M 在 x 有 k 阶的接触. 验证这些性质不依赖参数表示的选取.

a) 证明这些概念在微分同胚下是不变的；定义两个几何弧以及几何弧和一个子流形的接触的阶.

b) 证明一条平面曲线和它的在一个双正则点的密切圆周的接触至少是 3 阶的，并且当且仅当 k' 在此点为零时，接触至少是 4 阶的. 证明 $\mathbf{R}^3$ 的一条曲线和它的在一个双正则点的密切平面的接触至少是 3 阶的，当且仅当 T 在此点为零时，接触至少是 4 阶的.

c) 在 $\mathbf{R}^3$ 里，设 C 是一条平面曲线，而 s 是一个反演，其极点不在 C 上. 证明如果 m 是 C 的一个点，在该点 k' 为零，则 $s(C)$ 在 $s(m)$ 的挠率是零. 用直接的计算重新证明这个结果. (可以利用有限展开.)

8.7.12 证明条件

$$r^2=\left(\frac{1}{K}\right)^2+\left(\left(\frac{1}{K}\right)'\frac{1}{T}\right)^2$$

对于 $\mathbf{R}^3$ 的曲率为 K 和挠率为 T 的曲线描绘在半径为 r 的一个球面上是必要的. (其中的 “ $'$ ” 是对于弧长求导数). 这里假定 K 和 T 都非零. 逆命题是精细的，参见 [120].

8.7.13 门格曲率

设 f 是欧几里得空间的一条 C^2 类正则曲线，x,y,z 是 f 的三个不同的点，令 (参见 10.3.4)

$$K(x,y,z)=\frac{\sqrt{(xy+yz+zx)(xy+yz-zx)(xy-yz+zx)(-xy+yz+zx)}}{xy\cdot yz\cdot zx},$$

证明当 y,z 趋于 f 的点 x 时，$K(x,y,z)$ 以 f 在 x 的曲率为极限；这里 (举例说) xy 表示两个点 x 和 y 的欧几里得距离. 给出 C^1 类曲线的例子，对于它，$K(x,y,z)$ (当 y,z 趋于 x 时) 没有极限或者变为无穷.

8.7.14 描绘极坐标方程 (参见 8.4.14.2) $\rho(t)=-\log(1-\sin t)$ 表示的曲线. 在曲线自接触的点，瓶状部分和钻石状部分的曲率半径是否相等?

8.7.15 求下列方程表示的曲线在原点的曲率半径:

$$x^{15}-y^{13}+x^3y^4+x^2-y^2+x+199y=0.$$

8.7.16 对数螺线

切线跟联结动点与一个定点的直线成常值角度的平面曲线是什么曲线? 用极坐标写出它们的方程, 并且称它们为对数螺线 (参见 [40], 9.6.9). 曲率半径正比于弧长的平面曲线是什么曲线? 一条对数螺线可以是它本身的法线的包络吗?

8.7.17 圆内旋轮线和圆外旋轮线

8.7.17.1 定义

我们称欧几里得平面的一个这样的子集 C 为圆内旋轮线或圆外旋轮线, 存在两个圆周 Γ 和 Γ', 它们的半径的比值是一个有理数, C 是 Γ' 的一个给定的点当 Γ' 在 Γ 上无滑动地滚动时所经过的点的集合; 如果 Γ' 保持在 Γ 内部, 得到圆内旋轮线, 如果 Γ' 保持在 Γ 外部, 得到圆外旋轮线. 按照半径的有理数比值研究 C 的形状; C 的尖点的数目是多少?

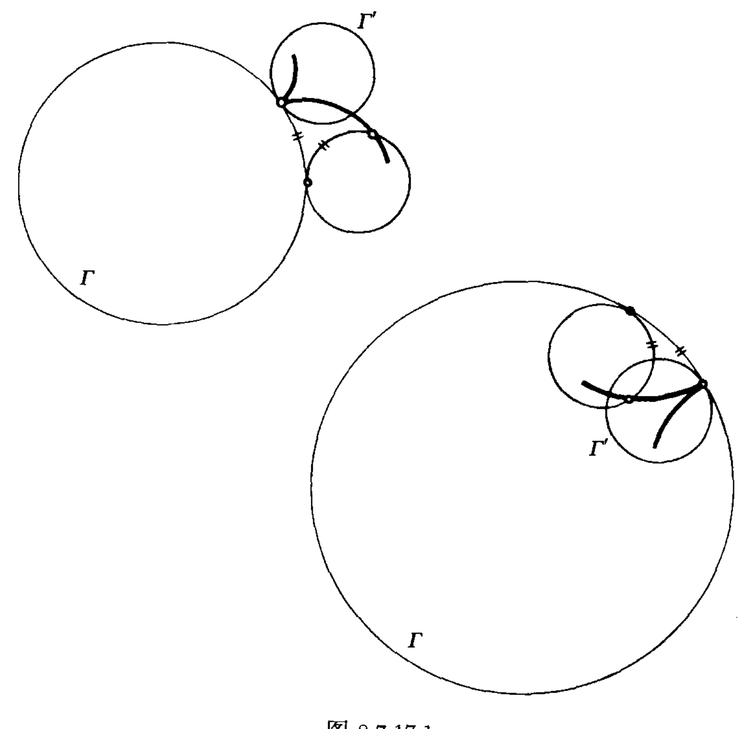


图 8.7.17.1

8.7.17.2 等价定义

设 Σ 是 $\mathbf{R}^2=\mathbf{C}$ 的单位圆周, r 是一个非零有理数; 证明当 θ 遍历 $\mathbf{R}$ 时联结点 $e^{i\theta}, e^{ir\theta}$ 的直线 $D(\theta)$ 的包络是一个圆内旋轮线或圆外旋轮线. 按照 r 讨论它的性质 (圆内旋轮线? 圆外旋轮线? 尖点的数目是多少? 等等). 我们这样得到了所有圆内旋轮线和圆外旋轮线吗?

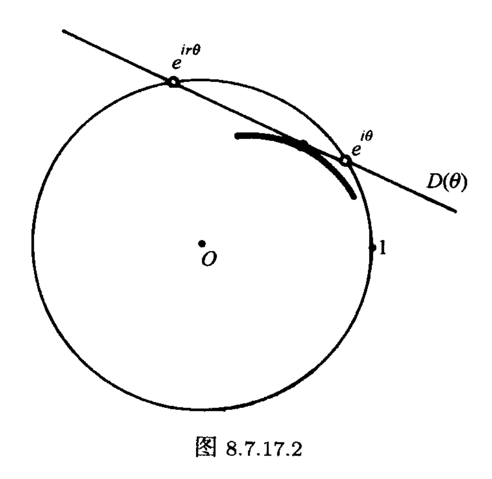


图 8.7.17.2

8.7.17.3　例子

a) 当 Γ' 的半径是 Γ 的半径的一半时, 而 Γ' 在 Γ 内部滚动时得到什么曲线? (Lahire 齿轮传动系统.)

b) 证明如果 Γ' 跟 Γ 半径相同, 而 Γ' 在外部滚动, 就得到一条帕斯卡蜗线, 通称心脏线. 设 a 和 D 是平面上的一个点和一条直线, $a \notin D$. 证明: 当 m 跑遍 D 时, 由条件 $m \in \Theta$ 和 $\widehat{D\Theta} = 3\widehat{ma, D}$ 确定的直线 Θ 包络出一个心脏线.

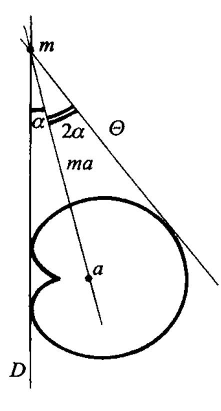


图 8.7.17.3.1

c) 证明平面上的球面镜的焦散线 (即平行于轴的光线的反射线的包络) 是有两个尖点的圆外旋轮线的一段 (称为肾脏线)

d) 证明垂直轴的球面螺旋线 (即在球面上描画的曲线, 其切线跟轴的夹角 α 是常值) 的水平投影对于适当的 α 是圆外旋轮线.

e) 证明端点描绘出两条正交直线的定长线段的包络是有四个尖点的圆内旋轮线 (称为星形线)

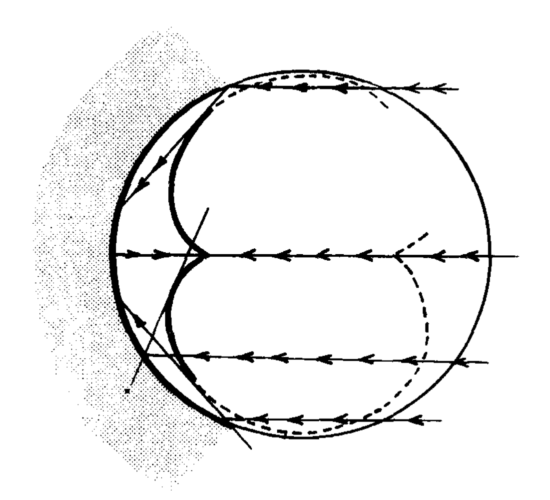


图 8.7.17.3.2

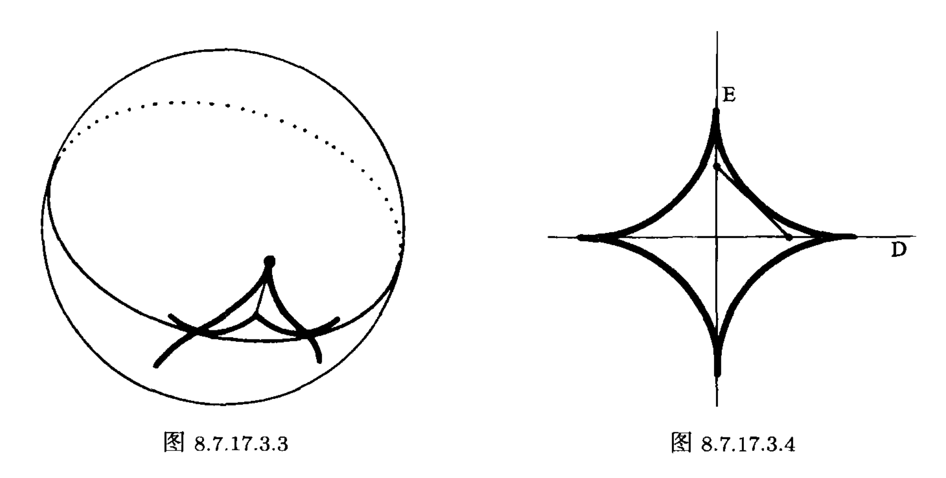


图 8.7.17.3.3　　图 8.7.17.3.4

8.7.17.4　性质

证明一个圆内旋轮线或圆外旋轮线的渐屈线 (即法线的包络) 跟原曲线是相似的. 证明弧长 s (从一个适当的起点算起) 和圆内旋轮线或圆外旋轮线的曲率 K 满足形式为

$$as^2 + bK^{-2} = c \quad (a, b, c \text{ 是常数})$$

的关系 (内蕴方程, 参见 8.5.7). 反之, 满足这个关系的曲线是什么曲线? 计算圆内旋轮线和圆外旋轮线的总长度.

8.7.17.5　对于涉及圆内旋轮线和圆外旋轮线的更多的知识, 参见 [134], 还可以参见 [135], 对于平面曲线以及它们同力学, 光学, 电学的关系, 这是十分惹人喜欢的文献; 尤其是其第 XXI 章讨论了圆外旋轮线和齿轮传动机构的关系. 最后参见 [136], 413 至 435 页对于旋轮线的解析阐述, 尤其是 433 至 435 页上对于汪克尔 (Wankel)

发动机机罩形状的确定.

8.7.18 双纽线

a) 证明平面上到其上两个定点距离之乘积是常值的点的轨迹的极坐标方程是 $\rho^2 = 2a^2\cos 2t$, 这里极点在线段 mn 的中点, m 和 n 之间的距离是 $2a$. 这个曲线称为伯努利双纽线.

b) 证明在图 8.7.18 上标明的角的性质和曲率中心的性质. 研究逆命题.

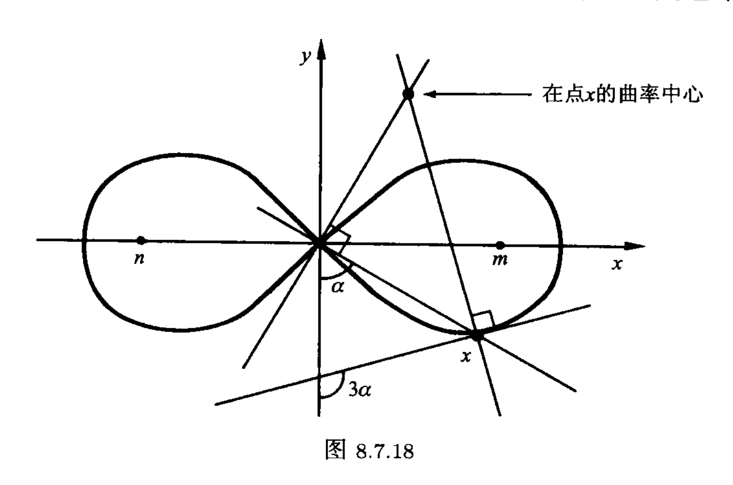


图 8.7.18

8.7.19 椭圆的曲率半径

椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-1=0$ 在点 m 的法线跟 x 轴交于一点 n. 用 d 表示 m 和 n 之间的距离, 而 R 表示椭圆在 m 的曲率, 证明关系

$$R=\frac{a^2}{b^4}\cdot d^3.$$

在 10.6.6.6.2 和 11.18 可以发现这个关系的一个应用.

8.7.20 悬链线的曲率中心

悬链线是固定在两个点的受重力作用的柔软线平衡时的曲线. 不计沿 x 轴的平移, 其方程是 $y = a\ \mathrm{ch}\dfrac{x}{a}$. 证明其曲率中心有如图 8.7.20 所标明的性质, 并且证明其逆命题. 在 10.6.6.6.3 可以发现一个应用.

8.7.21 平面曲线的曲率的欧拉方程

想法是把曲线定义作方程为

$$D(t):\cos t\cdot x+\sin t\cdot y=h(t)$$

的 $\mathbf{R}^2$ 的直线的包络, 其中 t 跑遍 $\mathbf{R}$(模 2π), $h(t)$ 是一个数值函数. 将总是假定 $h>0$. 证明包络在与直线 $D(t)$ 相切的点的曲率等于 $h(t)+h''(t)$.

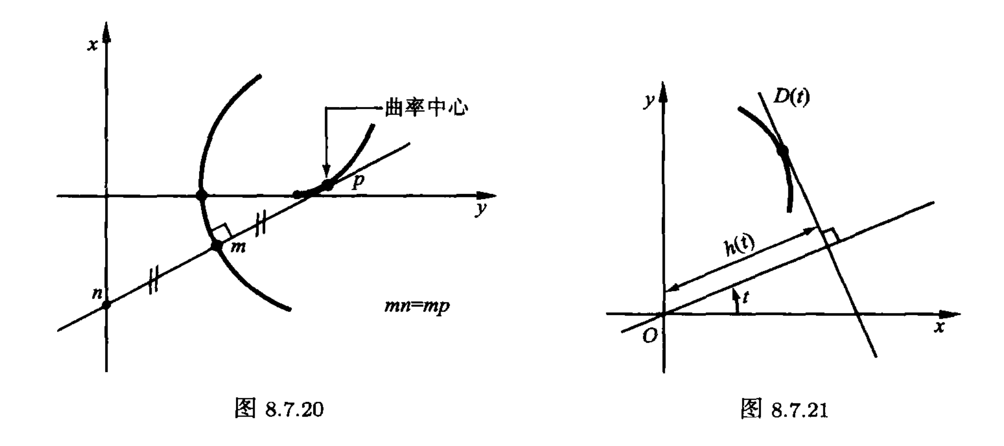


图 8.7.20 图 8.7.21

8.7.22 舒尔比较定理

设 C 是代数曲率的符号固定的平面曲线, D 是 $\mathbf{R}^3$ 的一条曲线. 假定 C 和 D 都用定义在同一区间 $[0, s]$ 上的弧长参数表示. K_C 和 K_D 分别是 C 和 D 的曲率 (不是代数的), 假定它们满足对于所有的 t 有 $K_C(t) \geqslant K_D(t)$, 证明如果 s 充分小, 则

$$\text{自 } C(0) \text{ 到 } C(s) \text{ 的距离 } \leqslant D(0) \text{ 到 } D(s) \text{ 的距离}.$$

此外, 如果等式成立, 则 D 也是平面曲线, 并且从 C 通过一个平面间的同构得到 (不要跟 9.9.7a) 的曲率的不等式混淆). 解释这个结果的物理意义.

由上推出, 在所有曲率 $\leqslant 1/R$ 的闭曲线中, 长度最小的是半径为 R 的圆周

8.7.23 贝特朗曲线

考虑两条不同的空间曲线 C 和 D, 对于参数的所有值, 它们有 (作为空间的直线的) 同一条主法线.

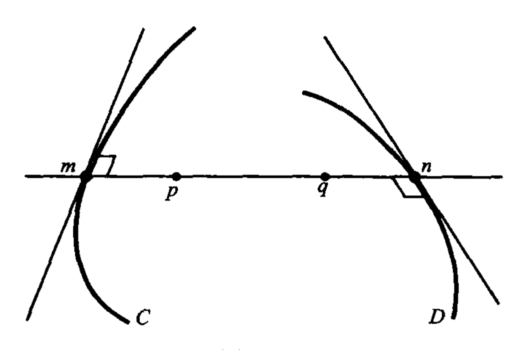


图 8.7.23

如果存在这样的 D, 我们说 C 是一条贝特朗曲线. 证明当且仅当 C 的曲率 K 和挠率 T 满足线性关系

$$aK + bT = 1 \quad (a, b \text{ 是常数}),$$

C 是贝特朗曲线.

证明如果 C 有两条不同的这样的曲线 D_1 和 D_2, 则有无穷条这样的曲线, 并且事实上, 它是圆柱螺旋线.

证明四个点 m, n, p, q 的交比 (参见 [40], 第 6 章) 是常数: 这里 m 和 n 是 C 和 D 的对应点, 而 p 和 q 是对应的曲率中心.

第九章　平面曲线的整体理论

本章的对象是圆周在一个平面内的浸入像, 称为闭曲线; 以及圆周在一个平面内的嵌入像, 称为简单闭曲线 (事实上, 涉及的是这些客体的等价类).

对于平面的简单闭曲线, 我们证明若尔当定理, 它断言这个曲线的补集有两个连通分支, 其中的一个是紧致的, 称为曲线的内部 (9.2.1). 接着是等周不等式, 它联系这个曲线的长度和它的内部的面积 (9.3.1). 最后是四顶点定理 (9.7.4) 和一个整体凸性的性质 (9.6.2).

对于任意平面闭曲线, 引入一个回转数 (9.4 节), 它说的是当跑遍曲线一次时, 切向量转动多少. 惠特尼 - 格劳斯坦定理断定如果两条曲线有同样的回转数, 则它们必然是同伦的 (9.4.8). 切线回转定理说的是对于一条简单曲线, 这个回转数是 ± 1(9.5.1). 最后对平面闭曲线给出一个联系拐点数、重点数、重切线数的计数公式 (9.8.1).

仅在必要时，我们才明确 C^p 类曲线中的 $p \geqslant 1$. 有些结果可以对于 C^0 类曲线建立，但证明可能不那么简单.

9.1 定　　义

9.1.1 定义

*我们称有限维向量空间 E 的连通和紧致的 (对应的，定向的) 1 维子流形为 (对应的，**定向**) **简单闭曲线**.*

我们已经知道 (参见 3.4.1) 这样的曲线 C 微分同胚于 S^1. 于是可以考虑等价的说法:

9.1.2 *E 的一条**简单闭曲线**是从 S^1 到 E 内的嵌入 (S^1, f) 对于等价关系 $\sim$ 的一个等价类，$\sim$ 的定义是：当且仅当 $g^{-1} \circ f$ 属于 $\mathrm{Diff}(S^1)$, $(S^1; f) \sim (S^1; g)$.*

在第八章进行的研究 (8.1.9 的第二个情形) 让我们给出第三个等价定义:

9.1.3 *E 的一条**简单闭曲线**是 E 的一个这样的几何弧 C, 存在一个参数表示 $(\mathbf{R}, f) \in C$, f 是 L- 周期函数 $(L > 0)$, 而 f 在 $[0, L)$ 上是单射.*

这引导我们提出下列更一般的定义:

9.1.4 定义

*E 的一条 C^p 类**闭曲线**是从 S^1 到 E 内的 C^p 类的浸入的对于等价关系 $\sim$ 的等价类，$\sim$ 的定义是：当且仅当存在 $\mathrm{Diff}^p(S^1)$ 内的 θ 使得 $f = g \circ \theta$, 则 $(S^1; f) \sim (S^1; g)$.*

9.1.5 定义

*E 的一条**定向闭曲线**是从 S^1 到 E 内的 C^p 类的浸入的对于等价关系 $\sim$ 的等价类，$\sim$ 的定义是：当且仅当存在 S^1 的保持定向的微分同胚 θ 使得 $f = g \circ \theta$, 则 $(S^1;\ f) \sim (S^1;\ g)$.*

9.1.6 注释

只需重复在 8.1.9 (在 V 微分同胚于 S^1 的情形) 中的证明就可以验证下列定义的等价性:

9.1.7 *E 的一条**闭曲线**是 E 的一个这样的几何弧 C, 存在 $(\mathbf{R}, f) \in C$, f 是 L-周期的$(L > 0)$.*

显然，一条简单闭曲线典范地确定一条闭曲线.

9.1.8 例子

9.1.8.1　必须明白像集 $f(\mathbf{R}) = V$ 不仅仅确定唯一的闭曲线：可以多次描绘它. 此外，在 9.1.7 中的 L 不必是最小周期.

例如，映射 $\bar{f}_n : t \mapsto (\cos n\pi t, \sin n\pi t)$　$(n \in \mathbf{Z}^*)$ 确定映射 $f_n : S^1 \to \mathbf{R}^2$, 这是闭曲线，当 n 取遍 $\mathbf{Z}^*$ 时，它们互不相同，但是它们有同样的像集 $f_n(S^1) = S^1 \subset \mathbf{R}^2$, 这是圆周$S^1$, 但是环绕了 n 圈. 参见 9.4.5.1.

9.1.8.2　图 8.1.5 中的图形表示同样的像集，但环绕的方式不同.

9.1.8.3　由 $(\cos t, \sin t) \mapsto (\cos t, \sin 2t)$ 定义的 $f : S^1 \to \mathbf{R}^2$.

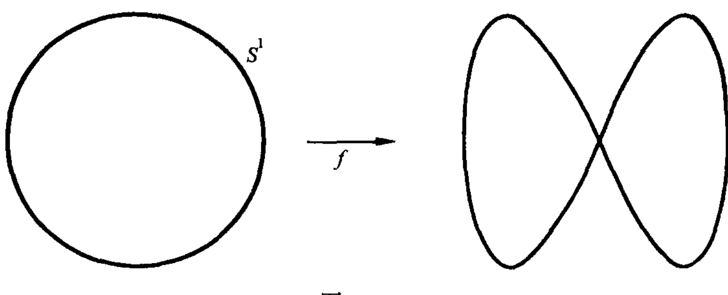


图 9.1.8.3

9.1.8.4　设 D 是 (对应的, 定向) 欧几里得平面 E 的紧致区域. 则 D 的边界 ∂D 由有限数目的 (对应的, 定向) 简单闭曲线组成: 应用 3.4.1, 5.3.35 和 5.3.36.

注意即使 D 是连通的, ∂D 也可能由多条曲线组成. (对于图 9.1.8.4, 是 3 条).

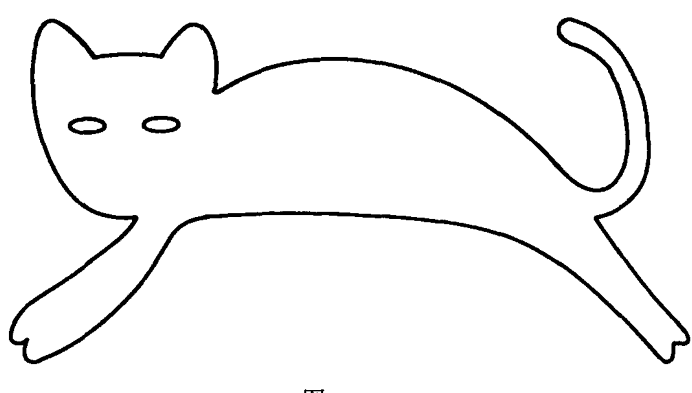


图 9.1.8.4

其边界连通的连通区域 D 的特征由保形表示的基本定理所解决 (比如参见 [22], 188 页): 这正是单连通的 D.

用跟 8.1.7 和 8.1.8 类似的方式引进下列定义:

9.1.9　定义

E 的闭曲线 C 的一个**点**是三元组 (S^1, f, m) 对于等价关系 $\sim$ 的一个等价类, $\sim$ 的定义是: $(S^1, f, m) \sim (S^1, g, n)$, 如果 $(S^1, f) \sim (S^1, g)$, 其中 $f = g \circ \theta$, 并且 $n = \theta(m)$. 对应的 E 的点 $x = f(m) = g(n)$ 称为 C 的所考虑的点的像, 并且记作 ⓜ. C 的一个点的**重数**是对于 $(S^1, f) \in C$, 所有子集 $f^{-1}(f(m))$ 的公共基数.

在例子 9.1.8.1, S^1 的任意一个点的重数是 $|n|$; 这特别地表明所考虑的曲线当 n 取遍 $\mathbf{N}^*$ 时是各不相同的.

现在打算推广在 7.3.7 和 7.6.8 引入的指标概念. 设 C 是定向欧几里得平面的一条定向闭曲线; $S(E)$ 是 E 的单位圆周, 作为单位圆的边界为其典范定向 (7.5 节的开头). 给定 $m \in E$, 由 $f_m : s \mapsto \dfrac{f(s) - m}{\|f(s) - m\|}$ 定义映射 $f_m : S^1 \to S(E)$. 这个映射

的映射度只依赖 C, 这是因为如果 $(S^1, f) \sim (S^1, g)$, 而 $f = g \circ \theta, \theta \in \mathrm{Diff}(S^1)$ 保持定向, 则 $f_m = g_m \circ \theta$, 于是根据 7.3.4 和 7.3.6.2 得到 $\deg f_m = \deg g_m \circ \deg \theta = \deg g_m$. 由此得

9.1.10 定义

上面定义的映射度称为**点 m 对于 C 的指标**, 记作 $\mathrm{indice}_m C$.

9.1.11 $\mathrm{indice}_m C$ 不依赖所选择的欧几里得结构: 习题 9.9.1.

9.1.12 命题

映射 $m \mapsto \mathrm{indice}_m C$ 在 C 对于 E 的补集 $E - C$ 的每个连通分支上取常值.

事实上, 设 m 和 n 是 $E - C$ 的同一个连通分支里的两个点, $(S^1, f) \in C$, 考虑从 S^1 到 E 内的映射

$$f_m : s \mapsto \frac{f(s) - m}{\|f(s) - m\|} \quad \text{和} \quad f_n : s \mapsto \frac{f(s) - n}{\|f(s) - n\|}.$$

根据 7.6.5, 如果它们是同伦的, 它们将有同样的映射度. 因为 m, n 在 $E - C$ 的同一个连通分支里, 根据 2.2.13, 存在连续的 $\gamma : [0, 1] \to E$, 使得 $\gamma(0) = m, \gamma(1) = n$, 并且 $\gamma([0, 1]) \subset E - C$. 那么由

$$F(t, s) = \frac{f(s) - \gamma(t)}{\|f(s) - \gamma(t)\|}$$

定义的映射 $[0, 1] \times S^1 \to S(E)$ 是所希望的同伦.

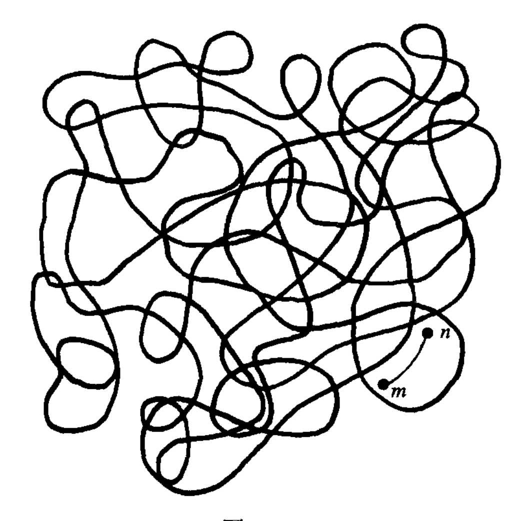


图 9.1.12

9.1.13 命题

设 C 是欧几里得空间 E 的闭曲线. 则存在 C 的周期弧长参数表示. 它们的公共周期称为闭曲线 C 的**长度**, 记作 $\mathrm{Long}(C)$.

事实上, 利用 8.3.2 和 8.1.9 即得结论.

9.1.14 例子

本章 9.1.8.1 的曲线 f_n 的长度是 $2|n|\pi$.

9.1.15 注释

可以更广泛地 "在 C 上积分". 如果 $(\mathbf{R}, f)$ 是一个周期为 L 的弧长参数表示, 对于定义在 C 上取值在 $\mathbf{R}$ 的函数 g 对应一个定义在 $[0, L]$ 上的函数 $\widetilde{g}$, 使得如果 $m = f(t) \in C$, 则 $\widetilde{g}(t) = g(m)$. 于是可以考虑 $\int_0^L \widetilde{g}(t)\mathrm{d}\,t$, 这是 C 的某种类型的测度.

9.2 若尔当定理

9.2.1 定理

设 C 是 2 维仿射空间 E 的 C^2 类简单闭曲线. 则 $E - C$ 恰有两个连通分支, 记作 C_{int} 和 C_{ext}, 使得 $\bar{C}_{\text{int}}$ 和 $\bar{C}_{\text{ext}}$ 是 E 的带边区域, 它们的公共边界是

$$\partial\bar{C}_{\text{int}} = \partial\bar{C}_{\text{ext}} = C.$$

以下两个准则之一刻画 C_{int} 和 C_{ext}:

(i) $\bar{C}_{\text{int}}$ 是紧致的, $\bar{C}_{\text{ext}}$ 则否;

(ii) $\forall x \in C_{\text{int}} : \text{indice}_x C = \pm 1; \forall x \in C_{\text{ext}} : \text{indice}_x C = 0$.

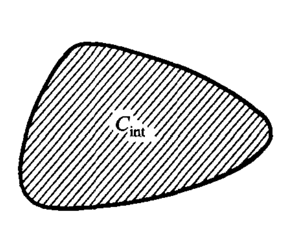
9.2.2 定义

C_{int} 称为 C 的**内部**, C_{ext} 称为 C 的**外部**.

9.2.3 注释

9.2.3.1 这个定理对于 C^0 类曲线是成立的, 参见 [8], ap.4.2.

9.2.3.2 像下面图 9.2.3 右侧的图表明的, 若尔当定理对于复杂的曲线直观地看并不是显而易见的.



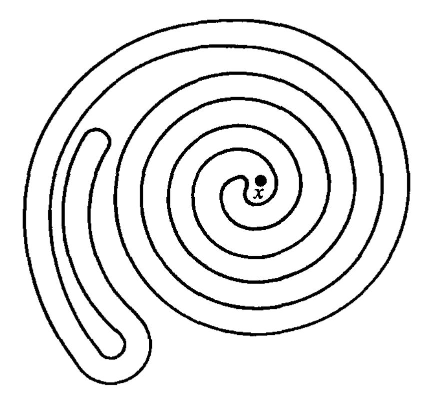


图 9.2.3

请问点 x 在 C_{int} 里呢, 还是在 C_{ext} 里呢?

9.2.3.3 我们会问如此得到的 E 的区域是什么区域? 回答是: 这是单连通区域. 参见 9.1.8.4.

9.2.4 证明

为了证明, 我们给 C 和 E 定向, 并且在 E 上配备欧几里得结构.

9.2.5 引理

设 m 是一条简单闭曲线 C 的一个点, 而 u 和 v 是 C 在 m 的法线上的两个点, 位于 m 的两侧, 充分接近于 m, 且异于 m. 则 $|\text{indice}_u C - \text{indice}_v C| = 1$. 更明确地说, 按照 C 的定向, 如果 u 在 m 的左侧, 而 v 在 m 的右侧, 则 $\text{indice}_u C - \text{indice}_v C = 1$.

第一步. 根据定理 2.1.2(iv), 在 m 的周围放置一个矩形, 使得在此矩形内 C 是一个图像. 可以让 u 和 v 在此矩形内 (因为 u 和 v"充分接近于 m"), 这两个点不在 C 的像集上. 通过在下面图 9.2.5.1 中看到的同伦映射把 C 变换为 D, 这里 D 是右侧的图定义的曲线. 把 D 看作参数弧, 仅仅是 C^0 类的. 对于这类曲线的指标 $\text{indice}D$ 沿用 9.19 后半部分的定义. 根据 7.6.5, 将有

$$\text{indice}_u C = \text{indice}_u D, \quad \text{indice}_v C = \text{indice}_v D.$$

同样当 u 和 v 在矩形内的法线上的部分变动时, $\text{indice}_u D$ 和 $\text{indice}_v D$ 保持不变.

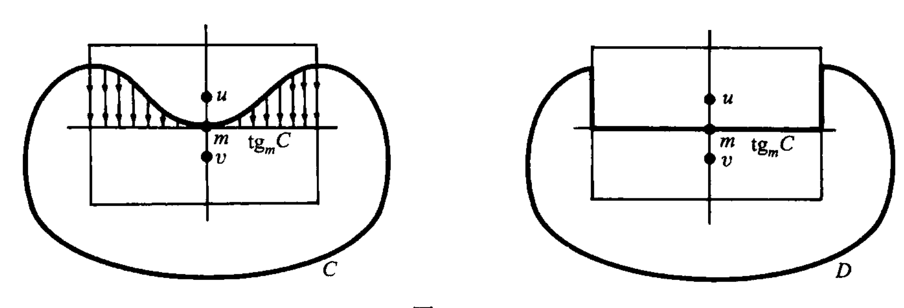


图 9.2.5.1

第二步. 设 a 和 b 在过点 m 的直线在 D 内的部分上固定. u 和 v 跟 m 的距离为 ε.

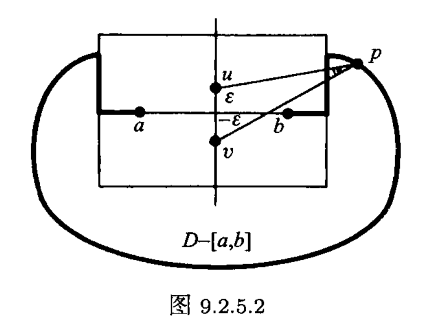


图 9.2.5.2

如果 $p \in D - [a,b]$, 则以一致的方式

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(\angle(\overrightarrow{pu},\overrightarrow{pv})) = 0$$

(因为 p 到 u(和 v) 的距离保持大于 $\inf\{am, bm\}$ 并且 uv 趋于 0). 设 h 是 D 的一个参数表示, 其周期 $L > 1$, 使得 $h(0) = a$ 和 $h(1) = b$, 考虑从 $[0, L]$ 到 $S(E)$ 的映射

$$f : t \mapsto \frac{h(t)-u}{\|h(t)-u\|} \quad 和 \quad g : t \mapsto \frac{h(t)-v}{\|h(t)-v\|}.$$

这两个映射的映射度分别是 u 和 v 对于 D 的指标.

设 $\bar{f}$ 和 $\bar{g}$ 分别是 f 和 g 在 $\mathbf{R}$ 内的提升 (应用 8.5.5.1 和 8.5.5.2), 我们知道 $\bar{f}(t+L) - \bar{f}(t) = 2k\pi$(对于所有 t) 中的整数 k 是 f 的映射度 (参见 7.6.4), 对于 $\bar{g}$ 有同样的结果. 取 ε 充分小, 使得对于所有 $p \in D - [a,b], \angle(\overrightarrow{pu},\overrightarrow{pv}) < \eta$, 这里 $\eta < \pi$. 那么, 如果能够选择 $\bar{f}$ 和 $\bar{g}$ 使得 $|\bar{f}(1) - \bar{g}(1)| < \eta$, 对于所有 $t \in [1, L]$ 将有 $|\bar{f}(t) - \bar{g}(t)| < \eta$. 特别有 $|\bar{f}(L) - \bar{g}(L)| < \eta$. 这都是因为 $\bar{f}$ 和 $\bar{g}$: $\mathbf{R} \to S(E)$ 在 $\mathbf{R}$ 的长度为 L 的区间上是单射.

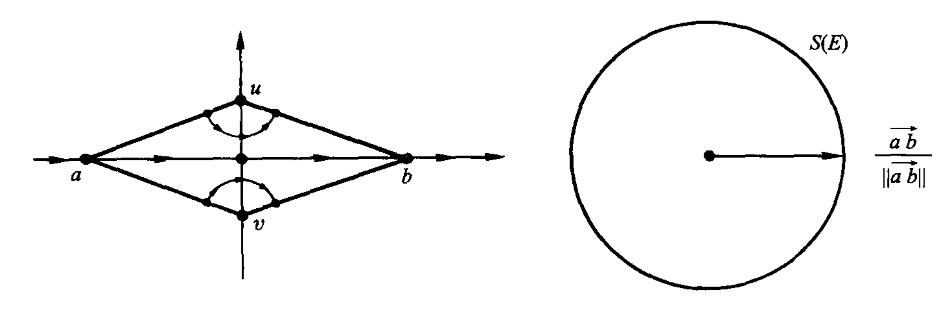


图 9.2.5.3

在 $S(E)$ 上取固定方向 $\overrightarrow{ab}$ 作为角的起始边; 对于充分小的 ε, 可以取 $\bar{f}(0)$ 接近 $-\pi$, $\bar{g}(0)$ 接近 π. 于是提升 $\bar{f}$ 和 $\bar{g}$ 由 $[0,1]$ 上的图形确定, 特别地有 $\bar{f}(1)$ 和 $\bar{g}(1)$ 接近于 0, 于是 $|\bar{f}(1) - \bar{g}(1)| < \eta$. 根据前面所说的, $|\bar{f}(L) - \bar{g}(L)| < \eta$.

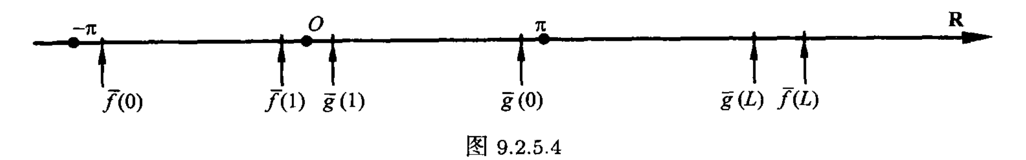


图 9.2.5.4

量

$$\begin{aligned}&2\pi(\text{indice}_u C - \text{indice}_v C)\\ &= (\bar{f}(L) - \bar{f}(0)) - (\bar{g}(L) - \bar{g}(0)) = (\bar{f}(L) - \bar{g}(L)) - (\bar{f}(0) - \bar{g}(0))\end{aligned}$$

对于充分小的 ε 接近于 $\bar{f}(0)-\bar{g}(0)$, 后者接近于 2π. 由于 $2\pi(\text{indice}_u C-\text{indice}_v C)$ 是 2π 的整数倍, 故严格地

$$\text{indice}_u C-\text{indice}_v C=1,$$

这就证明了引理.

若尔当定理的证明

应用定理 2.7.12; 可以选择 $\varepsilon>0$, 使得沿用 2.7 节的记号, 映射 $\text{can}: N^\varepsilon C\to TUB^\varepsilon C$ 是一个嵌入. 而 $N^\varepsilon C-C\times\{0\}$ 有两个连通分支且仅仅两个: 事实上, $\forall x\in C$, 法空间 N_xC 是典范地定向的 (参见 6.7.22); 而 N_xC 是 1 维且定向的, 这就是说 $N_xC-\{0\}$ 有一个典范连通分支, 于是 $N^\varepsilon C-C\times\{0\}$ 有一个典范连通分支, 随之 $N^\varepsilon C-C\times\{0\}$ 有两个连通分支, 分别记作 S_1 和 S_2. 因为 can 是一个微分同胚, $C\times\{0\}$ 对应到 C, 由此推出 $TUB^\varepsilon C-C$ 正好有两个连通分支: $\text{can}(S_1)=T_1,\text{can}(S_2)=T_2$.

把 $E-C$ 分解为连通分支

$$E-C=\Omega_1\bigcup\cdots\bigcup\Omega_k\bigcup\cdots.$$

T_1 和 T_2 是 $E-C$ 的连通分支, 即我们有 (如果必要, 变更指标), 或者 $T_1\subset\Omega_1$ 和 $T_2\subset\Omega_2$, 或者 $T_1\bigcup T_2\subset\Omega_1$. 而后一种情形根据引理 9.2.5 是要除外的, 这是因为在 ($E-C$ 的连通分支, 引理 9.1.12) T_1 上和 T_2 上指标是常数, 因为这不是同一个常数, T_1 和 T_2 不可能在 $E-C$ 的同一个连通分支里. 于是 $E-C$ 至少有两个连通分支 Ω_1 和 Ω_2, 并且 $T_1\subset\Omega_1$ 和 $T_2\subset\Omega_2$.

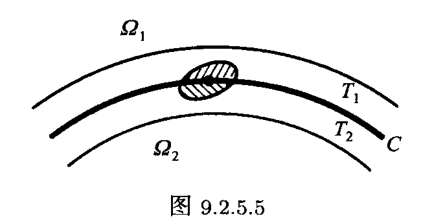


图 9.2.5.5

仅仅有两个连通分支. 事实上, 设 Ω_i 是 $E-C$ 的一个连通分支. 由于 C 是闭集, 而 Ω_i 是开集, 故 $\partial\Omega_i\subset C$. 又有 $\partial\Omega_i\neq\varnothing$ (否则, 将有 $E-C=E$). 但是 C 的所有点有一个邻域仅跟 T_1 和 T_2 相交, 从而仅跟 Ω_1 和 Ω_2 相交, 于是 $E-C=\Omega_1\bigcup\Omega_2$, $T_1\subset\Omega_1,T_2\subset\Omega_2$, 并且有 $\partial\Omega_1=\partial T_1=\partial\Omega_2=\partial T_2=C$.

留下的是要确认这两个连通分支所具有的性质.

首先 $\bar{\Omega}_1$ 和 $\bar{\Omega}_2$ 是带边区域. 因为如果 f 是子流形 C 的局部方程, Ω_1 和 Ω_2 局部地由 $f^{-1}((-\infty,0))$ 和 $f^{-1}((0,+\infty))$ 给定, 参见 2.1.6.5. 此外, 由于 $\bar{\Omega}_1\bigcup\bar{\Omega}_2=E$, $\bar{\Omega}_1$ 和 $\bar{\Omega}_2$ 不可能二者都是紧致的. 由于 C 是紧致的, 存在 $a>0$, 使得 $C\subset B(0,a)$. 如果 $m\notin B(0,a)$, 则 $\text{indice}_m C=0$, 这是因为 C 经过含于 $B(0,a)$ 从而跟 m 不

相遇的同伦收缩到 $0 \in B(0,a)$, 而任何点对于一个常值连续曲线的指标是零. 因此 $\Omega_i (i=1,2)$ 中使得 $\mathrm{indice}_m C = \pm 1$ 的一个在 $B(0,a)$ 内, 随之是相对紧致的.

关于定向曲线的情形从证明本身得到相应结果.

9.2.6 推论

定向仿射平面的简单闭曲线具有一个典范定向, 并且对于这个定向, $\mathrm{indice}_x C = 1 \quad \forall x \in C_{\mathrm{int}}$.

事实上, 给 C 这样定向, 使得 $C = \partial C_{\mathrm{int}}$ 配备定向空间的带边区域的边界的典范定向 (定理 5.3.36). 那么, 沿用引理 9.2.5 的写法, 我们有 $u \in C_{\mathrm{int}}$ 和 $v \in C_{\mathrm{ext}}$. 正如我们曾经了解的那样, $v \in C_{\mathrm{ext}}$ 蕴涵 $\mathrm{indice}_v C = 0$, 于是 (引理 9.2.5) $\mathrm{indice}_u C = 1$. 实际情形是: 当一个人沿 C 的正向行进时, C_{int} 在人的左侧. 证毕.

现在给出一个判断 $x \in C_{\mathrm{ext}}$ 或 $x \in C_{\mathrm{int}}$ 的适用准则. 在定理 9.5.1 的证明的结尾还可以看到另一个准则.

9.2.7 引理

设 C 是仿射平面 A (关联到向量空间 E) 的 1 维子流形. 假定 C 和 A 是定向的. 设 $x \in A - C$. C 的一个点 m 是由

$$n \mapsto \frac{\overrightarrow{xn}}{\|\overrightarrow{xn}\|}$$

定义的由 C 到 $S(E)$ 的映射的临界点, 当且仅当直线 xm 是 C 在 m 的切线.

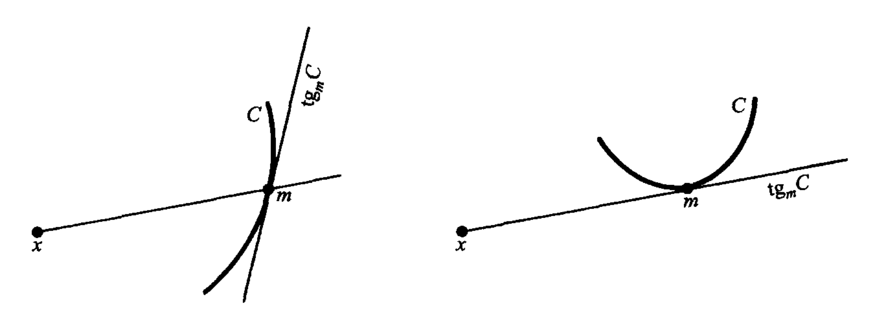


图 9.2.7

认为 A 就是向量空间 E, 那么引理中的映射就是映射

$$f: n \mapsto \frac{n-x}{\|n-x\|}.$$

作为从 $E - \{x\}$ 到 E 内的映射, 其在 m 的导数作用到点 z 的值由下式给定:

$$f'(m)(z) = \frac{m-z}{\|m-z\|} - \frac{(m-x|m-z)\cdot(m-x)}{\|m-z\|^{3/2}}.$$

对于 $z \in \mathrm{tg}_m C$, 这个映射仅当 $m - x \in \mathrm{tg}_m C$ 时, 即 xm 是 C 在 m 的切线时, 由此得到引理.

设 $u \in S(E)$ 是这个映射 f 的正则值 (根据萨德定理的推论 4.3.6, 它是存在的). A 的起点为 x 平行于 u 的半直线决不切于 C (否则, u 将是临界值), 并且和 C 交于有限个点 (参见定理 4.1.5 的证明).

那么根据定理 9.2.1 的准则 (ii) , $x \in C_{\text{int}}$ 等价于 $\text{indice}_x C = \pm 1$, 再根据推论 7.3.3, 这等价于一条从 u 出发的跟 C 不相切的半直线切割奇数次. 由此得到

9.2.8　实用准则

设 C 是仿射平面 A 的一条简单闭曲线, $x \in A - C$. 则存在以 x 为起点的跟 C 不相切的半直线. 它们切割 C 有限的次数 k, 并且有

$$x \in C_{\text{int}} \Leftrightarrow k \text{ 是奇数},$$
$$x \in C_{\text{ext}} \Leftrightarrow k \text{ 是偶数}.$$

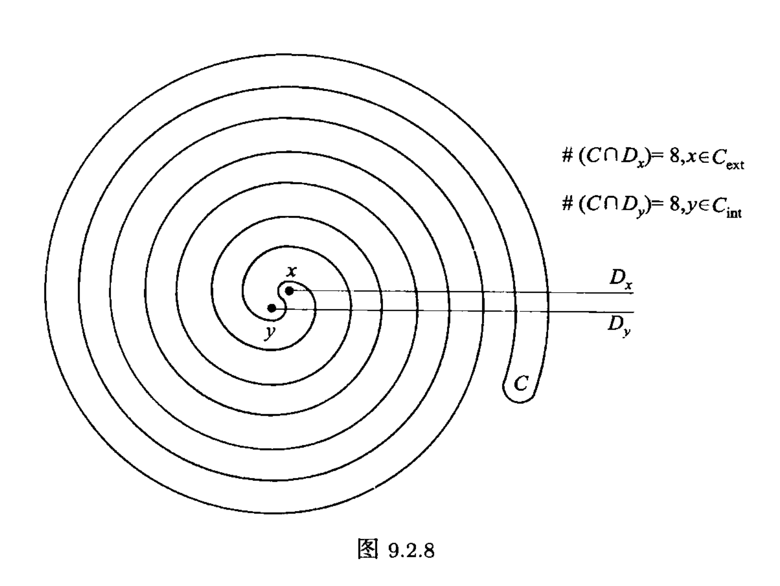


图 9.2.8

9.2.9　注释

其实萨德定理的推论 4.3.6 说的是 “几乎所有” 的半直线不是切线. 这样的半直线称为 “斜截于 C” (对于特别重要且实用的斜截性的概念, 参见 [23]).

9.2.10　注释

对于发现 C_{int} 的其他实用方法, 参见 9.5.1 的证明.

9.3　等周不等式

在这一节里, E 是一个欧几里得平面, C 是 E 的一个 C^p 类简单闭曲线. 由于 $\bar{C}_{\text{int}}$ 是紧致的, 这条曲线可以对应一个面积, 这里指的是 C_{int} 的面积. 还可以考虑这条曲线的长度, 记之为 $\text{Long}(C)$. 我们有:

9.3.1 定理

对于欧几里得平面 E 的所有 C^p 类简单闭曲线 C, 这里 $p \geqslant 2$, 我们有 $\text{Long}^2(C) \geqslant 4\pi\,\text{Aire}\,(C_{\text{int}})$, 并且当且仅当 C 是一个圆周时, $\text{Long}^2(C) = 4\,\pi\,\text{Aire}\,(C_{\text{int}})$.

9.3.2 引理 (维尔丁格不等式)

设 $f \in C^1(\mathbf{R})$ 是 2π- 周期函数, 满足条件

$$\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{d}\,x = 0,$$

那么有

$$\int_0^{2\pi} f'^2(t)\mathrm{d}\,t \geqslant \int_0^{2\pi} f^2(t)\mathrm{d}\,t.$$

而且当且仅当 $f(t) = a\cos t + b\sin t$(a 和 b 是任意实数) 时, 等式成立.

事实上, f 在 $[0, 2\pi]$ 的限制是连续的, 属于 $L^2([0, 2\pi])$, 这是在 $[0, 2\pi]$ 上平方可和的函数的希尔伯特空间, 于是 f 在 L^2 意义下等于其傅里叶级数展开

$$f = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt + b_n\sin nt).$$

于是有 (由于 $\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{d}\,x = 0$, $a_0 = 0$) 帕塞瓦尔等式:

$$\|f\|^2 = \sum_{n\geqslant 1}\pi\left(a_n^2 + b_n^2\right) = \int_0^{2\pi} f^2\mathrm{d}\,t.$$

同样有 (在 L^2 意义下):

$$f'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n(b_n\cos nt - a_n\sin nt).$$

事实上, 对于

$$\alpha_n = \int_0^{2\pi} f'(t)\cos nt\mathrm{d}\,t$$

分部积分得到:

$$\int_0^{2\pi} f'(t)\cos nt\mathrm{d}\,t = [f(t)\cos nt]_0^{2\pi} + n\int_0^{2\pi} f(t)\sin nt\mathrm{d}\,t = n\int_0^{2\pi} f(t)\sin nt\mathrm{d}\,t = nb_n,$$

同样有

$$\beta_n = \int_0^{2\pi} f'(t)\sin nt = -na_n.$$

故

$$\|f'\|^2 = \int_0^{2\pi} f'^2\mathrm{d}\,t = \sum_{n\geqslant 1}\pi n^2\left(a_n^2 + b_n^2\right),$$

于是 $\|f'\|^2 \geqslant \|f\|^2$, 当且仅当存在 $n>1$, 使得 $a_n^2+b_n^2\neq 0$ 时, 不等式是严格的. 由此得到引理.

9.3.3 等周不等式的证明

通过位似变换可以归结为长度为 2π 的 C^2 类简单闭曲线的情形. 设 h 是 C 的一个 2π- 周期的弧长参数表示 (参见 9.1.13). 选择坐标轴使得第一个轴通过 $\bar{C}_{\text{int}}$ 的重心 (参见 6.5.14 和 9.2.1(i)).

设 f 和 g 是弧长参数表示 h 的坐标函数, 这还意味着 (参见 6.5.14): $\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{d}t = 0$ (第一个轴通过重心). 而 h 是弧长参数表示, 故

$$\int_0^{2\pi}(f'^2+g'^2)\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}t=2\pi=\mathrm{Long}\,(C).$$

根据斯托克斯公式, 并且注意到 $\mathrm{d}\,(x\mathrm{d}\,y)=\mathrm{d}\,x\wedge\mathrm{d}\,y$, 我们得到

$$\mathrm{Aire}\,(C)=\int_{C_{\text{int}}}\mathrm{d}\,x\wedge\mathrm{d}\,y=\int_{\bar{C}_{\text{int}}}\mathrm{d}\,x\wedge\mathrm{d}\,y=\int_{\partial\bar{C}_{\text{int}}}x\mathrm{d}\,y,$$

把此式改写为

$$\mathrm{Aire}\,(C_{\text{int}})=\int_C x\mathrm{d}\,y=\int_0^{2\pi}fg'\mathrm{d}t.$$

于是

$$\begin{aligned}2(\pi-\mathrm{Aire}\,(C_{\text{int}}))&=\int_0^{2\pi}(f'^2+g'^2-2fg')\mathrm{d}t\\&=\int_0^{2\pi}(f'^2-f^2)\mathrm{d}t+\int_0^{2\pi}(f-g')^2\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

由于 $\int_0^{2\pi}f(t)\mathrm{d}t=0$, 应用引理 9.3.2, 第一个积分是正的或是零. 第二个积分亦如此. 于是

$$\mathrm{Long}\,(C)=2\pi\geqslant 2\ \mathrm{Aire}\,(C_{\text{int}}),$$

随之

$$\mathrm{Long}^2(C)\geqslant 2\pi\cdot 2\mathrm{Aire}\,(C_{\text{int}}).$$

如果等式成立, 必须 $\int_0^{2\pi}(f'^2-f^2)\mathrm{d}t=0$, 于是 (引理 9.3.2) $f(t)=a\cos t+b\sin t$.

还几乎处处 $(f-g')^2=0$, 由于所考虑的函数是连续的, $g'(t)=f(t)$, 从而 $g(t)=a\sin t-b\cos t+c$; 我们得到的正是一个圆周的弧长参数表示.

9.3.4 注释

9.3.4.1 不等式对于 C^1 类甚至 C^0 类简单闭曲线仍然成立 (参见 [24] 中书后的参考文献).

9.3.4.2 如果 V 是 (n 维的)E 的 $n-1$ 维连通紧致子流形, 那么它是一个紧致带边区域 $\bar{V}_{\text{int}}$ 的边界 (特别地, V 是可定向的), 这个命题是成立的: 参见 [13],81 页.

于是可以定义 $\mathrm{Vol}(V)$ 和 $\mathrm{Vol}(\bar{V}_{\text{int}})$(参见 6.5.1), 并且有

9.3.5
$$(\mathrm{Vol}(V))^n \geqslant \frac{(\mathrm{Vol}(S^{n-1}))^n}{(\mathrm{Vol}(B_{\mathbf{R}^n}(0,1)))^{n-1}}(\mathrm{Vol}(\bar{V}_{\text{int}}))^{n-1}.$$

但是对于 $n \geqslant 3$ 这个公式的证明要困难得多: 参见 [40], 12.11 和本书 6.6.9.

9.4 平面曲线的回转数

在本节, 假定所有有关对象是 C^1 类的. 给定定向欧几里得平面 E 的一条定向曲线 C. 设 $(S^1;f)\in C$(即根据 9.1.4 定义 C 的 $(S^1;f)$ 是从 S^1 到 E 内的一个浸入), 从 S^1 到 $S(E)$ 内的单位切映射 τ_f:

9.4.1
$$\tau_f: t\mapsto \tau(f(t)) = \frac{f'(t)}{\|f'(t)\|}$$

是连续的. 此外, 如果 $(S^1;f)\sim(S^1;g)$, 那么存在 $\theta\in \mathrm{Diff}(S^1)$ 保持定向, 使得 $\tau_f = \tau_g\circ\theta$. 完全跟 9.1.10 一样, 我们有 $\deg\tau_f = \deg\tau_g$. 由此得到下列定义的合理性:

9.4.2 定义

前面 9.4.1 定义的映射 τ_f 的映射度不依赖 $(S^1;f)\in C$, 称为**切映射的映射度**, 或 C 的**回转数**, 记作 $\mathrm{enroul}(C)$.

9.4.3 富有启发性的解释是: 回转数谈的是当沿曲线走一圈时, 定向切线转动多少圈 (或多少弧度的角).

9.4.4 注释

9.4.4.1 $\deg\tau$ 不依赖所选择的欧几里得结构 (参见 9.1.11).

9.4.4.2 如果反转一个定向 (曲线的定向或空间的定向), 则 $\mathrm{enroul}(C)$ 改变符号.

9.4.5 例子

9.4.5.1 设 $n\in\mathbf{Z}-\{0\}$, 而 C_n 是 9.1.8.1 定义的曲线; 则 $\mathrm{enroul}(C_n)=n$.

9.4.5.2 下面的图 9.4.5.2 所示的闭曲线的回转数分别是 2 和 $n+1$ (平面是典范地定向, 而曲线的定向由箭头标出).

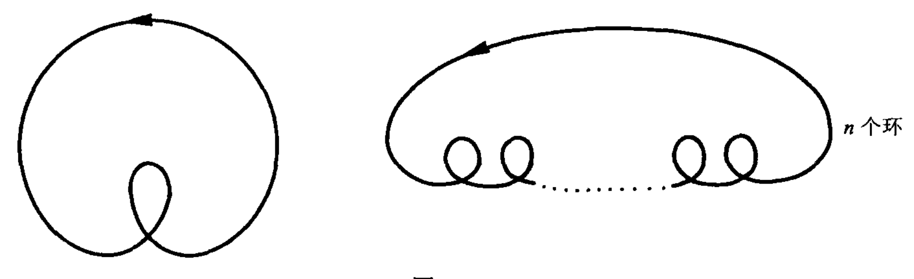


图 9.4.5.2

9.4.5.3　前面 9.1.8.3 的闭曲线的回转数是 0, 这是因为 τ 不是满射: 加影线部分没有被 τ 覆盖 (参见 7.3.5.1).

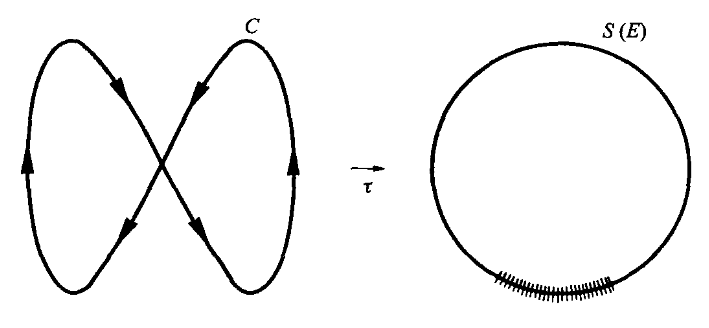


图 9.4.5.3

9.4.6　定义

我们说 E 的两条 C^1 类的闭曲线 C 和 D 是**同伦的**, 如果存在一个同伦 $F \in C^0([0,1] \times S^1; E)$, 使得对于 $[0,1]$ 的所有 t, 从 S^1 到 E 内的映射 $F_t : x \mapsto F(t,x)$ 是一个 C^1 类的浸入, 并且 $F_0 = C, F_1 = D$.

换言之, 我们要求对于每个 t, F_t 是一条曲线.

9.4.7　命题

若 C 和 D 是定向欧几里得空间的同伦的两条定向闭曲线, 则 $\text{enroul}(C) = \text{enroul}(D)$.

这是映射度对于同伦的不变性的一个推论 (参见 7.6.5).

反之, 如果 F 仅是 $C^0([0,1] \times S^1; E)$ 的任意映射, 命题 9.4.7 不复成立. 例如, 对于下面图 9.4.7 的图形: $\text{enroul}\,(C) = 1$, 而 $\text{enroul}\,(D) = 0$ (参见 9.4.5.1 和 9.4.5.3).

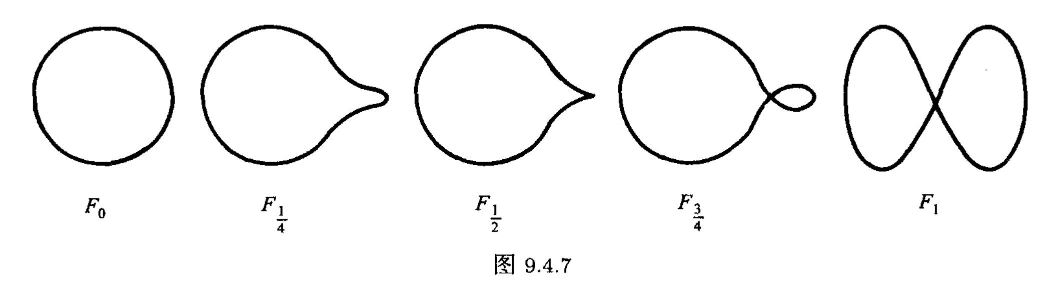


图 9.4.7

9.4.8　定理 (惠特尼 – 格劳恩斯坦(Grauenstein))

如果欧几里得空间的两条闭曲线 C 和 D 满足 $\text{enroul}\,(C) = \text{enroul}\,(D)$, 则 C 和 D 是同伦的.

在证明这个定理之前, 先指出它的几个推论.

9.4.9　推论

对于 E 的所有闭曲线:

如果 enroul$(C)=+1$, 则 C 同伦于 $S(E)$;

如果 enroul$(C)=-1$, 则 C 同伦于反向定向的 $S(E)$;

如果 enroul$(C)=n\neq 0$, 则 C 同伦于 9.4.5.1 的曲线 C_n 或 9.4.5.2 的曲线 ($n-1$ 个环);

如果 enroul$(C)=0$, 则 C 同伦于 9.4.5.3 的曲线.

为了给出另外一个并且是饶有趣味的应用, 必须引进总曲率的概念. 给定一条闭曲线 C 及其一个周期为 L 的弧长参数表示 $f\in C^1(\mathbf{R};E)$, L 是 C 的弧长 (参见 9.1.13). 假定欧几里得平面是定向的, 随之 C 也是定向的. 我们有

9.4.10 定义

积分 $\int_0^L k(f(t))\mathrm{d}\,t$ 称为 C 的全代数曲率,其中 $k(f(t))$ 是 C 在 $f(t)$ 的代数曲率 (参见 8.5.2).

根据 9.1.13, 这个积分必定不依赖弧长参数表示.

9.4.11 推论

C 的总代数曲率是 $2\pi\cdot$ enroul(C). 于是一个特别的推论是: 它是同伦不变的.

事实上, $\int_0^L k(f(t))\mathrm{d}\,t=\int_0^L \frac{\mathrm{d}\,\bar{\tau}}{\mathrm{d}\,t}\mathrm{d}\,t=\bar{\tau}(L)-\bar{\tau}(0)=2\pi\cdot\deg\tau=2\pi$ enroul(C).

9.4.12 例子

总代数曲率标在每条曲线的下方.

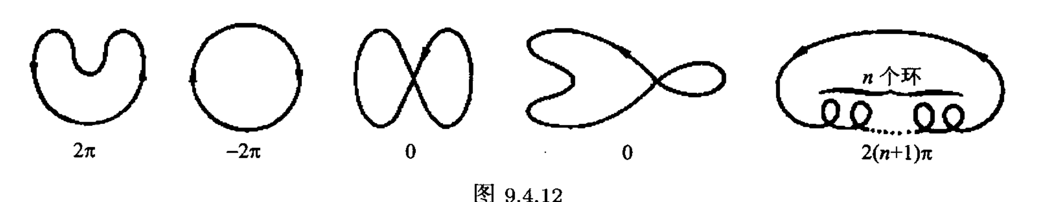


图 9.4.12

9.4.13 定理 **9.4.8** 的证明

第一步. 假定曲线 C 的长度为 L. 设 L- 周期函数 $f\in C^1(\mathbf{R};E)$ 是 C 的一个弧长参数表示, 由

$$g(t)=\frac{2\pi}{L}f\left(\frac{L\cdot t}{2\pi}\right)$$

定义的函数 $g\in C^1(\mathbf{R};E)$, 使得

$$\|g'(t)\|=\frac{2\pi}{L}\cdot\frac{L}{2\pi}\left\|f'\left(\frac{L\cdot t}{2\pi}\right)\right\|=1,$$

故这是长度为 2π 的一条曲线 C' 的一个 2π- 周期的弧长参数表示. C 和 C' 显然是同伦的 (经过一族位似变换从一条过渡到另一条). 于是可以归结到以下情形: C 和 D 是 E 的两条长度同样为 2π 的闭曲线.

于是设 $f, g \in C^1(\mathbf{R}; E)$ 分别是 C 和 D 的 2π- 周期的弧长参数表示. 我们有 $f', g' \in C^0(\mathbf{R}; S(E)) \subset C^0(\mathbf{R}; E)$. 由假设 C 和 D 有同样的回转数, 即 (参见 9.4.2) f' 和 g' 有同样的映射度. 存在一个同伦 $H \in C^0([0,1] \times \mathbf{R}; S^1)$, 使得 $H_0 = f', H_1 = g'$, 并且 H_λ 是 2π- 周期的; 事实上, 令

9.4.14 $$\bar{H}_\lambda(s) = (1-\lambda)\bar{f}'(s) + \lambda\bar{g}'(s),$$

其中 $\bar{f}'$ 和 $\bar{g}'$ 分别是 f' 和 g' 对于一个覆叠映射 $p : \mathbf{R} \to S(E)$ 的提升, 在 $S(E)$ 上选定一个起点, 设其为 e (参见 8.5.5.1). 令 $H = p \circ \bar{H}$.

第二步. 对于 $\lambda \in [0,1]$, 由

9.4.15 $$F_\lambda(t) = \int_0^t H(\lambda, s)\mathrm{d}\,s - \frac{t}{2\pi}\int_0^{2\pi} H(\lambda, s)\mathrm{d}\,s = F(\lambda, t)$$

定义一族参数曲线. 对于所有 λ, $F_\lambda \in C^1(\mathbf{R}; E)$. 此外, 对于所有 t, 由于 H_λ 是 2π- 周期的:

$$\begin{aligned} F_\lambda(t+2\pi) &= \int_0^{2\pi} H(\lambda, s)\mathrm{d}\,s + \int_{2\pi}^{t+2\pi} H(\lambda, s)\mathrm{d}\,s - \int_0^{2\pi} H(\lambda, s)\mathrm{d}\,s - \frac{t}{2\pi}\int_0^{2\pi} H(\lambda, s)\mathrm{d}\,s \\ &= \int_0^t H(\lambda, s)\mathrm{d}\,s - \frac{t}{2\pi}\int_0^{2\pi} H(\lambda, s)\mathrm{d}\,s = F_\lambda(t). \end{aligned}$$

于是 F_λ 是 2π- 周期的: $F_\lambda(2\pi) = F_\lambda(0) = 0$. 我们有

$$\begin{aligned} F_0(t) &= \int_0^t H(0, s)\mathrm{d}\,s - \frac{t}{2\pi}\int_0^{2\pi} H(0, s)\mathrm{d}\,s = \int_0^t f'(s)\mathrm{d}\,s - \frac{t}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'(s)\mathrm{d}\,s \\ &= f(t) - f(0) - \frac{t}{2\pi}(f(2\pi) - f(0)) = f(t) - f(0). \end{aligned}$$

于是忽略一个平移, $F_0 = f$, 对于 F_1 和 g 有同样的结果. 由于一个平移提供一个同伦, 我们就成功地构造了在 C 和 D 之间的一个映射 $F \in C^0([0,1] \times S^1; E)$.

第三步. 留下要考察, 是否对于所有 λ, F_λ 是一个浸入 (参见 9.4.6), 即

9.4.16 $$F'_\lambda(t) = H(\lambda, t) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} H(\lambda, s)\mathrm{d}\,s$$

对于所有 t 和所有 λ 不等于零.

H 的值在 $S(E)$ 内, 故 $\|H(\lambda, s)\| = 1$, 于是

$$\left\|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} H(\lambda, t)\mathrm{d}\,t\right\| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \|H(\lambda, t)\|\,\mathrm{d}\,t \leqslant 1.$$

容易确认, 如果 $x(t)$ 是实变量的在赋范向量空间取值的一个连续函数, 则

9.4.17 $$\left\|\int_a^b x(t)\mathrm{d}\,t\right\| = \int_a^b \|x(t)\|\,\mathrm{d}\,t \Leftrightarrow x(t) = \lambda(t)x_0,$$

其中 x_0 是一个固定向量, 而 $\lambda(t)$ 是正值函数.

于是这里对于一个给定的 λ,

$$\left\|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} H(\lambda,t)\,\mathrm{d}\,t\right\|$$

等于 1, 只有对于 $\mathbf{R}$ 的所有 t, 必须有 $H(\lambda,t)$ 是固定值. 我们将看到, 我们可以让这种情形不会出现.

第四步. 我们希望 H_λ 不是常值. 如果它是常值, 则 $\bar{H}_\lambda$ 亦然. 令

$$k=\deg f'=\operatorname{enroul}(C)=\operatorname{enroul}(D)=\deg g'.$$

则 (参见公式 9.4.14)

$$\bar{H}_\lambda(2\pi)-\bar{H}_\lambda(0)=(1-\lambda)k+\lambda k=k.$$

因此如果 $k\neq 0$, 则 $\bar{H}_\lambda$ 不可能是常数. 现在假定 $k=0$; 那么 $\bar{f}'$ 在 $\mathbf{R}$ 上是周期的, 从而, 例如在 t_0, 达到一个最小值. 类似地, $\bar{g}'$ 在 t_1 达到一个最小值. 重新进行参数表示, 以便 $\bar{f}'$ 和 $\bar{g}'$ 都在 $t=0$ 取最小值. 那么仅当 $\bar{f}'$ 和 $\bar{g}'$ 都是常值时, $\bar{H}_\lambda=(1-\lambda)\bar{f}'+\lambda\bar{g}'$ 才能取常值. 而 $\bar{f}'$ 取常值是荒谬的: 如果 $\forall t, f'(t)=a$, 则 $f(t)=f(0)+at$, 不可能是周期的.

9.4.18 注释

9.4.18.1 下面的定理 9.5.1 对于简单闭曲线 C 给出 $\operatorname{enroul}(C)$ 的值.

9.4.18.2 定理 9.4.8 可以看作一个对于 "同伦" 这一等价关系的分类定理. 定向平面的定向闭曲线类跟 $\mathbf{Z}$ 有双射对应. 对于 3 维的双正则曲线 (参见 8.6 节) 有一个属于费尔德曼 (Feldman) 的类似的结果: 这一次仅有两类, 如图 9.4.18.2 所示:

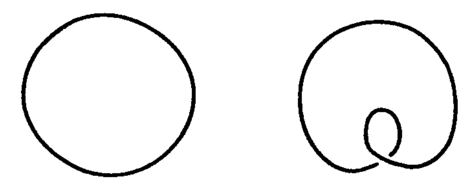


图 9.4.18.2

其证明要困难得多, 参见 [25].

9.5 切线回转定理

9.5.1 定理

设 C 是 E 的一条简单闭曲线, 则 $\operatorname{enroul}(C)=\pm1$. 如果 C 按照若尔当定理 (参见 9.2.6) 定向, 则 $\operatorname{enroul}(C)=1$.

9.5.2 推论

设 C 是 E 的一条简单闭曲线, 按照若尔当定理定向, 则它的全代数曲率是 2π(参见 9.4.11).

证明的思路饶有兴味: 构造下面图 9.5.2.1 左图的单位切向量映射 (为了得到 $\operatorname{enroul}(C)$) 和右图的映射之间的一个同伦, 而后一个映射的映射度直观上看是 1.

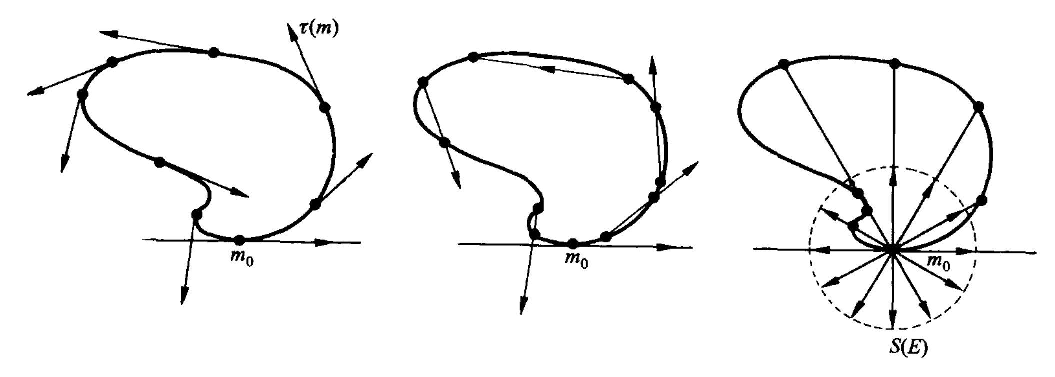


图 9.5.2.1

用严格的形式表达出来却是漫长且富有技巧的.

第一步. 跟在 9.4.13 的第一步一样, 选择 C 使得 $\operatorname{Long}(C)=2\pi$ (通过位似变换, 就可以归结为这种情形). 设 f 是 C 的 2π- 周期的对于推论 9.2.6 中的定向是正的弧长参数表示.

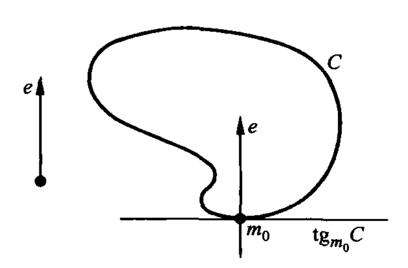


图 9.5.2.2

对于一个固定向量 $e\in E$, 考虑函数 $t\mapsto(e|f(t))$. 这是一个 2π- 周期的连续函数, 它在 $t_0\in[0,2\pi]$ 达到最小值. 设 $m_0=f(t_0)$, C 在 m_0 的切线具有性质: C 整个在此切线的左侧. 下面我们将假定 (如果有必要, 在 $\mathbf{R}$ 上进行平移)$t_0=0, m_0=f(0)$.

第二步. 设 $T=\{(s,t)\in\mathbf{R}^2: 0\leqslant s\leqslant t\leqslant 2\pi\}$:

由

9.5.3
$$\begin{cases} G(s,t)=\dfrac{f(t)-f(s)}{\|f(t)-f(s)\|} & \text{如果 } s\neq t \text{ 并且 } (s,t)\neq(0,2\pi),\\ G(0,2\pi)=-f'(0), \\ G(s,s)=f'(s), \quad \text{对于所有} s\in[0,2\pi]. \end{cases}$$

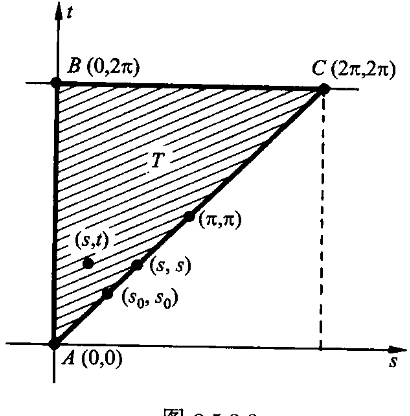


图 9.5.2.3

定义 $G : T \to S(E)$. 因为 C 是简单闭曲线, 对于 $s \neq t$, $(s,t) \neq (0, 2\pi)$, 我们有 $f(t) \neq f(s)$. 在引理 9.5.5 中将证明 $G \in C^0(T; S(E))$.

第三步. 设 $H \in C^0([0,1] \times [0,2\pi]; T)$ 是 T 的带参数 $\lambda \in [0,1]$ 的对应图 9.5.2.4 示的曲线族.

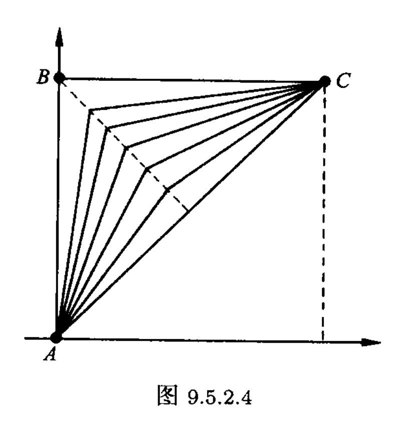


图 9.5.2.4

特别地, 有

$$\textbf{9.5.4} \qquad \begin{cases} H_0(u) = H(0,u) = (u,u) & \forall u \in [0, 2\pi], \\ H_1(u) = H(1,u) = \begin{cases} (0, 2u) & \forall u \in [0, \pi], \\ (2(u-\pi), 2\pi) & \forall u \in [\pi, 2\pi]. \end{cases} \end{cases}$$

于是 $F = G \circ H \in C^0([0,1] \times [0,2\pi]; S(E))$. 由于对于所有 $\lambda \in [0,1]$, F_λ 满足

$$F_\lambda(0) = G(H(\lambda, 0)) = G(0,0) = f'(0)$$

以及

$$F_\lambda(2\pi) = G(H(\lambda, 2\pi)) = G(2\pi, 2\pi) = f'(2\pi) = f'(0),$$

过渡到商得到一个映射 $\underline{F} \in C^0([0,1] \times S^1; S(E))$. 此外有 $\underline{F}_0 = f'$ (这是由于根据 9.5.3, $F_0(s) = G(s,s) = f'(s)$). 而 (根据映射度经过同伦的不变性, 参见 7.6.5): $\deg \underline{F}_0 = \operatorname{enroul}(C) = \deg \underline{F}_1$; 留下要证的是 $\deg \underline{F}_1 = 1$.

第四步. 计算 $\deg \underline{F}_1$.

我们有:

$$
\begin{aligned}
&F_1(0) = G(H(1,0)) = G(0,0) = f'(0),\\
&F_1(u) = G(H(1,u)) = G(0,2u) = \frac{f(2u)}{\|f(2u)\|} \quad \forall u \in (0,\pi),\\
&F_1(\pi) = G(H(1,\pi)) = G(0,2\pi) = -f'(0),\\
&F_1(u) = -\frac{f(2(u-\pi))}{\|f(2(u-\pi))\|} \qquad \forall u \in (\pi, 2\pi),\\
&F_1(2\pi) = f'(0).
\end{aligned}
$$

按照在第一步的选择, C 整个在 $\operatorname{tg}_m C$ 的左侧. 固定 $S(E)$ 的起点在向量 $f'(0) = \tau(m_0) \in S(E)$, 并且考虑覆叠映射 $p: \mathbf{R} \to S(E)$ (参见 8.5.5.1); 考虑对于这个覆叠映射 p 的 F_1 的提升 $\bar{F}_1$.

那么, 当 $u \in [0,\pi]$, $F_1(u)$ 在 $\operatorname{tg}_m C$ 的左侧, 如果我们选择 $\bar{F}_1$ 使得 $\bar{F}_1(0) = 0$, 则有 $\bar{F}_1(u) \geqslant 0$, 并且 $\bar{F}_1(\pi) = \pi$ (因为 $F_1(\pi) = -f'(0)$).

接着, 对于 $\pi < u < 2\pi$, 我们有 $F_1(u)$ 在 $\operatorname{tg}_m C$ 的右侧, 而 $\bar{F}_1(\pi) = \pi$, 故

$$
\text{对于 } \pi < u < 2\pi, \bar{F}_1(u) \geqslant \pi \quad \text{并且} \quad \bar{F}(2\pi) = 2\pi.
$$

所以有

$$
\deg(F_1) = \frac{\bar{F}_1(2\pi) - \bar{F}_1(0)}{2\pi} = 1.
$$

必须验证在所考虑的情形下, C 的定向正是由若尔当定理提供的定向; 也即必须证明在 m_0, C 的内部在 $\operatorname{tg}_m C$ 的左侧; 而这是显然的, 因为由 $\operatorname{tg}_m C$ 确定的直线为边界并且位于 $\operatorname{tg}_m C$ 右侧的开半平面是连通的并且非紧致的, 从而含于 C 的外部 (参见 9.2.1(i)).

最后的任务是建立下列引理:

9.5.5 引理

在 9.5.3 定义的映射 G 从 T 到 $S(E)$ 内是连续的.

在 (s_0,t_0), 只要 $s_0 \neq t_0$, 并且 $(s_0,t_0) \neq (0,2\pi)$, 就没有问题, 这是因为在 (s_0,t_0) 的一个邻域内, 函数由

$$
G(s,t) = \frac{f(t)-f(s)}{\|f(t)-f(s)\|}
$$

定义, f 既然是 C^0 的, $f(t)-f(s)$ 也是连续的, 并且不等于零. 对于在 $(0,2\pi)$ 和 (s_0,t_0) 的连续性, 我们应用莫尔斯简化中使用过的技巧 (参见 4.2.13).

我们有

9.5.6 $$f(s)=f(t)+\int_0^1 \frac{\mathrm{d}\,[f(t+\lambda(s-t))]}{\mathrm{d}\,\lambda}\mathrm{d}\,\lambda;$$

由于 f 是 C^1 类的, 故得

$$f(s)-f(t)+\int_0^1 (s-t)f'(t+\lambda(s-t))\mathrm{d}\,\lambda.$$

如果令

9.5.7 $$\varphi(s,t)=\int_0^1 f'(t+\lambda(s-t))\mathrm{d}\,\lambda,$$

则有

9.5.8 $$f(s)-f(t)=(s-t)\varphi(s,t),$$

其中 $\varphi(s,t)\in C^0(T;E)$ (因为 f 是 C^1 类的, 并且在一个紧致集上积分 (参见 0.4.8.2)).

引进记号 (参见第二步中 T 的图形) $B=(0,2\pi)$ 和 $[A,C]=\{(s_0,s_0):0\leqslant s_0\leqslant 2\pi\}$. 在 $T-\{B\}-[A,C]$ 上, 注意到 $s\leqslant t$, 我们有

$$G(s,t)=\frac{(t-s)\varphi(t,s)}{\|(t-s)\varphi(t,s)\|}=\frac{\varphi(t,s)}{\|\varphi(t,s)\|}.$$

1° 设 $(s_0,s_0)\in[A,C]$. 我们有

$$\varphi(s_0,s_0)=\int_0^1 f'(s_0+\lambda(s_0-s_0))\mathrm{d}\,\lambda=f'(s_0),\quad \text{并且}\quad \|f'(s_0)\|=1.$$

特别地, 有 $\varphi(s_0,s_0)\neq 0$. 于是有

$$\lim_{(s,t)\to(s_0,s_0),(s,t)\in T} G(s,t)=\lim_{(s,t)\to(s_0,s_0)}\frac{\varphi(t,s)}{\|\varphi(t,s)\|}=\frac{\varphi(s_0,s_0)}{\|\varphi(s_0,s_0)\|}=f'(s_0),$$

这就证明了 (9.5.3) 中的 G 在 (s_0,s_0) 的连续性.

2° 在 $B=(0,2\pi)$. 令 $2\pi-t=t'$, 则由于 f 是 2π- 周期的,

$$G(s,t)=G(s,2\pi-t')=\frac{f(2\pi-t')-f(s)}{\|f(2\pi-t')-f(s)\|}=\frac{f(-t')-f(s)}{\|f(-t')-f(s)\|},$$

由于 $t'+s$ 是正的, 由此得到

$$G(s,t)=\frac{(-t'-s)\varphi(-t',s)}{\|(-t'-s)\varphi(-t',s)\|}=-\frac{\varphi(-t',s)}{\|\varphi(-t',s)\|}.$$

而 φ 是连续的, 注意到 $\varphi(0,0)\neq 0$, 故得

$$\lim_{(s,t)\to(0,2\pi)} G(s,t)=\lim_{(s,t')\to(0,0)}\left(-\frac{\varphi(-t',s)}{\|\varphi(-t',s)\|}\right)=-\frac{\varphi(0,0)}{\|\varphi(0,0)\|}=-f'(0).$$

G 的处处连续性终于得以确立.

9.6 整体凸性

本节假定的所有有关对象至少是 C^2 类的.

9.6.1 定义

称积分

$$\int_0^L (K_{f(t)}C)\mathrm{d}\,t$$

为一条曲线 C 的**全数值曲率**, 其中 $([0,L],f)$ 是 C 的一个参数表示, 而 $K_{f(t)}C$ 表示 C 在 $f(t)$ 的曲率 (参见 8.4.1). (此积分还记作 $\int_C K$).

9.6.2 定理

设 C 是欧几里得平面 E 的简单闭曲线. 以下四个性质是等价的:

(i) C 的代数曲率 (对于选取的定向) 保持固定符号;

(ii) $\int_C K = 2\pi$;

(iii) C 是**整体凸的**, 即 $\forall m \in C$, C 整个在 $\mathrm{tg}\,_m C$ 的一侧;

(iv) C 是 E 的一个 (通常意义下的) 凸区域的边界.

9.6.2.1 注. 在 $\mathbf{R}^3$ 的曲面的情形, 我们得到更强的定理; 事实上不需要假定曲面是嵌入 $\mathbf{R}^3$ 的, 仅需假定它是浸入 $\mathbf{R}^3$ 的: 参见 11.13.

9.6.3 定义

如果 E 的一条简单闭曲线具有定理 9.6.2 的四个性质之一, 则称为**凸的**.

(i)⇔(ii). 如果 $k_m(C)$ 是 C 在 m 的 (对于固定的定向的) 代数曲率, 则 $|k_m(C)| = K_m(C)$ (参见 8.5.4.1). 于是根据 9.5.2 有

$$\int_C K = \int_C |k| \geqslant \left|\int_C k\right| = 2\pi.$$

如果 k 不保持固定符号 (k 是一个连续函数), 则

$$\int_C |k| > \left|\int_C k\right|,$$

故 $\int_C K = 2\pi \Leftrightarrow k$ 保持固定符号.

(i)⇒(iii). 我们用归谬法证明. 假定代数曲率保持固定符号, 存在 $m \in C$, 使得存在 C 的两个点 p' 和 q' 却严格地在 $\mathrm{tg}\,_m C$ 的两侧. 用 9.5 节第一步同样的推理 (这次取 $e \in S(E)$, 垂直于 $\mathrm{tg}\,_m C$), 存在 C 的两个点 p 和 q 分居于 $\mathrm{tg}\,_m C$ 的两侧, 使得 $\mathrm{tg}\,_p C$, $\mathrm{tg}\,_q C$ 和 $\mathrm{tg}\,_m C$ 互相平行, 这是作为 $t \mapsto (e|f(t))$ 的最大值和最小值而得到的:

由于 $\|\tau_m(C)\| = \|\tau_p(C)\| = \|\tau_q(C)\| = 1$, $\tau_m(C)$, $\tau_p(C)$ 和 $\tau_q(C)$ 中的两个是相等的, 比如 $\tau_m(C) = \tau_p(C)$. 设 f 是一个周期 (为 L 的) 弧长参数表示, 而 s 和 t 使得 $f(s) = m$ 和 $f(t) = p$, 这里 $s, t \in [0, L)$. 设 $\tau : \mathbf{R} \to S(E)$ 是单位切映射, 而

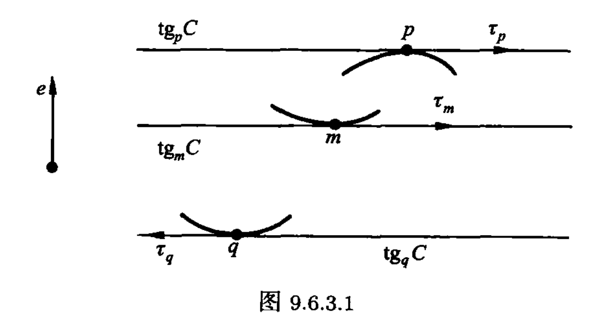


图 9.6.3.1

$\bar{\tau}:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是其对于使得 $p(0)=e$ 的覆叠映射 $p:\mathbf{R}\to S(E)$ 的提升, 满足 $\bar{\tau}(0)=0$. 如果必要, 适当定向, 则公式 8.5.6 表明 $k=\dfrac{\mathrm{d}\bar{\tau}}{\mathrm{d}t}$ 满足 $\dfrac{\mathrm{d}\bar{\tau}}{\mathrm{d}t}\geqslant 0$, 于是 $\bar{\tau}$ 是不减的, 又由于 $\mathrm{enroul}\,(C)=1$, 根据定理 9.5.1, 我们有 $\bar{\tau}(L)=2\pi$.

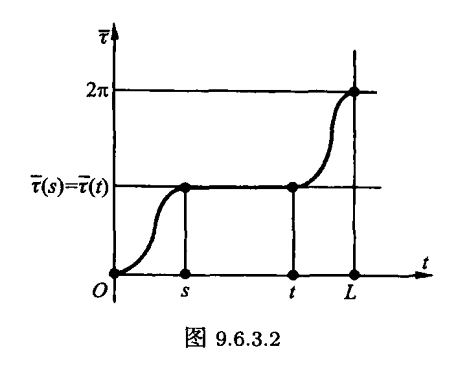


图 9.6.3.2

由于 $p:\mathbf{R}\to S(E)$ 在 $[0,2\pi)$ 上是单射, 并且根据前面所述, $\bar{\tau}([0,L])=[0,2\pi]$. 于是 $\tau(s)=\tau(t)$ 蕴涵 $\bar{\tau}(s)=\bar{\tau}(t)$. 但是 $\bar{\tau}(s)=\bar{\tau}(t)$ 和 $\bar{\tau}$ 是不减的, 蕴涵 $\bar{\tau}$ 在 $[s,t]$ 上是常数; 于是 τ 在 $[s,t]$ 上是常数, 随之 $f(t)=f(s)+(t-s)f'(s)$, 这与 $p\notin \mathrm{tg}_mC$ 矛盾.

(iii)⇒(iv). 这是关于凸性的一个一般定理: "如果 D 是平面的一个紧致集, 它在其边界 ∂D 的所有点具有一个支撑直线, 则 D 是凸的". 不过在我们所面临的特殊情形, 下面给出 (iii) ⇒ (iv) 一个更初等的证明.

设 $m\in C$, 而 H_m 是由 tg_mC 确定的包含 C 的闭半平面 (假设 (iii)). 我们断言 $D=\bar{C}_{\mathrm{int}}\subset H_m$. 用反证法: 设存在 $y\in\overset{\circ}{D}, y\notin H_m$. 从 y 出发经过 m 的半直线 $\varDelta$ 不可能整个在 D 内, 这是因为 D 是紧致的; 由于 $y\in\overset{\circ}{D}$, 故存在一个点 $z\in\partial(\varDelta\bigcap D)\subset\varDelta\bigcap\partial D=\varDelta\bigcap C$, 使得 y 在 m 和 z 之间. 这样一来, C 就不是整个含于 H_m 内.

对于任意 $m\in C$ 皆有 $D\subset H_m$, 故 $D\subset\bigcap\limits_{m\in C}H_m$. 事实上, 成立

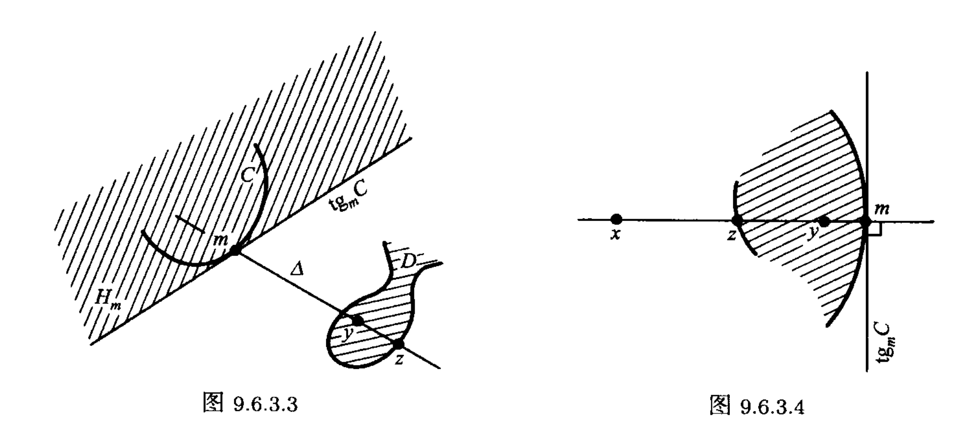


图 9.6.3.3

图 9.6.3.4

9.6.4
$$D = \bigcap_{m \in C} H_m,$$

这个等式证明 D 作为凸集的交集是凸集.

用反证法证 9.6.4.

设 $x \in \bigcap_{m \in C} H_m$, 但是 $x \notin D$; 由于 C 是紧致的, 存在 C 的点 m, 使得函数

$$C \ni n \mapsto d^2(x,n) = \|n - x\|^2 \in \mathbf{R}$$

取最小值. 由于 $\|\cdot\|^2(z)$ 的导数在 z 的值是 $2(z|\cdot)$, 故切线 $\mathrm{tg}_m C$ 垂直于过 x 和 m 的直线 Δ.

由假设, C 在 H_m 内, 特别地 $\mathring{D}$ 包含严格在 x 和 m 之间的点 y. 那么跟前面一样, 存在

$$z \in \partial(\Delta \cap D) \subset \Delta \cap \partial D = \Delta \cap C,$$

由于 $x \notin D$, z 在 x 和 y 之间. 但这样的 z 将比 m 更接近 x: $d(x,z) < d(x,m)$; 这就是所希望的矛盾.

(iv) ⇒ (i). 在 (按照若尔当定理定向的)C 的点 m, D (区域, 使得 $\partial D = C$) 在 $\mathrm{tg}_m C$ 的左侧, 由于 D 是凸的, C 也在 $\mathrm{tg}_m C$ 的左侧. 那么就有 $k_m C \geqslant 0$, 这是由于如果 $k_m C < 0$, 在 8.2.2.15 中进行的局部讨论表明 C 在 m 的某个邻域内的部分将位于 $\mathrm{tg}_m C$ 的右侧.

9.6.5 注释

9.6.5.1 如果 C 是任意维数的欧几里得空间的一条闭曲线, 同样可以定义总数值曲率 $\int_C K$. 已经证明了总有 $\int_C K \geqslant 2\pi$, 并且如果 $\int_C K = 2\pi$, 那么 C 必然是平面的和凸的. 其实这是一个一般结果的非常特殊的情形, 该结果对于浸入 E 中的所

有紧致流形 X 有效, 其中的 $\int_C K$ 换成 $\int_X |K_d| \cdot \delta$ (6.9.6 和 6.9.15 中的记号): 关于所有这些内容, 参见 [26].

9.6.5.2 已经证明, 如果 $\dim E = 3$, 并且 C 是一个拓扑纽结, 则 $\int_C K \geqslant 4\pi$: 见 [26].

9.6.5.3 正如在 8.2.2.16 曾经注释的那样, 一条 (非简单的) 平面闭曲线可以处处有严格正曲率却不是整体凸的. 但是在 2 维情形, 这种现象是十分特殊的. 当 X 是一个浸入到 $d+1$ 维空间 E 的 d 维紧致流形, 并且 $K_d \geqslant 0$ (6.9.6 的记号), 则 X 必定是嵌入的,并且是一个凸区域的边界: 参见 [11], 270 页.

9.6.5.4 对于关于 3 维欧几里得空间的一条闭曲线的挠率的积分 $\int_C T$ 的定理, 参见 [27] 和习题 9.9.6.

9.7 四顶点定理

这里假定曲线是 C^3 类的.

设 C 是任意维数的欧几里得空间的一条闭曲线, 而 f 是其弧长参数表示. 曲率函数 $K : t \mapsto K(t) = K_{f(t)}C$ 是连续的和周期的, 故存在最大值和最小值. 由于 C 是 C^3 类, 存在 K', 在取最大值和最小值的点 $K' = 0$. 在 C 的一个点 $K' = 0$ 这个事实不依赖弧长参数表示 (参见 8.3.2), 可以提出:

9.7.1 定义

*称使得 $K' = 0$ (对于 $K : t \mapsto K_{f(t)}C$, f 是其弧长参数表示) 的点为一个几何弧的***顶点***.*

9.7.2 注释

事实上, 如果函数 $K : t \mapsto K_{g(t)}C$ 使得 $K'(t) = 0$, 则点 $m = g(t)$ 是一个顶点, 这里 g 是 C 的任意参数表示, 而不必是弧长参数表示. 理由如下: 局部地 C 是 E 的一个子流形 V, 而曲率是 V 上的一个函数 K; 这里 m 是一个顶点说的正是 m 是 K 的一个临界点.

9.7.3 例子

9.7.3.1 图 8.4.14.3 中的曲线刚好有两个顶点; 事实上, 我们已经知道, 在 0 和 π 之间, 其曲率函数对于所考虑的参数表示严格递增 (注释 9.7.2), 此外 $K'(0) = K'(\pi) = 0$.

9.7.3.2 根据公式 8.4.13.1, 椭圆 $f : t \mapsto (a\cos t, b\sin t)$ 在 $f(t)$ 的曲率是

$$K_{f(t)} = \frac{ab}{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{3/2}}.$$

由此得到当且仅当 $t = k\pi/2$, $K'(t) = 0$. 这个椭圆恰好有 (曲率意义下的) 四个顶点, 它们也是通常意义下的顶点. 这从一个侧面验证了定义 9.7.1 中名词 "顶点" 的合理性.

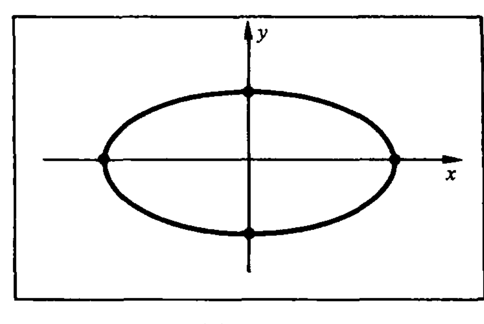


图 9.7.3.2

9.7 节的引言表明闭曲线至少有两个顶点; 例子 9.7.3.1 表明它可能没有两个以上的顶点. 不过, 我们有

9.7.4 四顶点定理

设 C 是欧几里得平面的一条凸的简单闭曲线. 则 C 至少有四个顶点.

9.7.5 注释

假设 "凸的" 并不需要, 但是没有它证明要困难得多: 参见 [28]. 对于属于奥瑟曼的第二个证明, 参见习题 9.9.7.

9.7.6 证明

我们知道 (9.7 节的引言部分), C 已经有了两个顶点. 用反证法, 假定 C 仅有两个或三个顶点: m_1, m_2, m_3.

由假设曲率的导数 k' 仅在 $m_i (i = 1, 2, 3)$ 中的一个改变符号. 通过变更下标或正负号, 可以假定这个导数 k' 从 m_1 到 m_2 是正的, 而从 m_2 到 m_3 和从 m_3 到 m_1 是负的. 设直线 m_1m_2 是平面的 Ox 轴, 而 $\{e_1, e_2\}$ 是相应的标准正交基底.

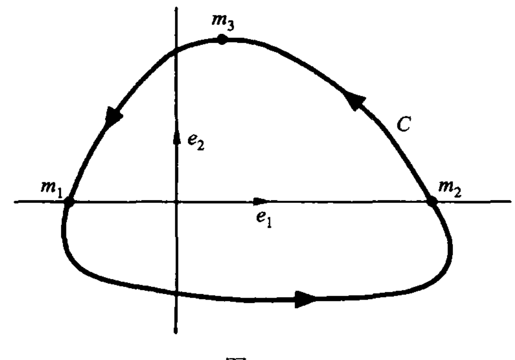


图 9.7.6

设 C 的长度是 L, f 是 C 的一个 L- 周期的弧长参数表示, 而 k 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的代数曲率函数 $t \mapsto k_{f(t)}C$. 为了进行计算我们假定欧几里得平面和曲线已经定向.

我们引进向量值函数

9.7.7 $$t \mapsto k'(t)f(t) \quad (\text{在 } E \text{ 中取值})$$

和向量积分

9.7.8 $$\int_0^L k'(t)f(t)\mathrm{d}\,t.$$

对它分部积分得到

$$\int_0^L k'(t)f(t)\mathrm{d}\,t = [k(t)f(t)]_0^L - \int_0^L k(t)f'(t)\mathrm{d}\,t = -\int_0^L k(t)f'(t)\mathrm{d}\,t,$$

其中第一项 $[\cdot]_0^L$ 由于周期性等于零. 由于 f 是一个弧长参数表示, 故 $f'(t) = \tau(t)$ 是单位切向量, 如果用 i 表示 E 的 $+\pi/2$ 旋转, 则根据定义 8.5.2,

$$-k(t)\tau(t) = (i\tau)'.$$

于是

$$\int_0^L k'(t)f(t)\mathrm{d}\,t = \int_0^L (i\tau)'\mathrm{d}\,t = i(\tau(L) - \tau(0)) = 0.$$

这个积分的第二个坐标当然是零, 这还表示为

$$\left(\int_0^L k'(t)f(t)\mathrm{d}\,t | e_2\right) = \int_0^L k'(t)(f(t)|e_2)\mathrm{d}\,t = 0.$$

但是后一个积分不可能是零, 这是因为: 既然 C 是凸的, 曲线的在 m_1 和 m_2 之间的部分在 Ox 的下方, 故 $(f|e_2) < 0$, 而 $k' > 0$, 故从 m_1 到 m_2, $k'(f|e_2) < 0$. 同样, 从 m_2 到 m_3 和从 m_3 到 m_1, $(f|e_2) > 0$, 而 $k' < 0$, 仍然有 $k'(f|e_2) < 0$. 随之应当有

$$\int_0^L k'(t)(f(t)|e_2)\mathrm{d}\,t < 0,$$

这就是要找的矛盾.

9.7.9 推论

设 $S^2 \subset \mathbf{R}^3$ 上的一条曲线 C 是 C^3 类的简单闭平面曲线 D 在球极投影下的像集. 则至少存在 C 的四个挠率为零的点.

证明在于指出在球极投影下, D 的顶点对应 C 的挠率为零的点: 参见 9.7.10.1.

9.7.10 注释

9.7.10.1 上文 9.7.9 的一个富有启发性的证明如下所述: 我们说 m 是 D 的一个顶点等价于说 D 在 m 的密切圆跟 D 有阶 $\geqslant 4$ 的接触. 在球极投影下, 这个圆的

像在 S^2 上还是一个圆，它跟 C 接触的阶 $\geqslant 4.m$ 对应一个像点 m', m 是 D 的一个顶点，并且由于 D 是平面曲线，D 在 m 的挠率是零. C 跟一条平面曲线在 m' 有阶 $\geqslant 4$ 的接触，故在 m' 挠率为零. 要使这个推理是严格的，就必须建立接触理论：参见习题 8.7.11 或 [29].

9.7.10.2 此外，对于不必是凸的平面简单闭曲线的四顶点定理可以从证明下列结果得到：球面 S^2 上的简单闭曲线至少有四个挠率为零的点.

9.7.10.3 例子 8.6.11.3 表明 $\mathbf{R}^3$ 的一条简单闭曲线的挠率可以处处不是零；还可以参见习题 9.9.5. 不过可以证明 $\mathbf{R}^3$ 的一条简单闭曲线的挠率，只要满足某些简单的条件，总至少有两个挠率为零的点：参见 [30] 以及习题 9.9.6.

9.7.10.4 四顶点定理对于下述命题的成立给了一个必要条件：对于一个函数 $c \in C^0(S^1; \mathbf{R}_+^*)$，存在一条简单闭曲线 C 和 $(S^1, f) \in C$，使得 $\forall m \in S^1 : k_{f(m)}C = c(m)$. 刻画圆周上的函数 c 的这一困难问题最近刚在 [31] 中被解决；事实上，四顶点这个条件恰好是既必要又充分的. 务必注意：这里的框架跟定理 8.5.7 的框架迥然不同，在那里，曲率是弧长的函数：在这种情况下，周期的曲率一般提供一条非闭的曲线. 而刚提到的新近的定理在于通过 S^1 上的一个微分同胚修改 c，以便从 8.5.7 得到一条闭曲线.

9.7.10.5 跟平面曲线的顶点概念类似的是 $\mathbf{R}^3$ 的曲面的脐点概念. 在 11.7.4 将会论及.

9.8 法布里修斯 – 布耶尔 – 哈泊恩公式

这是一个涉及计数的公式：

9.8.1 定理

设 C 是仿射平面 E 的一条闭曲线. 假定 C 满足稍后要明确的正则性条件. 引进记号

$N^+ : C$ 的在有同样的主法向量的两个点的重切线集合；

$N^- : C$ 的在有反向的主法向量的两个点的重切线集合；

$D : C$ 的重点的集合；

$I : C$ 的拐点的集合.

则这四个集合是有限的，并且它们的基数满足关系：

$$\boxed{\#N^+ = \#N^- + \#D + \frac{1}{2}\#I}\ .$$

这里是几个实例：

9.8.2 为了简单起见，假定曲线 C 是 C^∞ 的，而 $f \in C^\infty(\mathbf{R}; \mathbf{R}^2)$ 是 C 的一个周期为 L 的弧长参数表示，这里 L 为 C 的长度. 为了简化记号，我们在一个参数为 s 的点，将记

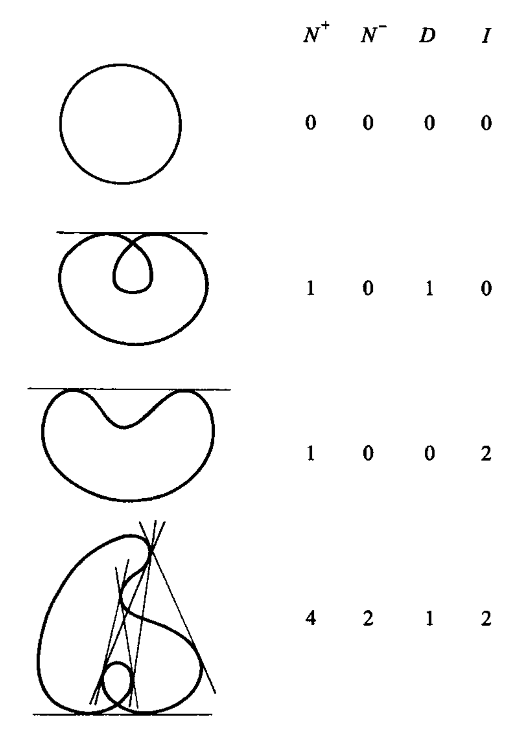


图 9.8.1

代数曲率为 $k(s)$ (参见 8.5 节);
仿射切线为 T_s (参见 8.2.1.1);
主法向量为 $n(s)$ (参见 8.4.11).

9.8.3 配对 $\{t, s\}$ 称为一条重切线,如果

$$f(t) \neq f(s) \quad 并且 \quad T_s = T_t.$$

这条重切线称为正则的, 如果 $k(s) \cdot k(t) \neq 0$. 满足条件 $n(s) = n(t)$ (对应的, $n(s) = -n(t)$) 正则重切线集合记作 N^+ (对应的, N^-).

9.8.4 配对 $\{t, s\}$ 称为一个重点, 如果

$$s \notin t + L \cdot \mathbf{Z}, \quad 并且 \quad f(t) = f(s).$$

说这个重点为正则的, 如果 $T_s \neq T_t$. 它们的集合记作 D.

9.8.5 一个点 $\{s\}$ 称为拐点, 如果

$$k(s) = 0.$$

说它是正则的, 如果 $k'(s) \neq 0$. 它们的集合记作 I.

9.8.6 定理 9.8.1 的正则性条件是 C 的所有重切线, 所有重点和所有拐点都是正则的.

以下假定这些条件满足.

9.8.6.1 注: 可能会问道 (重切线, 重点和拐点的) 数目是否满足定理 9.8.1 之外的其他的必要条件. 正如欧匝瓦在 [121] 中刚证明的, 根本没有. 在 [122] 中可以找到关于空间 $\mathbf{R}^3$ 的三次切于一条紧致曲线的平面的数目的结果.

9.8.7 证明的关键是引入由

$$W(t,s) = (u(t,s), v(t,s)) = ([f'(t), f(t)-f(s)], [f'(s), f(s)-f(t)])$$

定义的向量场 $W : \mathbf{R}\times\mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$. 其中 $[\cdot,\cdot]$ 表示 $\mathbf{R}^2$ 的行列式或典范面积形式 ω_0.

9.8.8 W 的零点和其指标

如果 $f(s) = f(t)$, 必然有 $W(t,s) = 0$. 如果 $f(s) \neq f(t)$, 那么 $W(t,s) = 0$ 蕴涵 $f'(t)$ 和 $f'(s)$ 二者都与 $f(t) - f(s)$ 成比例, 故 $\{t,s\}$ 是一个重切线. 正则性假设导致在所有这些零点 $W'(t,s) = 0$, 这表明它们是孤立零点, 从而可以应用 7.7.8 来计算它们的指标.

在一个重点, W 的雅可比行列式是

$$\begin{aligned} J_{(t,s)}W &= \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial t} & \dfrac{\partial u}{\partial s} \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} & \dfrac{\partial v}{\partial s} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} [f''(t), f(t)-f(s)] & [f'(t), -f'(s)] \\ [f'(s), -f'(t)] & [f''(s), f(s)-f(t)] \end{vmatrix} \\ &= [f'(t), f'(s)]^2 > 0. \end{aligned}$$

于是重点是孤立的, 并且 (根据 7.7.8) 指标是 1.

在一个重切线, 上面的行列式等于

$$J_{(t,s)}W = |k(t)| \cdot |k(s)| \cdot [n(t), f(t)-f(s)] \cdot [n(s), f(s)-f(t)] \neq 0.$$

如果 $n(t) = -n(s)$, 即 $\{t,s\} \in N^-$ 则 $J_{(t,s)}W$ 的符号是 $+$; 反之, 如果 $n(t) = n(s)$, 即 $\{t,s\} \in N^+$ 则 $J_{(t,s)}W$ 的符号是 $-$.

总之, W 的所有零点是孤立的, 它们的集合正是 $N^+ \bigcup N^- \bigcup D$, 并且我们已经知道它们的指标

对于 N^- 和 D 的元素是 $+1$,

对于 N^+ 的元素是 -1.

9.8.9 证明的思路是对于 W 应用一个定理 7.4.18 类型的定理. 粗略地说来, 球用 $\mathbf{R}^2$ 的周期的平行四边形代替; 困难在于平行四边形有顶角, 必须把它们打磨圆滑, 以便得到一个斯托克斯公式 (参见 6.2.2) 适用的区域. 场 W 在区域的边界上不再是进入的; 在边界上的积分事实上给出拐点的数目, 即 $\#I$.

9.8.10 在整个余下的部分, 我们取定一个充分小的 $\varepsilon > 0$, 使得具有下列性质:

1) $\forall t : f|_{[t,t+\varepsilon]}$ 至多有一个拐点,

2) $\forall t : f|_{[t,t+\varepsilon]}$ 是单射,

3) $\forall t : \forall s \in [t, t+\varepsilon]$, $f'(t)$ 跟 $f'(s)$ 之间的角 $< \pi/2$.

这样的 ε 存在, 对于 1), 是根据 9.8.5; 对于 2), 是根据 8.1.1.1 和 $[0, L]$ 的紧致性; 至于 3), 如果用 α 表示数值曲率 K 的最大值, 根据 8.5.6 和 0.2.6, 只需取 $\varepsilon < \pi/(2\alpha)$.

由 ε 的选取特别得到: 如果 $t+\varepsilon \leqslant s \leqslant t+L-\varepsilon$, 则 $W(t,s) \neq 0$: 对于可能在 D 内的点, 这是显然的; 对于 N^+ 或 N^- 的点, 请读者自己通过一个 9.8.13.1 的证明那种类型的推理, 排除 $W(t,s)=0$ 的可能性. 而在紧致集 $H = \{(t,s) : 0 \leqslant t \leqslant 2L, t+\varepsilon \leqslant s \leqslant t+L-\varepsilon\}$ 里, 场 W 仅有孤立零点, 从而其数目有限. 我们已经证明了 N^+, N^-, D 是有限的. 此外, 可以选择 $t_0 \in [0, L)$, 使得集合

$$B = \{(t,s) : t_0 < t < t_0 + L, t+\varepsilon \leqslant s \leqslant t+L-\varepsilon\} \subset Q = [0, 2L] \times [0, 3L]$$

满足条件 $\partial B \bigcap W^{-1}(0) = \varnothing$. 计数问题: 所有 $\{t,s\} \in N^+ \bigcup N^- \bigcup D$ 在 B 内至少有一个模 L 的代表; 事实上, 如果 $t < s$, 这正是 $\{t,s\}$ 和 $\{s, t+L\}$. 总结起来, 我们有

$$\sum_{x \in W^{-1}(0) \cap B} \operatorname{indice}_x W = 4\pi(\#N^- + \#D - \#N^+).$$

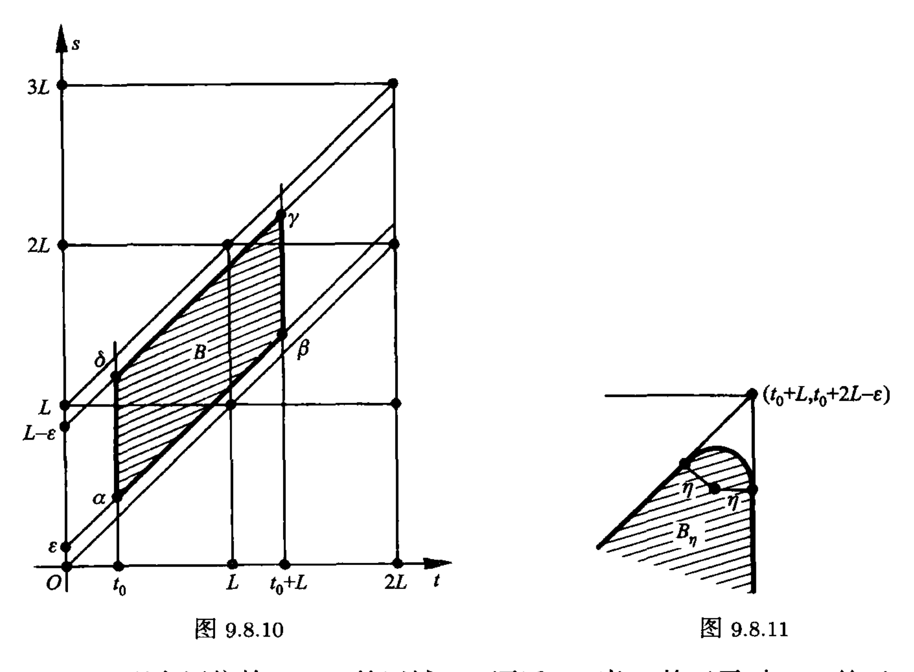


图 9.8.10　　图 9.8.11

9.8.11 现在用依赖 $\eta > 0$ 的区域 B_η 逼近 B, 当 η 趋于零时, B_η 趋于 B. 比如, 用跟边相切的圆弧替换顶角, 以便得到区域 B_η, 对于这样的区域可以应用斯托克斯定理, 诸 B_η 事实上是 C^1 类的:

现在模仿 7.4.18 的证明. 设 σ 是 $S^1 \subset \mathbf{R}^2$ 上的长度形式, 而 $Z = W/\|W\|$ 是 W 的单位化, 它在 $B - W^{-1}(0)$ 上存在. 取 η 充分小, 使得 $B_\eta \bigcap W^{-1}(0) = B \bigcap W^{-1}(0)$. 用以 $W^{-1}(0)$ 为中心的两两不交的小圆盘 B_i 环绕 W 的零点, 令 $B'_\eta = B_\eta - \bigcup\limits_i B_i$, 则跟 7.4.18 一样:

$$0 = \int_{B'_\eta} \mathrm{d}\,(Z^*\sigma) = \int_{\partial B'_\eta} Z^*\sigma = \int_{\partial B_\eta} Z^*\sigma - \sum_i \int_{\partial B_i} Z^*\sigma.$$

和

$$\sum_i \int_{\partial B_i} Z^*\sigma$$

是 $B_\eta \bigcap W^{-1}(0) = B \bigcap W^{-1}(0)$ 的元素的指标的和, 这个和在 9.8.10 已经算出, 于是

$$4\pi(\#N^- + \#D - \#N^+) = \int_{\partial B_\eta} Z^*\sigma.$$

至于 $\displaystyle\int_{\partial B_\eta} Z^*\sigma$, 它关于 η 是连续的, 取极限. 即得

$$4\pi(\#N^- + \#D - \#N^+) = \int_{\partial B} Z^*\sigma.$$

9.8.12 $\displaystyle\int_{\partial B} Z^*\sigma$ 的计算

采用图 9.8.10 中的字母, 我们有

$$\int_{\partial B} Z^*\sigma = \int_\alpha^\beta Z^*\sigma + \int_\gamma^\delta Z^*\sigma + \int_\beta^\gamma Z^*\sigma - \int_\alpha^\delta Z^*\sigma.$$

这些积分是在平行四边形 $\alpha\beta\gamma\delta$ 的边上取的. f 的周期是 L, 从而 W 有周期 L, 随之

$$\int_\beta^\gamma Z^*\sigma = \int_\alpha^\delta Z^*\sigma.$$

引入由

$$g(t) = \frac{W(t, t+\varepsilon)}{\|W(t, t+\varepsilon)\|}$$

定义的 $\bar{g} : \mathbf{R} \to S^1$, 由于它是 L- 周期的, 它对应 $g : S^1 \to S^1$, 于是

$$\int_\alpha^\beta Z^*\sigma = 2\pi \deg(g).$$

还是由于周期性,

$$\int_\gamma^\delta Z^*\sigma = 2\pi \deg(g),$$

于是

$$\int_{\partial B} Z^*\sigma = 4\pi \deg(g).$$

9.8.13 g 的映射度的计算

思路是关注 $g(t)$ 处于 $\mathbf{R}^2$ 的哪个象限, 这跟

$$W(t, t+\varepsilon) = ([f'(t), f(t) - f(t+\varepsilon)], [f'(t+\varepsilon), f(t+\varepsilon) - f(t)])$$

所处于的象限是相同的. 为了明确起见, 令

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x \geqslant 0, y \geqslant 0\},\\
\Delta_2 &= \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x \leqslant 0, y \geqslant 0\},\\
\Delta_3 &= \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x \leqslant 0, y \leqslant 0\},\\
\Delta_4 &= \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x \geqslant 0, y \leqslant 0\}.
\end{aligned}$$

9.8.13.1 引理

(i) 如果 $k(u) > 0 \quad \forall u \in (t, t+\varepsilon)$, 则 $g(t) \in \Delta_3$;

(ii) 如果 $k(u) < 0 \quad \forall u \in (t, t+\varepsilon)$, 则 $g(t) \in \Delta_1$;

(iii) 如果 $\exists t' \in (t, t+\varepsilon)$, 使得 $k(u) > 0 \quad \forall u \in (t, t')$, 而 $k(u) < 0 \quad \forall u \in (t', t+\varepsilon)$, 则 $g(t) \notin \Delta_4$;

(iv) 如果 $\exists t' \in (t, t+\varepsilon)$, 使得 $k(u) < 0 \quad \forall u \in (t, t')$, 而 $k(u) > 0 \quad \forall u \in (t', t+\varepsilon)$, 则 $g(t) \notin \Delta_2$.

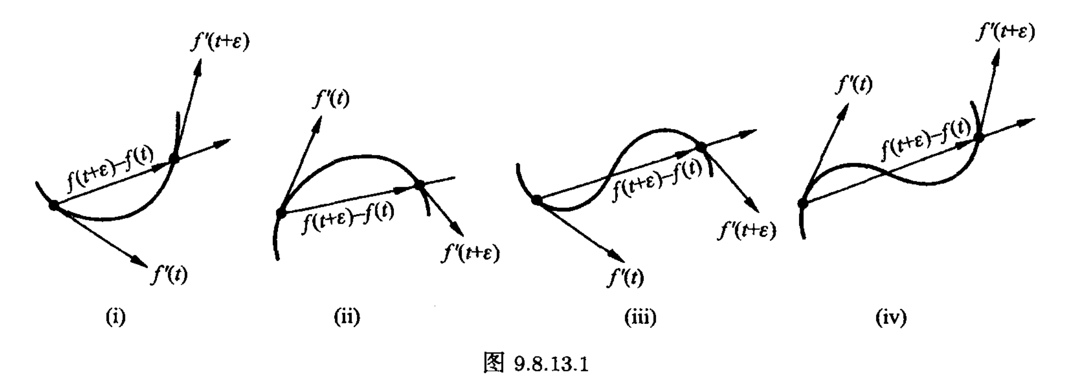


图 9.8.13.1

四个情形的证明是类似的, 我们针对第三个情形进行证明; 读者如果高兴, 可以画一个草图以帮助理解. 用反证法: 设 $g(t) \in \Delta_4$, 则首先有 $[f'(t), f(t) - f(t+\varepsilon)] > 0$. 考虑函数 $z \mapsto (z|e)$ 的最大值, 其中 e 是垂直于 $f(t+\varepsilon) - f(t)$ 的非零向量; 设 s 是 $(t, t+\varepsilon)$ 的第一个取最大值的元素. 那么 $(f(s)|e) > 0$, 而 $f'(s)$ 平行于

$$f(t+\varepsilon) - f(t)$$

而且根据选择 ε 的条件 3), 与之有相同方向, 从而根据 8.2.2.15 有 $k(s) < 0$, 于是根据 9.8.13.1 的 (iii) 中 t' 的定义, $s > t'$. 其次对于 $[f'(t+\varepsilon), f(t+\varepsilon) - f(t)] < 0$ 进行

同样的推理, 找到一个 s' 使得 $(f(s')|e) < 0$, 并且 $s' < t'$; 但是由构造过程知 $s < s'$; 这就是要找的矛盾.

9.8.13.2 由假设, 如果 $k(u) = 0$, 则 $k'(u) \neq 0$, 故拐点是孤立的. 特殊推论是它们的数目是有限的. 于是可以进一步要求前面几段中的 ε 比诸拐点对应的参数之间的最小差还小. 用拐点分割区间 $[t_0, t_0 + L]$ 成 $[t_i, t_{i+1}]$. 由于 $k'(t_{i+1}) \neq 0$, 如果在 (t_i, t_{i+1}) 上 $k > 0$, 那么在 (t_{i+1}, t_{i+2}) 上将有 $k < 0$.

通过改变指标和平移, 不妨假定在 (t_0, t_1) 上, $k < 0$. 根据引理 9.8.13.1, 我们发现 $W(t, t+\varepsilon)|_{[t_0, t_1]}$ 是 $\mathbf{R}^2 - \{0\}$ 中的一个路径, 出发点在 $\varDelta_1$ 内, 而终点在 $\varDelta_3$ 内,从不经过$\varDelta_2$. 如果

$$\widehat{g} : [t_0, t_0 + L] \to \mathbf{R}$$

表示 $g : [t_0, t_0 + L] \to S^1$ 的提升, 那么这个事实表明: 如果这个提升使得

$$\widehat{g}(t_0) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \text{则} \quad \widehat{g}(t_1) \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right].$$

接着, 基于同样的理由, 我们发现

$$\widehat{g}(t_2) \in \left[-2\pi, -\frac{3\pi}{2}\right].$$

如此继续下去; 如果 $i = \#I$, 则实际上就是说 $t_0 + L = t_i$. 由于

$$g(t_i) = g(t_0 + L) = g(t_0),$$

故有

$$\widehat{g}(t_0 + L) = \widehat{g}(t_i) = \widehat{g}(t_1) + 2\pi \cdot \deg(g);$$

前面的讨论表明

$$\widehat{g}(t_i) \in \left[-i\pi, -i\pi + \frac{\pi}{2}\right].$$

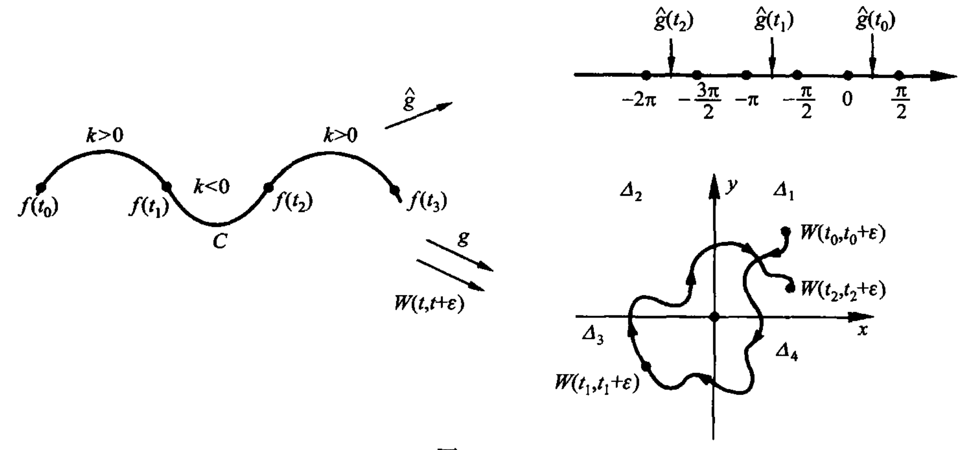


图 9.8.13.2

故必然有

$$\deg(g) = -\frac{i}{2} = -\frac{\#I}{2}.$$

9.9 习 题

9.9.1 证明 9.1.11.

9.9.2 计算图 8.1.5 中的四条曲线的回转数.

9.9.3 设 C 是 $\mathbf{R}^2 = \mathbf{C}$ 的一条 C^2 类的定向闭凸曲线, 其曲率处处非零.

a) 证明存在 C 的 2π- 周期的一个参数表示 f 和一个 2π- 周期的函数 p, 使得 C 在 $f(t)$ 的切线是方程为 $x\cos t + y\sin t - p(t) = 0$ 的直线, 并且

$$\tau(t) = \exp\left[i\left(t + \frac{\pi}{2}\right)\right].$$

b) 通过 p 及其导数计算 C 的曲率 (参见 8.7.21), 长度和面积.

c) 设 C' 是具有同样性质的第二条曲线. 假定对于 C 和 C' 各自的任意点 m 和 m', 存在一个位移 f, 使得 $f(m') = m, f(\mathrm{tg}_{m'}C') = \mathrm{tg}_m C$, 并且 $f(C')$ 含于 C 的内部的闭包内. 证明

$$\mathrm{Long}\,(C) \cdot \mathrm{Long}\,(C') \leqslant 2\pi(\mathrm{Aire}\,(C_{\mathrm{int}}) + \mathrm{Aire}\,(C'_{\mathrm{int}})).$$

由此导出: 如果 R 是包含 C 在其内部的最小圆周的半径, 而 r 是完全含于 C 的内部的最大圆周的半径, 则有邦纳森不等式

$$\mathrm{Long}^2(C) - 4\pi\mathrm{Aire}\,(C) \geqslant \pi^2(R-r)^2,$$

故不等式度量等周亏损.

9.9.4 确定由

$$t \mapsto \left(\frac{\cos t}{\sin(t/2)}, 2\cos\frac{t}{2}, \frac{\sqrt{3}}{\sin(t/2)}\right)$$

定义的曲线的弗雷内标架, 曲率和挠率.

9.9.5 考虑方程为

$$(x^2+y^2+z^2+a^2-r^2)^2 - 4a^2(x^2+y^2) = 0$$

的环面 T, 它是由方程为 $y = 0, (x-a)^2 + z^2 - r^2 = 0$ 圆周以 Oz 为轴的旋转曲面. 令 $r = a\sin\theta$ 将是方便的.

a) 求 T 上的跟所有纬线曲线交于定角 V 的曲线 (可以求它们在平面 $z = 0$ 上的投影并且利用极坐标). 证明对于 $V = \theta$, 我们得到圆周, 它们在平面 $z = 0$ 上的投影是一个焦点为 O 的椭圆. 在一般情形下, 令 $k = \tan V/\tan\theta$, 如果 k 是整数, 则得到简单闭曲线.

b) 由 a) 推出在所有环面上存在简单闭曲线, 其曲率总不为零.

9.9.6 设 f 是 $\mathbf{R}^3$ 的一条定向几何弧 C 的弧长参数表示.

a) 在什么条件下可以求出数值函数 θ 和 a, 使得

$$t \mapsto g(t) = f(t) + (\cos\theta(t)\nu + \sin\theta(t)\beta)a(t)$$

定义一个几何弧, 它在 $g(t)$ 的切线是 C 在 $f(t)$ 的法线?

b) 现在假定 C 是一条长度为 L 的闭球面曲线.借助前面的计算证明

$$\int_0^L T\mathrm{d}t = 0.$$

9.9.7 对于满足欧拉方程的曲线的一个不等式及其应用

a) 考虑按照 8.7.21 的方式由函数 h 和 k 定义的两条平面曲线 C 和 D. 假定它们的凹侧朝向原点. 此外假定,比如对于 $t=0$ 它们彼此相切, 于是 $h(0)=k(0), h'(0)=k'(0)$. 证明如果对于所有 t, C 在参数 t 对应点的曲率大于或等于 D 在同一参数对应点的曲率, 则 C 含于 D 的内部 (至少对于充分小的 t).

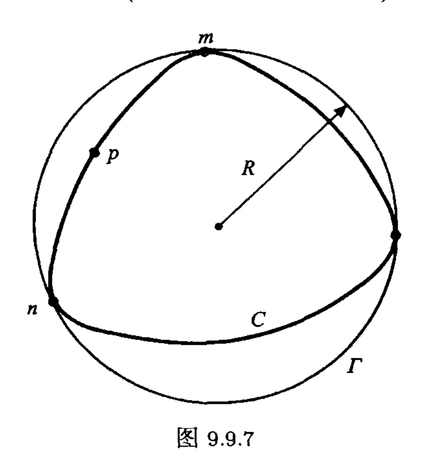


图 9.9.7

b) 由上推出如果 C 是平面闭凸曲线, 而 Γ(对应的, Γ') 是 C 的一个半径最小的 (对应的, 最大的) 密切圆, 则 Γ 可以在 C 内自由滚动, 而 C 可以在 Γ' 内自由滚动.

c) 奥斯曼通常六顶点定理.这里谈到的是以奥斯曼 [137] 的十分简单和非常自然的方式证明四顶点定理. 设 C 是一条简单闭曲线, 为了简化证明, 设它是凸的. 假定 Γ 是包含 C 在其内部的最小的圆周, 而 R 是其半径 (可以证明 Γ 总是唯一的但非 Γ', 如果执意追根究底, 参见 [40], 11.5.8 荣格定理). 设 m 和 n 是 C 跟 Γ 的两个接触点, 在 m 和 n 之间再没有其他接触点. 证明只要 C 和 Γ 不重合, 则在 m 和 n 之间存在 C 的点 p, 在该点曲率大于 $1/R$, 由此导出如果 Γ 和 C 在 n 个点相切, 则 C 至少有 $2n$ 个顶点. 我们注意到在一般情形下 $n \geqslant 3$.

第十章　$\mathbf{R}^3$ 的曲面的局部理论的简短导引

$\mathbf{R}^2$ 的曲线的局部理论是第九章 4、5 两节的研究对象, 是相当简单的: 定理 8.5.7 表明, 单独曲率 (作为弧长的函数) 一个不变量, 就可以刻画它们的特征. 这种简单性的本质理由在于 (在任意维数的空间内的) 曲线的内蕴几何总是平凡的: 由一条曲线的各个弧段的长度得到的度量等同 (等距) 于 $\mathbf{R}$ 的一个区间的度量. 至于刻画 $\mathbf{R}^2$ 的一条曲线的 "形状" 和 "位置" 的曲率只不过是普普通通的数值函数.

$\mathbf{R}^3$ 中的曲面则迥然不同. 这有两个理由: 第一个理由是曲面的内蕴几何一般说来不同于 $\mathbf{R}^2$ 的一个开集的内蕴几何 (欧几里得几何); 比如一个球面, 即使是局部地, 也决不等距于 $\mathbf{R}^2$ 的一个开集. 这个内蕴几何的研究属于 2 维黎曼几何, 本身构成一整套理论. 第二个理由是 $\mathbf{R}^3$ 中的一个曲面在一个点的状态现在依赖的不再是数值函数, 而是一个二次型, 叫做 "第二基本形式", 通常记作 II, 至于我们的曲面的黎曼结构, 即内蕴几何, 记作 I, 更常常记作 g 或 $\mathrm{d}\,s^2$.

于是我们的导引由四部分组成. 第一部分是 I 和 II 的定义和许多重要的例子, 每个例子同时反映多个侧面. 接着研究只是属于内蕴度量 I 而不依赖曲面在 $\mathbf{R}^3$ 中的形态的有关对象. 继而研究 II. 最后我们研究 I 和II之间的联系, 它们并非是彼此独立的.

这个主题是丰富的; 在 1896 年就有达布的两千页的宏篇巨著, 尚未包罗万象, 故这里必须有所割舍. 我们希望搀杂个人偏好的选择结果既能够使读者高兴, 又不致过多激怒专家.

对于曲面论的文献导引. 在达布之后 ([36], [37], [38], [39]), 在涉及古老内容方面 (并未包含全部, 也没有用现代语言进行推广), 覆盖这里引用到的大部分结果的唯一

著作是斯皮瓦克的文集:[21], [63], [64], [65]. 对于基础知识, 窦卡莫 (Do Carmo) 的 [41] 有详尽且完善的处理. 著作 [69] 以相当紧缩的篇幅包含了众多内容. 文献 [130] 像是对于我们的概述的补充, 会让某些人喜欢. 大部分整体结果的更为快速的处理方式见于 [62]. 除此之外, 我们还指出 [5], [11], [15], [18], [29], [33], [67], [69], [74], [75], 这些微分几何著作尽管内容多寡各不相同, 但都包含曲面论. 一个早期的但仍然充满活力的著作是 [68]. 我们选择文献的原则是减轻阅读负担: 对于经典问题我们没有给出文献, 这些问题在所有相关著作中都会论及, 大家可以参阅它们的索引.

10.1 定 义

10.1.1 我们在本章研究 $\mathbf{R}^3$ 中的曲面,即这个欧几里得空间的 2 维子流形. 根据基本定理 2.1.2, 我们自然会认可:

10.1.2 定义

我们称 $\mathbf{R}^3$ 中的 2 维子流形为 $\mathbf{R}^3$ 的 **(整体) 曲面**. *如果一个曲面可以用单独一个坐标卡定义, 即 (参见 2.2.3) 存在 $\mathbf{R}^2$ 的一个开集 U 和一个浸入 $g \in C^\infty(U;\mathbf{R}^3)$, 使得 g 是从 U 到其像 $V = g(U)$ 的一个同胚, 则称此曲面为 $\mathbf{R}^3$ 的* **(局部) 曲面**.

在后面, 除非行文当中强调, 我们不明确区分整体和局部曲面. 有时候, 相关结果仅当曲面缩小到它的一个开集时才成立. 我们把这个工作留给读者动手来做. 这就好比, 即使有向导讲解, 还是要睁开双眼亲自看一看你要游览的景物.

10.1.3 推论

给定一个局部曲面的两个完整坐标卡 φ 和 $\psi : V \to \mathbf{R}^2$, 则 $\varphi(V)$ 和 $\psi(V)$ 是 $\mathbf{R}^2$ 的通过 $\varphi \circ \psi^{-1}$ 微分同胚的两个开集 (参见 2.2).

基于方便叙述和区分性质本身的实际理由 (此外, 参见下面的 10.2.1.4, 10.2.2.5, 10.2.3.8 和 10.2.4 等), 现在就引进第十一章将要研究的整体对象是适宜的.

10.1.4 定义

一个 2 维抽象流形 X 和一个浸入 $f \in C^\infty(X;\mathbf{R}^3)$ 的配对 (X, f) 称为一个 $\mathbf{R}^3$ 的 **(整体) 曲面**.

第九章的曲线是简单的, 因为仅存在两个 1 维抽象流形: $\mathbf{R}$ 和圆周 S^1 (既便是 S^1, 它也可以看作 $\mathbf{R}$ 上的具有周期性的对象). 而这里曲面的状况要更加复杂, 因为存在众多的抽象曲面: 参见 4.2.25.

10.2 例　子

定理 2.1.2 提供了一种局部等价性, 它表明对于局部曲面, 三种性质类型的例子呈现出来: 图像, 隐函数方程和参数表示. 我们理所当然地遵循这个思路来列举曲面.

10.2.1　图像

对于 $\mathbf{R}^2$ 的所有开集 U 和 $f \in C^\infty(U;\mathbf{R})$, 由图像 $\{(x,y,f(x,y)) : (x,y) \in U\}$ 提供 $\mathbf{R}^3$ 内的一个曲面. 简单地把它写成 $z = f$ 或 $z = f(x,y)$.

10.2.1.1　球面 (参见 2.1.6.2)

取开圆盘 $x^2 + y^2 < 1$ 作为 U, 而 $f = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. 不过要六个这样的图像才能覆盖球面 $S^2 \subset \mathbf{R}^3$.

10.2.1.2　二次图像

这是椭圆抛物面 $z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$ 和双曲抛物面 $z = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}$.

可以把非正常二次曲面, 抛物柱面 $z = ax^2$, 加入其中. 在这三种情形里, U 是整个 $\mathbf{R}^2$.

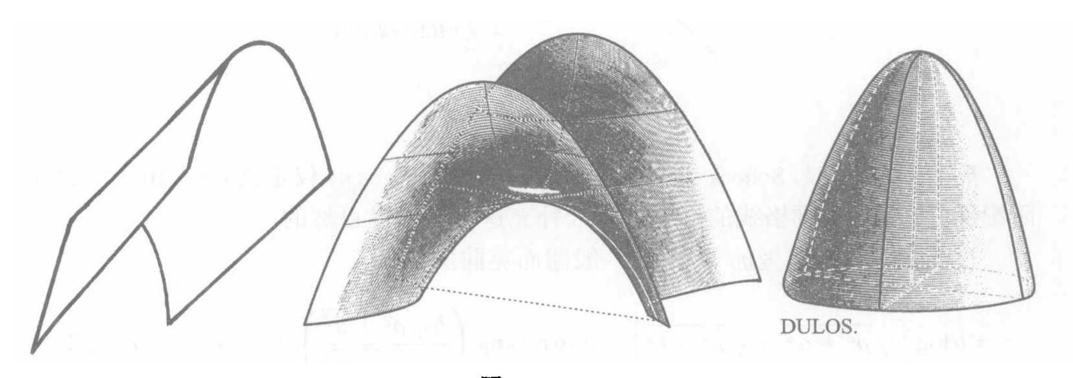
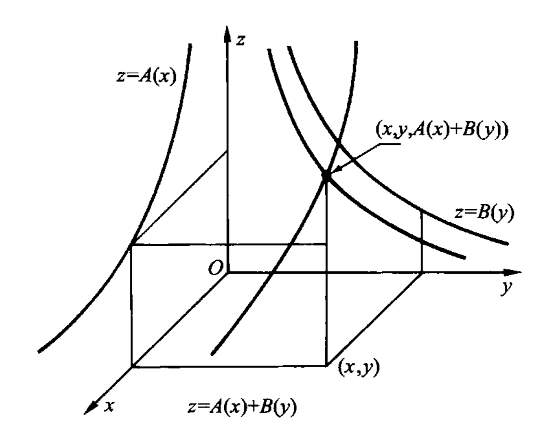


图 10.2.1.2

摘自 E. Rouché 和 Ch. de Comberousse 的 *Traité de géométrie*, 巴黎, Gauthier–Villars, 486 页和 492 页

10.2.1.3　平移曲面 (10.2.3.1 的特殊情形)

这是 $z = f(x,y) = A(x) + B(y)$; 注意这是两种方式的平移, 一个是沿 x 轴方向, 而另一个是沿 y 轴方向. 如果 A 和 B 定义于整个直线 $\mathbf{R}$, 那么曲面就定义在整个 $\mathbf{R}^2$ 上.



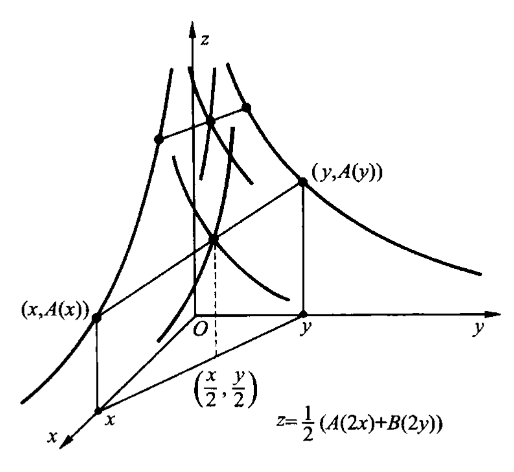


图 10.2.1.3.1

反之, 像谢而克 Scherk 曲面 $z=\log(\cos x)-\log(\cos y)$ 仅定义在图 10.2.1.3.2 的阴影部分. 用通过网格线的点的竖直线补充这个图像是自然的.

过渡到 $\mathbf{R}^2$ 的极坐标 ρ 和 θ, 一般谢而克曲面由

$$z=b\log\left[\sqrt{\rho^2+a^2}+\sqrt{\rho^2-b^2}\right]+a\ \mathrm{arc\ tang}\left(\frac{b\sqrt{\rho^2+a^2}}{a\sqrt{\rho^2-b^2}}\right)+a\theta+c\ (a,b,c\in\mathbf{R})$$

表示.

这是极小曲面中的 (参见 [36], 328 页) 的所有螺旋面. 对于极小曲面中的平移曲面, 参见 10.6.9.2 和 [36], 406 页.

读者或许更喜欢把平移曲面写成 $z=(A(2x)+B(2y))/2$ 的样子, 这样就使得这个曲面是由其端点描绘两条固定曲线的线段的中点构成. 这个方法也可以用到下面的例子 10.2.3.1 上.

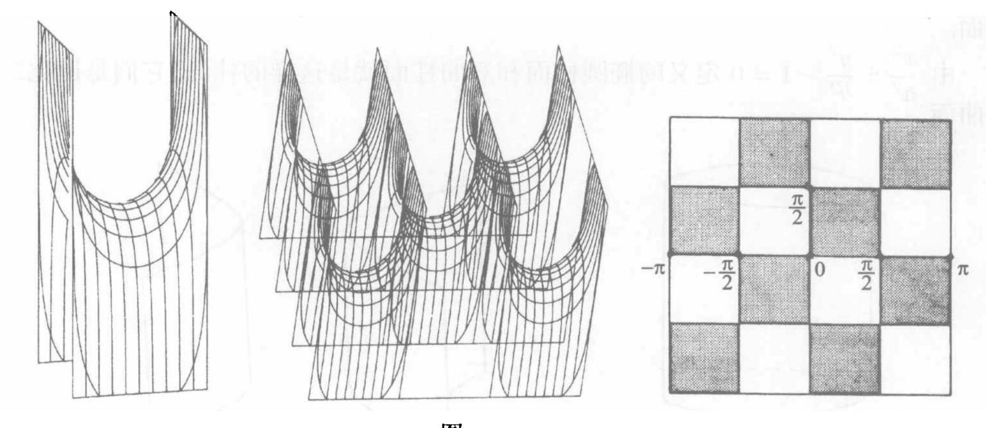


图 10.2.1.3.2

摘自 M.P.Do Camo, *Differentiel geometry of curves and surfaces*. Prentice Hall, 209 页

10.2.1.4 普吕克劈锥曲面

这是曲面 $z = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$. 必须去掉原点的 $\mathbf{R}^2$ 作为 U. 还可以参见 10.2.2.4. 普吕克 (plücker) 劈锥曲面还是一个直纹曲面. 它具有以下性质: 对于空间的任意一个点 p, p 在曲面的直线上的投影是一个圆锥曲线, 而此圆锥曲线在平面 $z=0$ 上的投影是一个圆周. 这个性质是普吕克劈锥曲面的特征, 甚至还有下列弱得多的特征性质: 一个直纹曲面, 如果空间的所有点在其母线上的投影是一条平面曲线, 则它必定是普吕克劈锥曲面. 这个问题跟下列问题相当, 求单参数的位移族, 在位移中一个不变图形的点描绘出一条平面曲线. 对于所有这些内容, 参见 [36], 99 页.

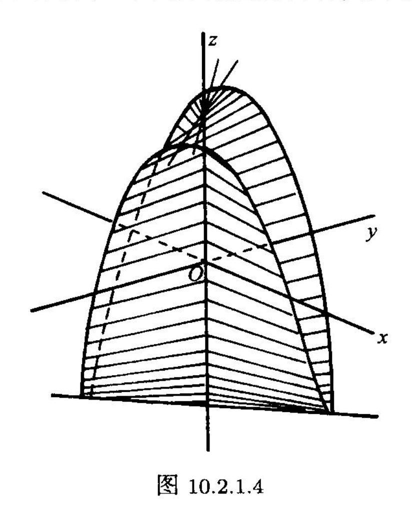


图 10.2.1.4

10.2.2 由 $V=F^{-1}(0)$ 定义的曲面

10.2.2.1 柱面

如果方程中有一个坐标不出现, 比如 $F(x,y)=0$, 就得到一个轴平行于 z 轴的

柱面.

由 $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ 定义的椭圆柱面和双曲柱面就是这样的柱面, 它们是退化二次曲面.

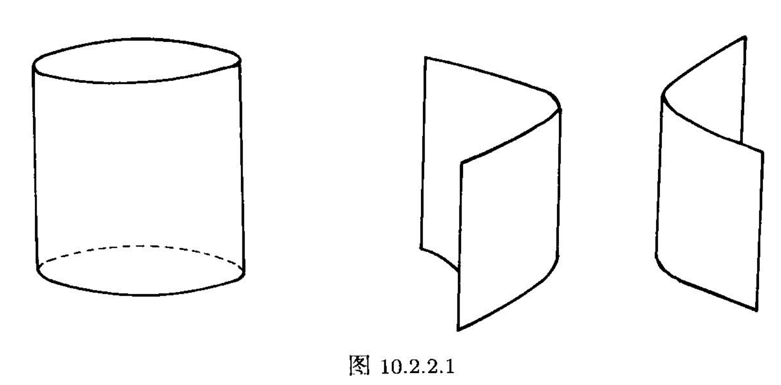


图 10.2.2.1

10.2.2.2　平面

方程是 $ax + by + cz + d = 0$.

10.2.2.3　非退化二次曲面

除 10.2.1.2 的两类抛物面外, 还有二次曲面:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0: \text{椭球面};$$
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0: \text{单叶双曲面};$$
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0: \text{双叶双曲面}.$$

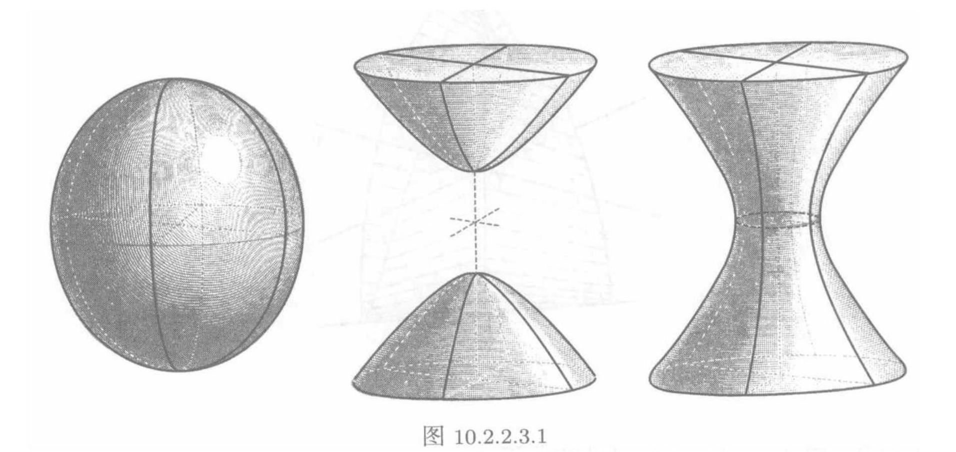


图 10.2.2.3.1

摘自 E. Rouché和 Ch. de Comberousse 的 *Traité de géométrie*, 483 页, 490 页和 493 页

人们发现, 即使研究这几类二次曲面中的一类, 考虑称为共焦二次曲面的单参

数族

$$\frac{x^2}{a-\lambda}+\frac{y^2}{b-\lambda}+\frac{z^2}{c-\lambda}-1=0 \quad (a>b>c)$$

也是很基本的.

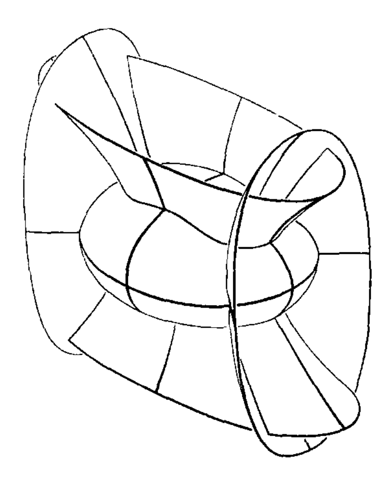


图 10.2.2.3.2

它们有一个性质: 形成三重正交族, 即在三个曲面都通过的每个点, 它们的切平面 (参见 2.5) 两两正交. 把 λ 分为三个区间: $-\infty<\rho_2<c<\rho_1<b<\rho<a$. 在每个区间, 我们有同一类型的二次曲面要研究. 同等重要的是通过一个映射用参数表示 $\mathbf{R}^3$ 的对应部分. 该映射令一个点对应通过这个点的每种类型的曲面的三个参数. 利用记号

$$f(\lambda)=(a-\lambda)(b-\lambda)(c-\lambda) \quad 和 \quad \varphi(\lambda)=(\lambda-\rho)(\lambda-\rho_1)(\lambda-\rho_2),$$

则有等式

$$\frac{x^2}{a-\lambda}+\frac{y^2}{b-\lambda}+\frac{z^2}{c-\lambda}-1=\frac{\varphi(\lambda)}{f(\lambda)}, \quad \mathrm{d}\,x^2+\mathrm{d}\,y^2+\mathrm{d}\,z^2=4\sum_i\frac{\varphi'(\rho_i)}{f(\rho_i)}\mathrm{d}\,\rho_i^2,$$

第二个等式立即表明切平面的正交性. 还有变换公式

$$(\rho,\rho_1,\rho_2)\mapsto\left(x^2=\frac{\varphi(a)}{(a-b)(a-c)},y^2=\frac{\varphi(b)}{(b-a)(b-c)},z^2=\frac{\varphi(c)}{(c-a)(c-b)}\right)$$

以及参数表示, 例如, (仅八分之一的) 椭球面 (它对应于 $\rho_2=0$):

$$(u,v)\mapsto\left(x=\sqrt{\frac{a(a-u)(a-v)}{(a-b)(a-c)}},y=\sqrt{\frac{b(b-u)(b-v)}{(b-a)(b-c)}},z=\sqrt{\frac{c(c-u)(c-v)}{(c-a)(c-b)}}\right).$$

10.2.2.4　代数曲面

这是曲面 $F(x,y,z)=0$, 其中 F 是一个多项式, 如果它是齐次的, 此种曲面是顶点在原点的锥面. 显然必须去掉使得微分 $\mathrm{d}F$ 为零的点, 因为 F 应当是一个浸没 (总是根据定理 2.1.2). 不过, 如果允许 $\mathrm{d}F=0$ 的点, 就会有浸入曲面: $x^2-y^2=0$ 就是其中的一个例子. 对于 10.2.1.4 的普吕克曲面, 它可以由 $xy=z(x^2+y^2)$ 定义. 这就在原来的图像上增加了 z 轴. 10.2.1.4 的普吕克曲面是一个浸入曲面, 仅有的两个例外点是 $(0,0,\pm 1/2)$.

10.2.2.5　恩尼珀 (Enneper) 曲面

其定义是

$$\left[\frac{y^2-x^2}{2z}+\frac{2z^2}{9}+\frac{2}{3}\right]^3=6\left[\frac{y^2-x^2}{4z}-\frac{1}{4}\left(x^2+y^2+\frac{8}{9}z^2\right)+\frac{2}{9}\right]^2.$$

比方说, 利用在 10.2.3.6 将给出的参数表示, 就可以确信它处处是浸入的. 作为用似乎尚未提及的性质所刻画的曲面, 我们还会发现它: 参见 10.2.3.6, 10.2.3.13 和 11.16.7.

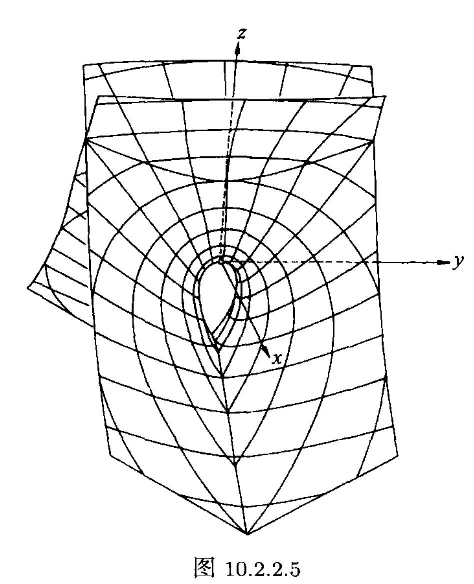


图 10.2.2.5

摘自前面引用的 Do Camo 的著作, 205 页

10.2.2.6　四次圆纹曲面和迪潘四次圆纹曲面 (参见 10.2.3.12)

一般四次圆纹曲面由方程

$$\frac{x^2}{a_1-\lambda}+\frac{y^2}{a_2-\lambda}+\frac{z^2}{a_3-\lambda}+\frac{(x^2+y^2+z^2-R^2)^2}{4R^2(a_4-\lambda)}-\frac{(x^2+y^2+z^2-R^2)^2}{4R^2(a_5-\lambda)}=0$$

定义, 其中五个 a_i 和 R 是任意的, 而 λ 是一个参数. 当 λ 变化时, 它们形成正交的三曲面系统. 当 $a_i(i=1,2,3)$ 中至少有两个相等时, 它们称为迪潘 (Dupin) 四次圆纹曲面. 它们还是同时满足尚未明确提到的多种性质的公共解. 参见 10.6.8.2.4, 11.21, [40], 20.7, 以及有更多内容的 [91] 的第 6 章. 以下是它们当中的几个例子

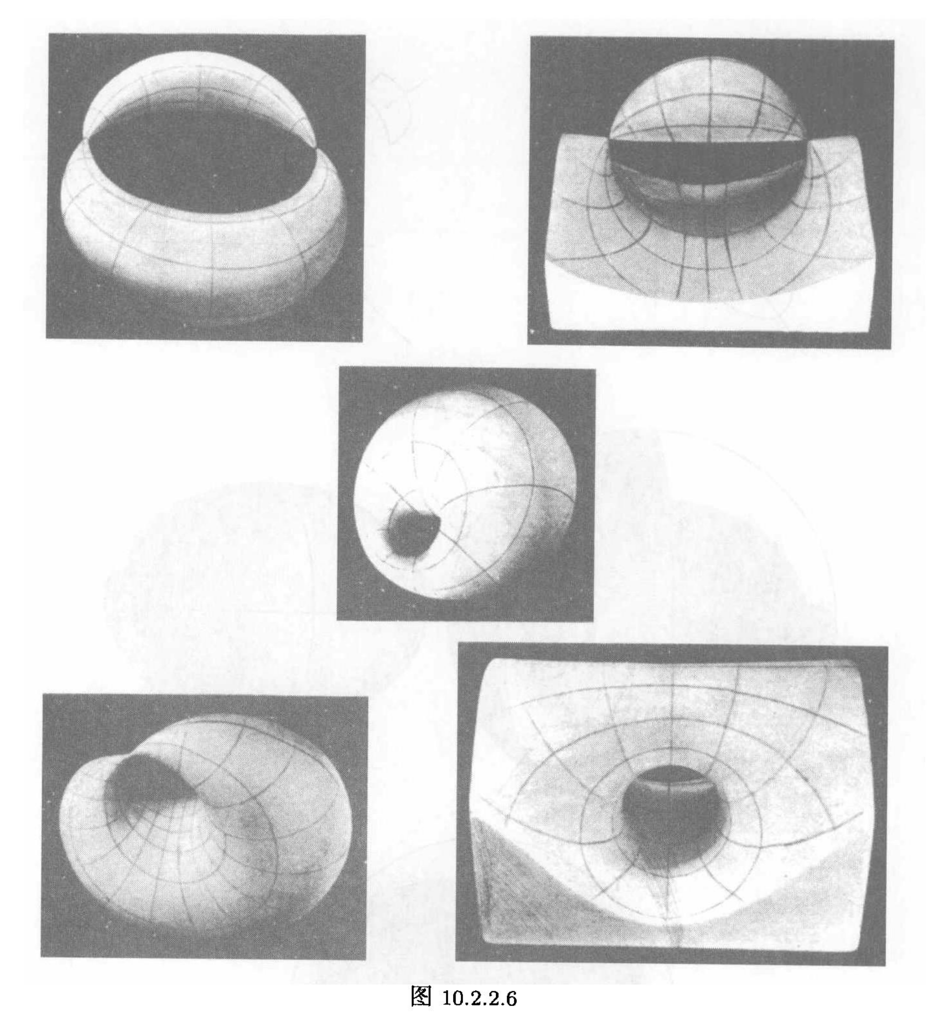


图 10.2.2.6

摘自 D. Hilbert 和 S. Cohn–Vossen; *Anschauliche Geometrie*,

Berlin, Verlag Von Julius Springer, 193 页和 194 页

10.2.2.7　波曲面

给定欧几里得平面的两条固定直线和一条变动直线 (纸带), 使得它上面的两个固定点保持在两条给定直线上. 那么当运动完成时, 所有固定在变动直线上的点描绘出一个椭圆 (两个基点除外, 它们描绘出线段).

现在考虑空间里的类似问题. 也就是说, 给定三个固定平面 (为了简单起见, 假定它们两两正交) 和一条变动直线, 固定在其上的三个点被控制在三个固定平面上. 那么, 首先当变动直线的所有可能位置被穷尽时, 在其上固定的任意的一个其他的点将描绘出一个椭球 (在某些情形下是椭圆); 这是椭球的一种机械生成方式.

其次, 这里存在 (参见 3.5.15.5) 一个带一个参数的平行曲面 (参见 10.2.2.12) 的

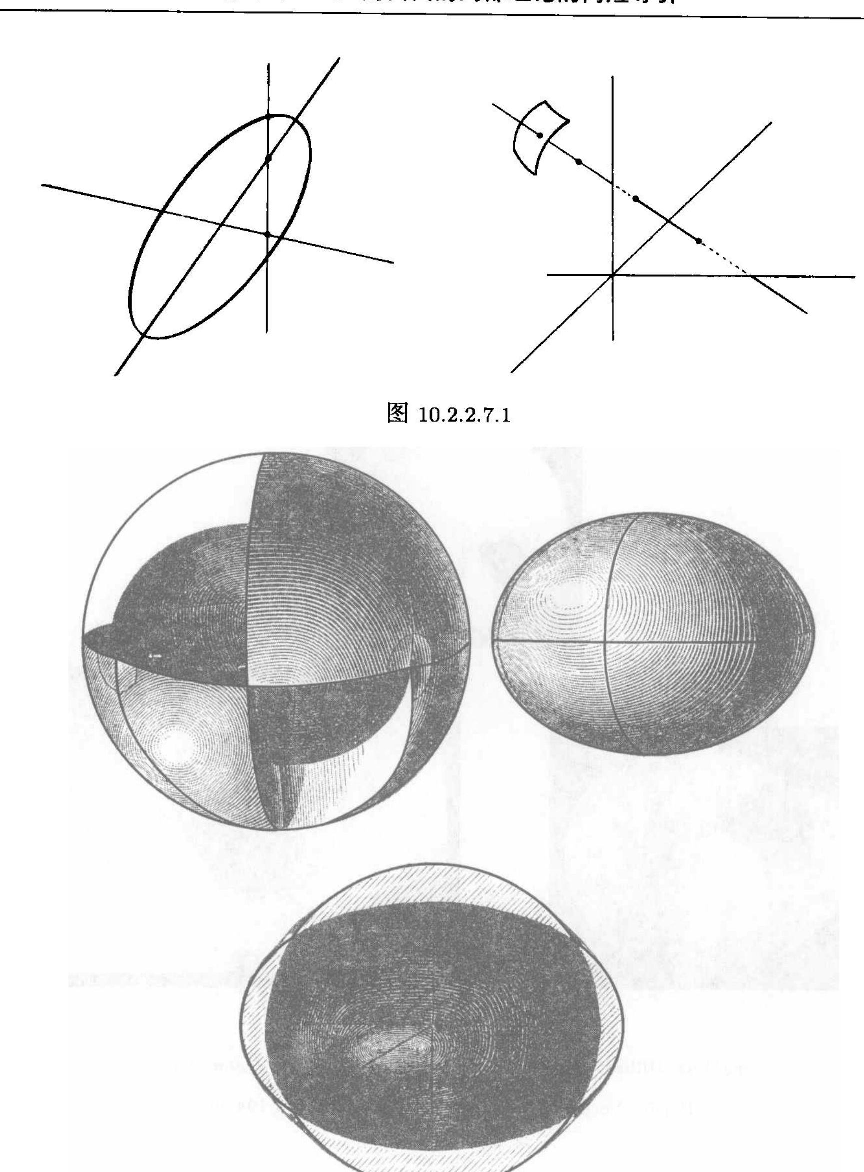


图 10.2.2.7.1

图 10.2.2.7.2

摘自曾经引用的 E. Rouché 和 Ch. de Comberousse 的著作, 501 页和 503 页

族, 以这个带两个参数的直线的族作为 (正交于曲面的) 法线的集合. 我们可以从一个椭球面出发, 用称为 “拱点” 的几何构造的方法来构建这样一个曲面. 参见 [39], 注解Ⅶ和Ⅷ以及 [76], 496 页. 它曾经由菲涅耳 (Fresnel) 在物理学里引进, 因为它表示一个点光源在双折射介质的波前. 其中的一个曲面的方程是锥形

$$\frac{x^2}{\rho^2-a^2}+\frac{y^2}{\rho^2-b^2}+\frac{z^2}{\rho^2-c^2}-1=0, \quad 其中 \quad \rho^2=x^2+y^2+z^2.$$

在 [39] 的注解Ⅷ中对于此曲面有详尽的研究. 这个曲面有四个锥形点 (要摒弃的奇异点) 和四张平面, 沿 $\mathbf{R}^3$ 的一个圆周跟曲面相切.

10.2.2.8 由 $\left(\frac{x}{a}\right)^m+\left(\frac{y}{b}\right)^n+\left(\frac{z}{c}\right)^p=1$ 定义的曲面称为*四面体曲面*. 而曲面 $x^my^nz^p=1$ 也是这种曲面, 当诸指数可公度时它们是代数曲面. 对于这些曲面, 参见 [36], 203 页. 要特别注意, 按照 m,n,p 是整数或非整数, 正数或非正数, 有理数或无理数, 必须扣除 $F^{-1}(0)$ 的某些子集.

10.2.2.9 旋转曲面

如果 $f(x,z)=0$ 定义 xz 平面上的一条曲线, 那么由这条曲线绕 z 轴旋转生成旋转曲面, 其方程是 $F(x,y,z)=f(\sqrt{x^2+y^2},z)=0$. 仅当 $f^{-1}(0)$ 有奇异性时, 或 $f^{-1}(0)$ 与 z 轴相交时它有奇异性风险. 如果前述的二次曲面中的系数 a,b,c 中有两个相等, 那么它们就是旋转曲面 (参见 10.2.2.3).

悬链面. 或法国数学家称之的*庭芥花面*是由 $\cosh z=\sqrt{x^2+y^2}$ 定义的旋转曲面. 这是唯一的旋转极小曲面 (参见 10.6.6.6.3). 名称悬链面来自曲线 $x=\cosh z$ 表示是一条链的平衡形状, 该链悬挂在重力场中的两个点上, 从而曲线称为*悬链线*. 所说的唯一性来自悬链线用其曲率中心表达的特征 (参见 8.7.20). 悬链面和悬链线的图形如图 10.2.2.9:

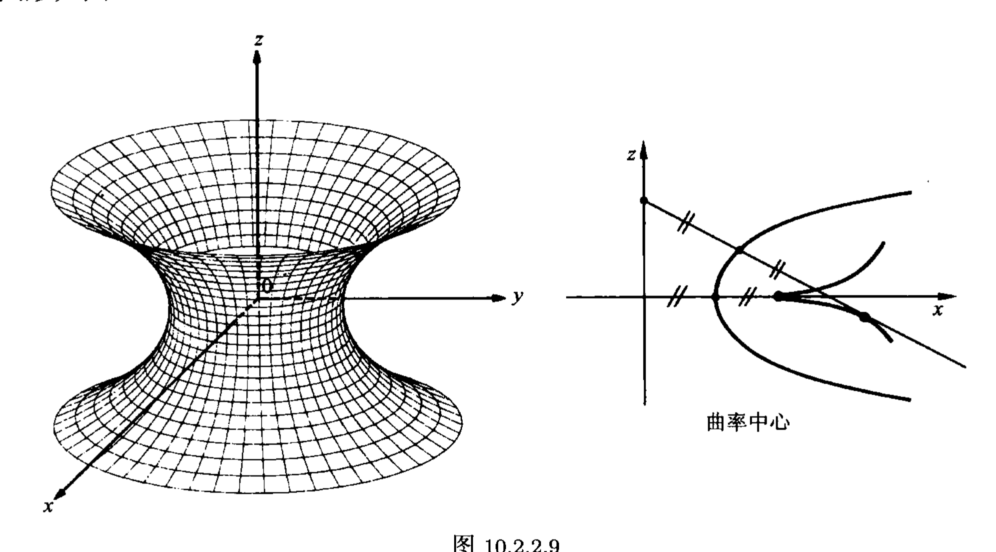


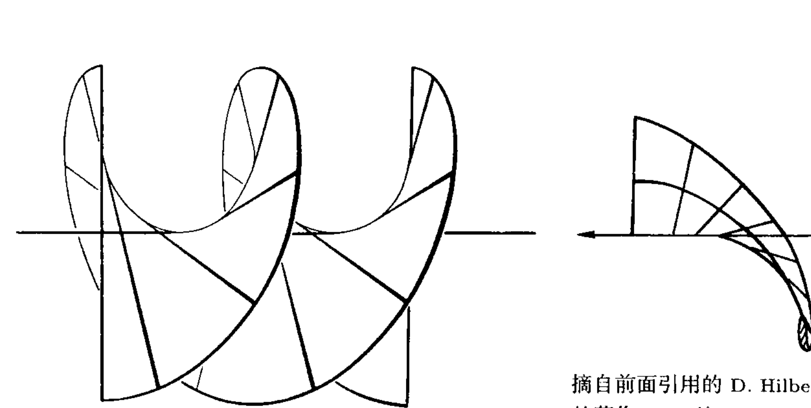
图 10.2.2.9

摘自前面引用的 Do Carmo 的著作, 222 页

10.2.2.10 螺旋面

这是曲面 $\tan z=a\dfrac{y}{x}$, 它由正交于螺丝的轴的直线以拧螺丝的方式行进的轨迹来定义. 如果 $a=1$, 则说它是 "方螺纹" 螺旋面.

10.2.2.11 方程 $\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^y+\mathrm{e}^z=1$ 定义一个*平移曲面*. 它还可以用另外一种不同



摘自 Spivak, A comprehensive Introduction to Differential Geometry, 248 页

摘自前面引用的 D. Hilbert et S. Cohn-Vossen, 的著作, 209 页

图 10.2.2.10

方式定义, 参见 10.2.3.1.

10.2.2.12 平行曲面

如果当 k 变动时得到曲面族 $F(x,y,z)=k$. 而 F 的梯度的范数是常数, 比如 $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2=1$, 那么这个族的曲面是两两平行的, 即至少对于变化不大的 k, 一个曲面上的每个点到另一个曲面的距离是定值. 对于其逆, 参见 3.5.15.5.

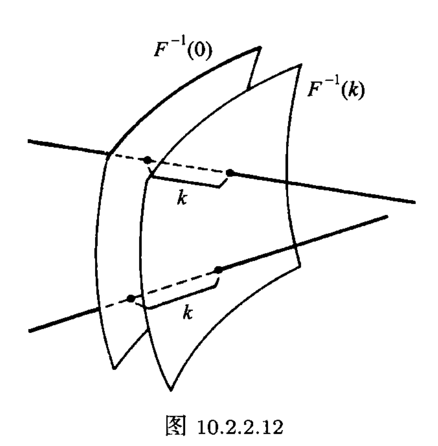


图 10.2.2.12

10.2.3 由 $\mathbf{R}^2$ 的开集的浸入定义的曲面

10.2.3.1 平移曲面

我们这里推广 10.2.1.3, 为此, 考虑 $\mathbf{R}^3$ 的任意两条曲线 F 和 G (定义在同一个区间 I 上), 并且考虑从 $I\times I$ 到 $\mathbf{R}^3$ 内的映射 $(u,v)\mapsto F(u)+G(v)$. 这将是一个双平移曲面. 但是它还可以用另一种方式定义吗? 索福斯 · 李完全回答了这个问题: 一

般解是从一条其上有任意四个点的 4 阶平面代数曲线出发, 并且用与之关联的阿贝尔积分表示, 参见 [36], 159 页. 一个十分特殊的情形是这条曲线退化成两条圆锥曲线. 不计一个射影变换, 结果总是 10.2.2.11 的曲面 $\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^y+\mathrm{e}^z=1$. 事实上, 对于任意实数 a,b,c, 可以通过十分不同的浸入

$$(u,v)\mapsto\left(\log\left[\frac{(u-a)(v-a)}{(a-b)(a-c)}\right],\log\left[\frac{(u-b)(v-b)}{(b-a)(b-c)}\right],\log\left[\frac{(u-c)(v-c)}{(c-a)(c-b)}\right]\right)$$

表示它.

10.2.3.2　一般注解

在所有例子里, 我们只给出公式; 不过始终并不关心它是否真正至少给出一个浸入.

10.2.3.3　球面

在 10.2.1.1 中的 $(x,y)\mapsto\pm\sqrt{1-x^2-y^2}$ 周围, 可以考虑 6.1.6 的地球坐标

$$(\varphi,\theta)\mapsto(\cos\varphi\sin\theta,\sin\varphi\sin\theta,\cos\theta).$$

令 $u=\log\tan\dfrac{\theta}{2}$ 和 $v=\varphi$ 得到梅卡托投影

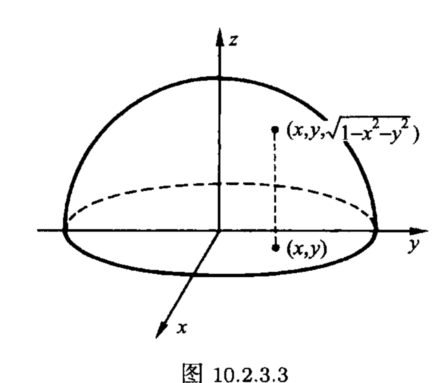


图 10.2.3.3

$$(u,v)\mapsto(\operatorname{sech}u\cdot\cos v,\operatorname{sech}u\cdot\sin v,\tanh v).$$

最后还有北极球极投影

$$(u,v)\mapsto\left(\frac{4u}{u^2+v^2+4},\quad\frac{4v}{u^2+v^2+4},\quad\frac{2(u^2+v^2)}{u^2+v^2+4}\right)$$

(参见 2.8.7,5.7 和 [40],18.1.4).

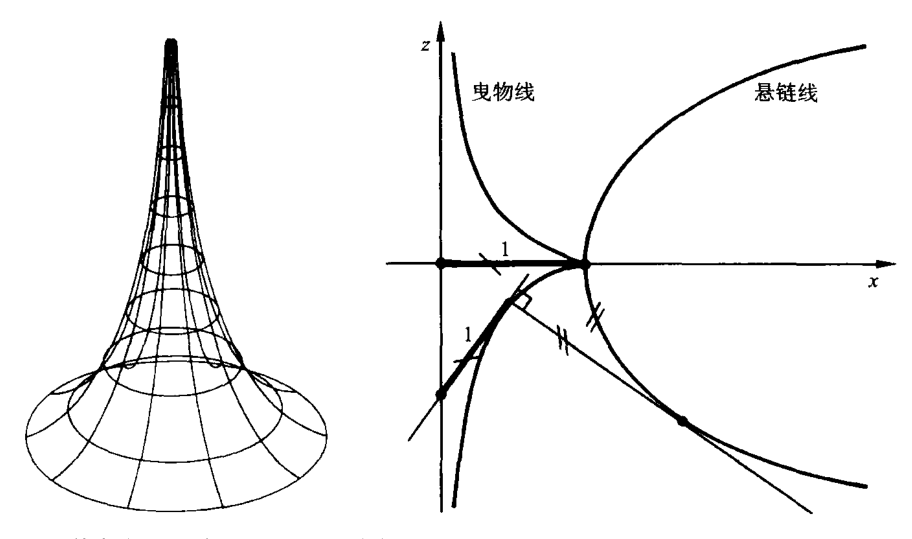
10.2.3.4　椭球面参见 10.2.2.3.

10.2.3.5　旋转曲面

如果在 10.2.2.9 考虑的 xz 平面的曲线有参数表示 $v\mapsto(f(v),g(v))$, 则它生成的旋转曲面可以写成

$$(u,v)\mapsto(\cos u\cdot f(v),\sin u\cdot f(v),g(v)).$$

对于悬链面这将是 $x = \cos u \cdot \cosh v, y = \sin u \cdot \cosh v, z = v$. 贝尔特拉米曲面 (经常称为*伪球面*, 可能更早由明金 (Minding) 发现) 是由*曳物线* $v \mapsto \left(\frac{1}{\cosh v}, t - \tanh v\right)$ 生成的旋转曲面. 曳物线既是悬链线的渐伸线,又可以用图 10.2.3.5 指出的切线性质刻画其特征.



摘自前面引用的 DoCarmo 的著作, 169 页

图 10.2.3.5

在 10.5.3.10, 10.6.9.6 和 11.10.2 还可以见到旋转曲面的其他重要例子.

10.2.3.6　对于极小曲面的魏尔斯特拉斯公式

在 $\mathbf{R}^2 = \mathbf{C}$ 的开集 U 上考虑任意全纯函数 $f(Z) = f(x + \mathrm{i}y)$. 在从原点到 Z 的任意路径上进行积分, 从而由

$$x(u,v) = \mathrm{Re}\left(\int_0^Z (1 - Z^2) f(Z) \mathrm{d}\, Z\right),$$

$$y(u,v) = \mathrm{Re}\left(\mathrm{i}\int_0^Z (1 + Z^2) f(Z) \mathrm{d}\, Z\right),$$

$$z(u,v) = \mathrm{Re}\left(2\int_0^Z Z f(Z) \mathrm{d}\, Z\right)$$

定义到 $\mathbf{R}^3$ 内的浸入. 在某种意义下这个曲面表示最一般的 (局部的, 否则将会遇到复变量的积分的多值问题!) 极小曲面 (参见 10.6.9.2 和 [42], 64 页). 对于不出现积分的公式, 参见 [36], 340 页. 如果取最简单的函数 $f(Z) = Z$, 正好又碰到 10.2.2.5 的*恩尼珀曲面*, 它的一个参数表示是

$$(u,v) \mapsto \left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2\right).$$

这里如果令 $u \mapsto \pm u, v \mapsto \pm v$ 和 $(u,v) \mapsto (v,-u)$, 其对称性立刻呈现.

如果把 f 换成 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} f$, 我们就得到彼此等度量的极小曲面的单参数族. 适当选取 f, 准确地说就是取 $f(Z) = 1/Z$, 当 α 变动时, 就得到把悬链面和方螺纹螺旋面联结起来的曲面的连续族, 参见 10.4.1.7 和 11.16.5.

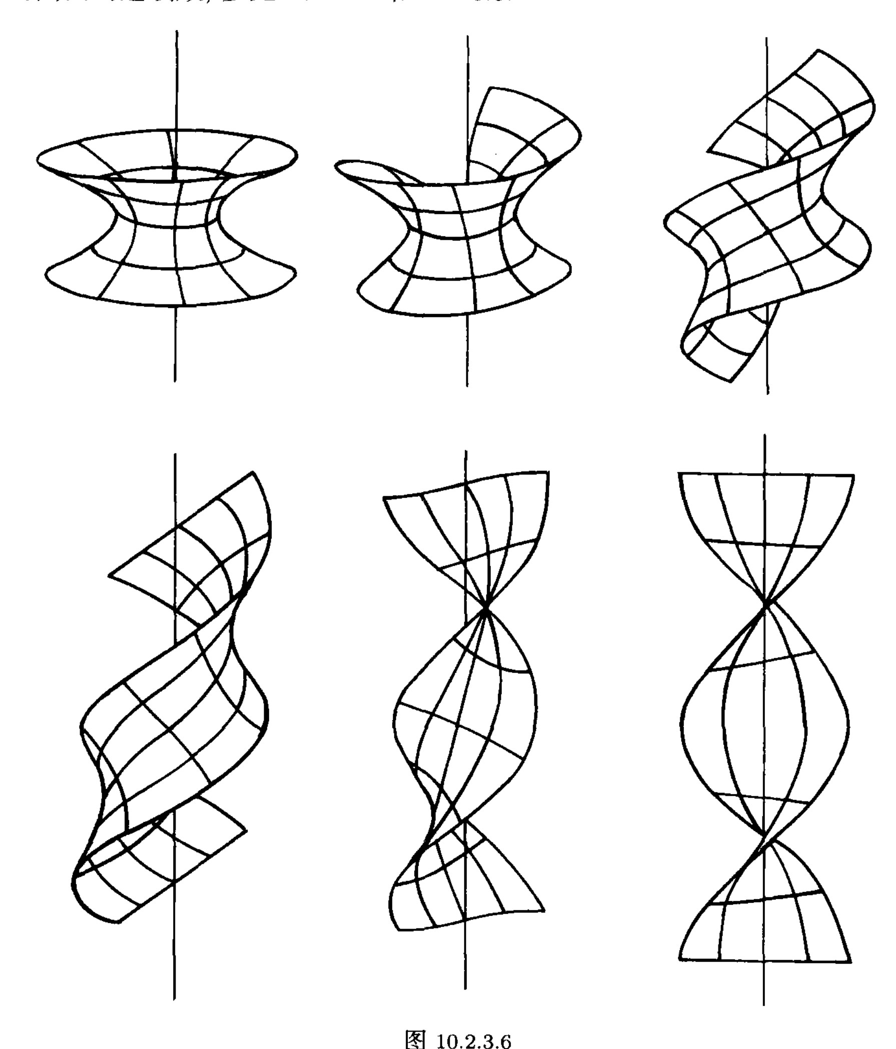


图 10.2.3.6

摘自前面引用的 M. Spivak 的著作, 248 页和 249 页

10.2.3.7 直纹面 ("扭曲面")

这里涉及的是由单参数的直线 (称为曲面的母线) 族的运动生成的曲面. 它可以粗略地写成

10.2.3.8 $$(u,v) \mapsto F(u,v) = m(u) + v \cdot \xi(u),$$

其中 $m(u)$ 是 $\mathbf{R}^3$ 的一条曲线, 而 ξ 描绘单位球面 S^2 上的一条曲线.

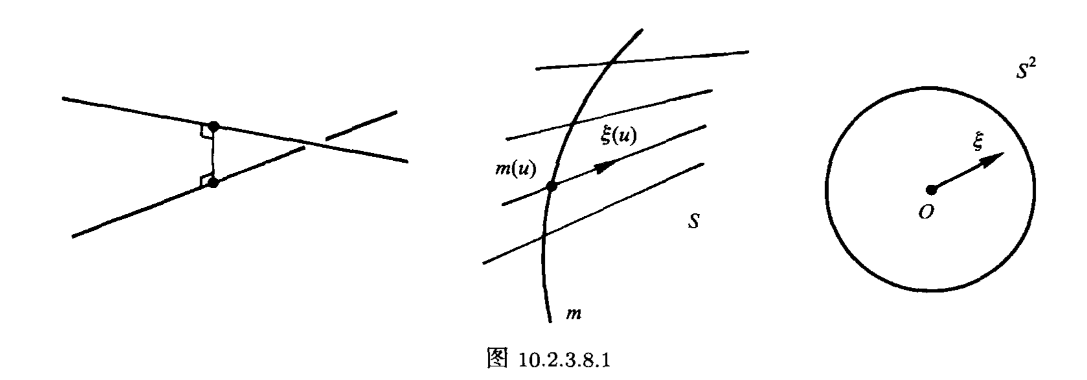


图 10.2.3.8.1

在普通的柱面和锥面之外, 我们已经接触到的直纹面有: 螺旋面 10.2.2.10, 双曲抛物面 10.2.1.2, 单叶双曲面 10.2.2.3 和普吕克劈锥 10.2.1.4. 有两个巧妙的参数表示; 第一个在于取曲线 m 为正交于母线的轨线, 于是总有 $(m'|\xi)=0$. 第二个更精细并且是唯一的参数表示, 在于要求 $(m'|\xi')=0$. 其几何解释如下所述. $\mathbf{R}^3$ 的任意两条直线确定一条公垂线, 一个距离和一个角. 当取它们的极限值时, 我们得到: 在 $\xi'(t)\neq 0$ 的所有区间 (自然的假设, 因为对于所有 $t, \xi'(t)=0$ 这一容易研究的情形, 给出柱面) 存在唯一一条在直纹面 S 上描绘的满足 $(m'|\xi')=0$ 的曲线 m, 称为它的*腰线*,而腰线上的点称为*中心点*. 请读者对于上面列举的直纹面确定其腰线.

现在假定在 10.2.3.8 中 $(m'|\xi')=0$. 那么无限接近的两条母线的距离和夹角的比值的极限是 S 的*分布参数*,它由混合积 $\lambda=(m',\xi',\xi)$ 给定. 这个参数表示的是当邻近的母线趋于所考虑的母线时, 它们的距离和夹角的比值的极限. S 的切平面由其法向量

$$\frac{\partial F}{\partial u}\wedge\frac{\partial F}{\partial v}=m'\wedge\xi+v(\xi'\wedge\xi)=\lambda\xi'+v(\xi'\wedge\xi)$$

确定.

这个公式表明一条给定母线上的四个点处的切平面的交比等于四个切点的交比 (参见 [40], 第 6 章). 直纹面的最后一个例子是*默比乌斯带* (参见 5.9.11):

$$(u,v)\mapsto\left(\left(2-v\sin\frac{u}{2}\right)\sin u,\left(2-v\sin\frac{u}{2}\right)\cos u, v\cos\frac{u}{2}\right).$$

不过提请注意, 默比乌斯带根本不是可展的曲面 (参见 10.4.1.8), 它不是局部等距于欧几里得平面的. 但是当我们仔细粘连一个纸带时, (由于纸的刚性) 会得到局部等距于 $\mathbf{R}^2$ 的默比乌斯带, 也就是说得到可展曲面.

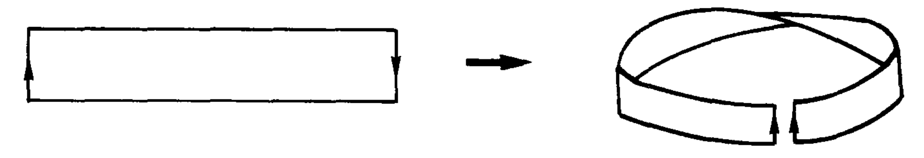


图 10.2.3.8.2

有关物理实现和明晰的方程的写法 (纸带的长度应当充分大于其宽度) 的问题, 参见 [129] 和 [132]. 对于默比乌斯带的趣味内容以及跟映射度理论的关系, 参见 7.8.11 和 [34], 294 至 297 页.

10.2.3.9　可展曲面

前面给出的对于切平面的公式表明, 当且仅当 $\lambda = 0$ 时, 一条母线上诸点的切平面保持为同一固定平面, 这就要求 ξ' 平行于 m'. 这样的曲面称为*可展的* (名称的由来见 10.4.1.8). 它由一条给定曲线的切线的集合生成, 而这也是其密切平面的包络, 参见 10.2.3.12.

我们会确信, 在所有情形下, 可展曲面 S 沿着其定义曲线是 "奇异的"; 在曲线的挠率不是零的各个点, 可以把这种状况直观化, 说成 S 的两叶在该点沿曲线 m 相切地联结在一起. 这里 10.2.3.7 的腰线经常称为*脊线*.

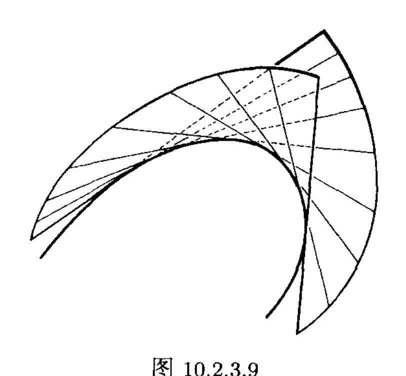


图 10.2.3.9

摘自 W. Klingenberg, *Eine Vorlesung über Differential Geometrie*, Berlin, Springer Verlag, 43 页

10.2.3.10　槽形曲面

直纹面的自然推广如下所述. 给定空间中一条固定曲线 C, 然后关注由这条曲线在带一个单参数的位移族的作用下生成的曲面 S. 最简单的情形是假定固定曲线 C 是平面曲线. 如果由平面曲线 C 生成曲面 S 满足条件: S 在固定在曲线 C 上的一个点所经过的各点的切平面都正交于 C 当前所在平面, 则称 S 为*槽形曲面*. 利用弗雷内公式 (参见 8.6), 我们确信这个条件等价于下列条件: 在描绘有初始曲线的平面上, 该曲线应当对于描绘在这个平面上的曲线 D 是固定的, D 跟空间 $\mathbf{R}^3$ 的一条曲线 E 有同样的以弧长做自变量的曲率函数, 这里的 E 是所考虑的平面的包络曲面的腰曲线 (参见基本定理 8.5.7). 如果平面包络一个圆锥面或一个圆柱面, 就容易了解曲面的形状; 在特殊情形下, 平面绕其上的一个直线轴旋转, 就得到旋转曲面, 因此旋转曲面是槽形曲面的非常特殊的情形. 下面 10.2.3.12 的管道曲面也是槽形曲面. 按照运动学说法, 上面的条件表示平面应当在其包络上*无滑动的滚动*. 对于槽形曲面, 可以查阅 [36], 143 页和其他部分, 以及 [68], 244 页.

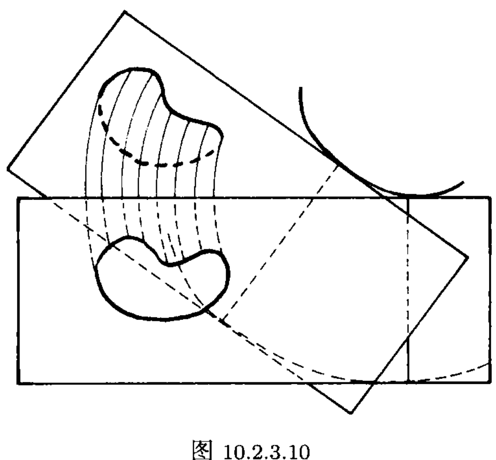


图 10.2.3.10

10.2.3.11 平行曲面

在参数表示下, 平行于曲面 $(u,v)\mapsto F(u,v)$ 的曲面 10.2.2.12 由以下公式给定:

$$(u,v)\mapsto F(u,v)+k\frac{\dfrac{\partial F}{\partial u}\wedge\dfrac{\partial F}{\partial v}}{\left\|\dfrac{\partial F}{\partial u}\wedge\dfrac{\partial F}{\partial v}\right\|}.$$

10.2.3.12 单参数曲面族的包络

求单参数曲面族的包络的实用规则如下所述, 在 "一般" 情形下, 它给出正则的结果. 取曲面族的形式为 $F(x,y,z,\lambda)=0$, 再由两个方程 $F(x,y,z,\lambda)=0$ 和 $\dfrac{\partial F}{\partial\lambda}(x,y,z,\lambda)=0$ 消去参数 λ. 最常得到的结果有形式 $G(x,y,z)=0$ (如果能够做明晰的计算的话). 在单个平面的情形下, 得到 10.2.3.9 的可展曲面. 球面族的情形是特别引人注目的. 如果说每个平面与其包络是沿着一条直线 (无限邻近的平面的交) 相切, 那么每个球面是沿着一个 (小) 圆周相切. 这些曲面将在 10.6.8.2.3 用它们的曲率线刻画特征. 还要注意当球面有一个公共点时, 它们的包络是可展曲面的在反演下的像 (参见 8.7.4 和 [40], 10.8).

这里指出两个情形. 第一个情形是球面的半径是常数; 包络 (至少对于充分小的半径) 正是我们在 2.7 研究过的管形的边界. 那里的 X 是 $\mathbf{R}^3$ 里的曲线; 见图 2.7.6.2. 在古典文献里, 它们叫做管道曲面.

第二个情形是曲面 S 以两种不同的方式作为球面的包络. 三个不同的球确定与三个球都相切的一个单参数的球面族, 并且我们确信必然会出现这里所说的情形. 公切球中心的轨迹 (它有两段, 每段对应一个生成方式) 由 $\mathbf{R}^3$ 的两个焦点圆锥曲线构成, 即 10.2.2.3 的族对应于 $c=\lambda, z=0$ 和 $b=\lambda, y=0$ 的极限形式:

$$\frac{x^2}{a-c}+\frac{y^2}{b-c}-1=0,\quad \frac{x^2}{a-b}+\frac{z^2}{b-c}-1=0.$$

还必须包括以下两个特殊情形: 两段组成焦点抛物线, 以及一段是圆周, 而另一段是它的轴. 前一种情形得到的曲面正是 10.2.2.6 中的迪潘四次圆纹曲面类. 后一种情形给出的是圆环面.

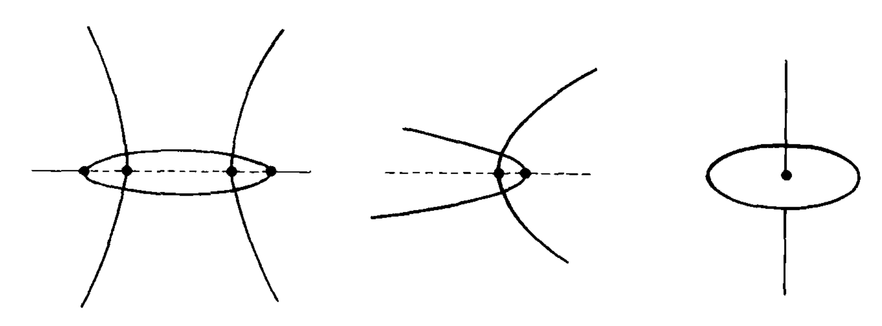


图 10.2.3.12

焦点圆锥曲线: 它们描绘在正交平面上, 并且一个的顶点是另一个的焦点.

10.2.3.13　带双参数的包络

仅谈论平面情形. 在 $\mathbf{R}^2$ 里一个单参数直线族, 至少对于某些计算, 理想的表示是欧拉方程, 即把直线到原点的距离表示成方向的函数, 而说到底, 方向是描绘出一个圆周的向量确定: 参见习题 9.9.3 和 [40], 11.8.12.3 和 12.12.1. 计算是容易的, 根本原因在于一个圆周的参数表示跟一条直线一样. 如果直线到原点的距离 p 是角 θ 的函数, 则其包络曲线的曲率的值是 $p+\dfrac{\mathrm{d}^2p}{\mathrm{d}\theta^2}=p+p''$. 参见 11.19 的图或 [40], 12.12.14.

对于 $\mathbf{R}^3$ 的平面的双参数族, 必须用单位向量的函数给定平面到原点的距离 p, 单位向量相当描绘出 S^2 的一个点. 而前面已经看到 S^2 的点的参数表示并不真的那么简单. 类似于 $K=p+p''$ 的公式将在 11.19.1 研究.

波曲面 (参见 10.2.2.7) 十分容易地定义为双参数平面族的包络, 取函数 p 为

$$p=\frac{(a+k)u^2+(b+k)v^2+(c+k)w^2}{2},$$

其中 $u^2+v^2+w^2=1$, 而 k 是一个参数.

笛卡儿坐标由

$$x=(p-a)u,\quad y=(p-b)v,\quad z=(p-c)w$$

给定.

读者可以验证恩尼珀曲面可以非常容易地定义为平面的这样的包络: 在焦点抛物线的两条抛物线 (参见前面的图形) 上各任意取一个点, 作这对点的中垂面, 即过连结这两个点的线段的中点并且垂直于该线段的平面, 那么这些平面的包络是恩尼珀曲面.

10.2.3.14　用棉线生成椭球面

可以用下面叙述的力学方式生成椭球面: 把一段棉线绷紧, 并且像图 10.2.3.14 那样依靠在两条焦点圆锥曲线上, 那么这段依赖两个参数的棉线的顶端描绘出一个椭球面, 这个椭球面属于椭球面的一个单参数族. 此族属于 10.2.2.3 中的共焦二次曲面族, 而后者对应给定的两条焦点圆锥曲线. 对于这里的二次曲面的力学生成方式的证明, 参见 [92], 450 页, 或 [106], 198 页.

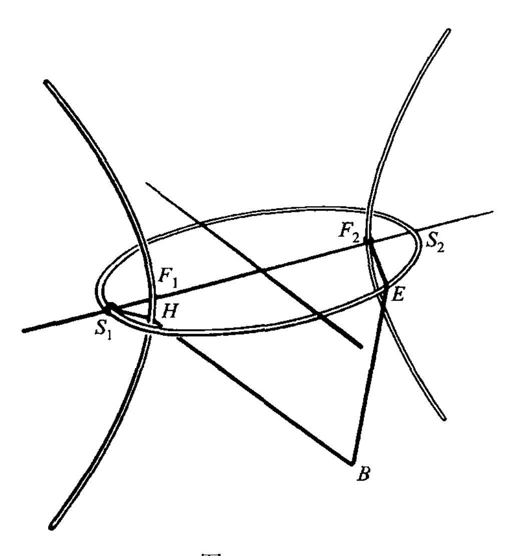


图 10.2.3.14

摘自前面引用的 D. Hilbert 和 S. Cohn–Vossen 的著作, 20 页

10.2.4　浸入 (整体) 曲面

我们仅给出图形; 明晰的方程往往是特别复杂的. 对于这些曲面, 参见 [128]. 在 [148] 里将会找到由低阶的具体的多项式给定的 $P^2(\mathbf{R})$ 的浸入 (博依 (Boy) 曲面)

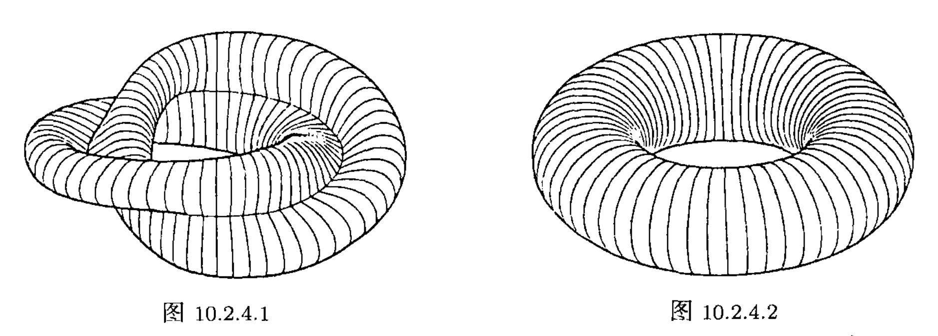


图 10.2.4.1　　图 10.2.4.2

摘自 U. Pinkall, *Regular homotopy classes of immersed surfaces*, Bonn, 5 页

图 10.2.4.3

摘自 U. Pinkall, *Drei Kapitel in dem Buch* ···, Bonn, 10 页

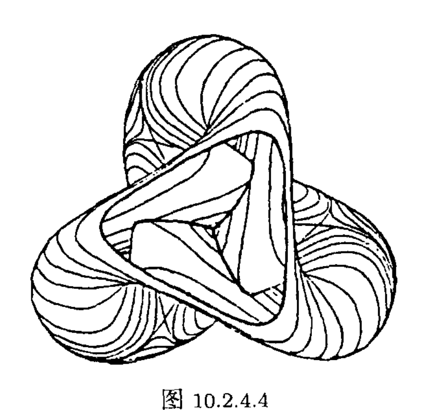


图 10.2.4.4

摘自 U. Pinkall 的 *Regular homotopy* ···, 10 页

图 10.2.4.2 是圆环面的一个通常浸入; 而图 10.2.4.1 表示的也是同一个圆环面 T^2 的一个浸入. 至于图 10.2.4.4, 它是古典的博依曲面, 这是实射影平面 $P^2(\mathbf{R})$ 在 $\mathbf{R}^3$ 内的一个浸入, 但它绝对不能嵌入到 $\mathbf{R}^3$ 内.

10.3　曲面的两个基本形式

10.3.1　第一基本形式

我们要研究 $\mathbf{R}^3$ 的一个 (局部的或整体的) 曲面 V. 打算首先研究 V 的内蕴几何, 也就是这样的几何: V 上的居民, 在其上散步, 而禁止离开它到 $\mathbf{R}^3$ 的其他地方, 并且只允许他测量长度. 这还意味着: V 的每个点 v 有一个切空间 T_vV(参见 2.5.3). 由于 $T_vV \subset \mathbf{R}^3$, 它继承了一个欧几里得结构, 一个范数和一个内积 (对于它们, 保留 $\mathbf{R}^3$ 中的记号). 一个好的做法是: 在 T_vV 的总体上, 即在 V 的切丛 TV(参见 2.5.24) 上考虑这些欧几里得结构 g_v 的总体. 在习题 3.6.3 的意义下, 我们得到那里所说的黎曼结构,即在每个 T_vV 上给定一个欧几里得结构 g_v, 使得 $v \mapsto g_v$ 是 C^∞ 的. 也就是说在推广 5.2 引进的微分形式的语言之后, g 总是 V 上的一个微分形式, 但这里是对称双线性的 (并且是正定的). 这个微分形式称为 V 的*第一基本形式*,记作 g, 或 $\mathrm{d}\,s^2$, 或 I. 不论是对于现在, 还是对于将来任意维数的情形, 微分对象的这些概念都需要明确表达.

10.3.2　微分法在流形上的推广

我们考虑一个任意的抽象微分流形 X. 对于每个切空间 T_xX, 可以关联在 x 的 (p,q) 型张量的张量积 $\left(\overset{p}{\otimes} T_xX\right) \otimes \left(\overset{q}{\otimes} T_x^*X\right)$. 这些向量空间关于 x 的总体是 X 上的一个丛,记作 $T^{(p,q)}X$.X 上的一个 (p,q) 型张量是它的一个 C^∞ 截口. 在 5.2 所说的微分形式是 $(0,q)$ 型的反称张量. X 上的一个*黎曼结构*是 X 上的 $(0,2)$ 型张量, 它是处处对称的和正定的. X 上的一个向量场只不过是一个 $(1,0)$ 型的张量 (参见 3.5 节). X 上的一个自同态场将是一个 $(1,1)$ 型张量, 因为人所熟知在 $V \otimes V^*$ 和 $\mathrm{End}\,(V)$ 之间的等同关系. 由于对于 5.2 的外微分形式, $(0,q)$ 型的形式是反变的, 所有态射 $f: X \to Y$ 和 Y 上的所有 $(0,q)$ 型的 q- 形式 ω, 对应*拉回像*$f^*\omega$, 根据与 0.1.9 同样的定义和 5.2.4, 它是 X 上的一个 q- 形式. 反之, 只要 $p \neq 0$, 对于 (p,q) 型的张量, 如果态射不是微分同胚，则它不能将其转置，除非它是向量场.

例如, 浸入到 $\mathbf{R}^3$ 的一个曲面继承了一个自然的黎曼结构, 这将是它的*第一基本形式*.

我们说两个抽象黎曼流形 (X,g) 和 (Y,h) 是*等距的*, 如果存在一个微分同胚 $f: X \to Y$, 使得 $f^*h = g$.

10.3.3　第二基本形式

这是一个适用于局部, 整体和浸入的曲面的一个概念. 为了简单起见, 我们处理 $V \subset \mathbf{R}^3$ 这种情形. 将假定 V 是可定向的, 这局部地总是可能的, 并且像在 6.4.3 中那样, 把 V 的典范法向量记作ν. 这是一个称为*高斯映射*的态射

$$\nu: V \to S^2.$$

注意由高斯映射的构造得到 $T_v\nu = T_{\nu(v)}S^2$. 因而切映射 $T_v\nu$ 是 T_vV 的自同态, 称

为魏因加滕自同态.它对于 (第一基本形式) g 是对称的 (自伴的), 因而由

$$II_v(x,y)=(T_v\nu(x)|y)$$

确定 T_vV 上的一个对称双线性型,称为第二基本形式,记作II_v. 不要跟第三基本形式混淆, 后者根据定义是曲面 S^2 上的第一基本形式经过 ν 的拉回像. 我们从不谈论到它, 因为事实上它是 I 和 II 的一个线性组合.

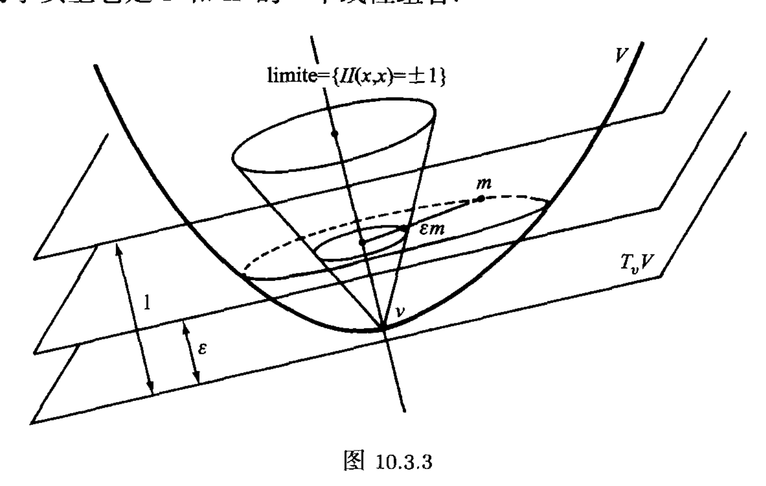


图 10.3.3

为了用几何方式确定给出从 V 到 $\mathbf{R}^3$ 的形状的 II, 可以用平行于 T_vV 且趋近于 T_vV 的平面切割 V, 取相交曲线, 适当地规范它们. 那么, 如果 II 的秩是 2, 则得到极限曲线, 它是由 $II(x,x)=\pm1$ 定义的圆锥曲线 (称为迪潘标线); 这从 4.2.20 的研究得到, 还可以参见 10.6.4.

还有用几何方式确定第二基本形式的另外一种十分重要的方式; 它借助在 10.2.2.12 引进的平行曲面. 采用那里的记号, 设 $V=F^{-1}(0)$ 是所考虑的曲面, 而 V_k 是平行于 V 并且对于选取的定向与它距离为 k 的曲面. 这是一个恰当的时机注意到第二基本形式的符号依赖于所研究的曲面的定向.这件事交待明白之后, 图 10.2.2.12 至少对于充分小的 k 提供一个从 V 到 V_k 的微分同胚 φ_k. 如果用 I_k 表示 V_k 的第一基本形式, 那么就证明了 V 的第二基本形式由下列导数给定

10.3.3.1
$$II=\frac{\mathrm{d}\,(\varphi_k^*(I_k))}{\mathrm{d}\,k}(0).$$

其中记号 φ_k^* 是在 10.3.2 末尾所采用的. 这个无穷小结果的局部说法见 10.6.6.7.

10.4 通过第一基本形式计算的量 (2 维黎曼几何)

10.4.1 第一基本形式的坐标表示

10.4.1.1 设 V 局部地由 $\mathbf{R}^2$ 的开集 U 上的浸入 $(u,v)\mapsto F(u,v)$ 的像表示, 拉回像 $F^*g=F^*(I)$ 是一个明晰的黎曼结构. 可以说这相当用坐标 (u,v) 计算 I. 典范

的记号是

$$F^*(\mathrm{d}s^2) = E\mathrm{d}u^2 + 2F\mathrm{d}u \cdot \mathrm{d}v + G\mathrm{d}v^2,$$

其中 $\mathrm{d}u^2, \mathrm{d}u \cdot \mathrm{d}v, \mathrm{d}v^2$ 表示对于微分形式的张量积. 至于 E, F, G, 这是 (u,v) 的函数, 它们的具体表达式是

$$E = \left\|\frac{\partial F}{\partial u}\right\|^2, \quad F = \left(\frac{\partial F}{\partial u}\middle|\frac{\partial F}{\partial v}\right), \quad G = \left\|\frac{\partial F}{\partial v}\right\|^2.$$

U 上的三个函数完全决定了黎曼结构; 而根据 10.1.3 和 10.3.2, 可以通过微分同胚 $(u,v) \mapsto (u',v')$ 得到一个等距结构, 在某种意义下是"同样"的结构. 为了计算新的函数 E', F', G', 只需用 $\mathrm{d}u = \dfrac{\partial u}{\partial u'}\mathrm{d}u' + \dfrac{\partial u}{\partial v'}\mathrm{d}v'$ 和 $\mathrm{d}v = \dfrac{\partial v}{\partial u'}\mathrm{d}u' + \dfrac{\partial v}{\partial v'}\mathrm{d}v'$ 分别代换 $\mathrm{d}u$ 和 $\mathrm{d}v$, 并且把 $\mathrm{d}u^2, \mathrm{d}u \cdot \mathrm{d}v, \mathrm{d}v^2$ 按照普通乘积来计算. 在二次型的语言里 (参见 [40], 13.1.3.8), 矩阵 $I = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ 变为 $I' = \begin{pmatrix} E' & F' \\ F' & G' \end{pmatrix} = {}^tJIJ$, 其中 J 是雅可比矩阵$J = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial u'} & \dfrac{\partial v}{\partial u'} \\ \dfrac{\partial u}{\partial v'} & \dfrac{\partial v}{\partial v'} \end{pmatrix}$. 不容置疑的是寻找坐标, 使得 E, F, G 尽可能的简单, 总是有所裨益的. 曲面 V 的几何, 无论内蕴的, 还是外在的, 对于我们寻找这样的坐标都是有帮助的.

10.4.1.2 图像

沿用对于 10.2.1 的图像的经典记号 $p = \dfrac{\partial f}{\partial x}$, $q = \dfrac{\partial f}{\partial y}$, 我们有

$$\mathrm{d}s^2 = (1+p^2)\mathrm{d}x^2 + 2p \cdot q\mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y + (1+q^2)\mathrm{d}y^2.$$

10.4.1.3 球面

这里沿用 10.2.3.3 的记号. 在地球坐标下:

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\theta^2 + \cos^2\theta\mathrm{d}u^2;$$

在梅卡托坐标下:

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{sech}^2 u(\mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}v^2);$$

而在球极投影下:

$$\mathrm{d}s^2 = 4(x^2+y^2+4)^{-2}(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2).$$

还请参见 11.2.2 的负曲率的类似情形.

10.4.1.4 旋转曲面

对于 $z = f(\sqrt{x^2+y^2})$, 我们得到

$$\mathrm{d}s^2 = (1+f'^2)\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}v^2.$$

做替换 $\mathrm{d}u = \sqrt{1+f'^2}\mathrm{d}r$, 则有

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}u^2 + \varphi(u)\mathrm{d}v^2,$$

再做新的替换 $\varphi(u)\mathrm{d}u_1 = \mathrm{d}u$ 便得

$$\mathrm{d}s^2 = F(u_1)(\mathrm{d}u_1^2 + \mathrm{d}v^2).$$

对于悬链面相应地有: $\mathrm{d}s^2 = \cosh^2 v(\mathrm{d}v^2 + \mathrm{d}u^2)$, 如果令 $w = \sinh v$, 又有

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}w^2 + (1+w^2)\mathrm{d}v^2.$$

对于贝尔特拉米曲面:

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}u^2 + \mathrm{e}^{2u}\mathrm{d}v^2.$$

10.4.1.5 恩尼珀曲面

我们求得 $\mathrm{d}s^2 = (1+u^2+v^2)(\mathrm{d}u^2+\mathrm{d}v^2)$, 从而具有一般形式 $\mathrm{d}s^2 = C(u,v)(\mathrm{d}u^2+\mathrm{d}v^2)$.

10.4.1.6 椭球面

沿用 10.2.2.3 的参数表示, 我们有

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{u-v}{4}\left(\frac{u\mathrm{d}u^2}{(a-u)(b-u)(c-u)} - \frac{v\mathrm{d}v^2}{(a-v)(b-v)(c-v)}\right).$$

通过积分

$$\mathrm{d}\alpha = \frac{\sqrt{u}\mathrm{d}u}{\sqrt{(a-u)(b-u)(c-u)}}, \quad \mathrm{d}\beta = \frac{\sqrt{-v}\mathrm{d}v}{\sqrt{(a-v)(b-v)(c-v)}}$$

定义 α 和 β, 就得到

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{u-v}{4}(\mathrm{d}\alpha^2 + \mathrm{d}\beta^2).$$

10.4.1.7 直纹面

首先取 10.2.2.10 的方螺纹螺旋面这个具体的例子: $\tan z = y/x$, 参数表示为 $(\theta, r) = (r\cos\theta, r\sin\theta, \theta)$: $\mathrm{d}s^2 = (1+r^2)\mathrm{d}\theta^2 + \mathrm{d}r^2$. 令人惊讶的是我们发现方螺纹螺旋面跟悬链面 (参见 10.4.1.4) (至少局部地) 是等距的. 但是它们在 $\mathbf{R}^3$ 中的形状是不同的, $\mathbf{R}^3$ 中没有任何等距变换把一个变换为另一个. 这就解释了为什么需要区分一个曲面的两个基本形式, 及其内蕴几何和外在几何, 正是高斯首先明确地认识到这个事实. 后面还将碰到许多内蕴等距的例子: 下一小节的可展曲面, 尤其是 10.2.3.6, 10.5.3.10 和 11.14.

再看任意直纹面. 在 10.2.3.7 的第一种类型, 即 $(m'|\xi) = 0$, 我们有

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}v^2 + (v^2 + 2v(m'|\xi') + \|m'\|^2)\mathrm{d}u^2.$$

在第二种类型, 与腰线 (即 $(m'|\xi')=0$) 关联, 则有

$$\mathrm{d}\,s^2=\mathrm{d}\,v^2+2(m'|\xi)\mathrm{d}\,u\cdot\mathrm{d}\,v+(v^2+\|m'\|^2)\mathrm{d}\,u^2.$$

10.4.1.8 可展曲面

我们考虑 $\mathbf{R}^3$ 的一条曲线 C 的可展曲面,即 (参见 10.2.3.9) 由 C 的切线形成的曲面. 按照那里的写法, 可以使得 $\|m'\|=1$, 并且 $\xi=m'$, 然而由此得到的 $\mathrm{d}\,s^2$ 我们并不中意. 必须做的是在曲面上无滑动地滚动 C 的密切平面, 即把这个曲面看作 10.2.3.10 中的完全简单地关联到 C 的切线的槽形曲面, 而 C 是固定在所考虑的 (密切) 平面上. 于是如果如所指出的那样进行无滑动地滚动, 就会发现对于使得 C 的切线为这个平面上的固定直线的坐标 α,β:

$$\mathrm{d}\,s^2=\mathrm{d}\,\alpha^2+\mathrm{d}\,\beta^2.$$

作为 C 的弧长 s 和 v 的函数的 α 和 β 的明晰的计算公式, 通过 8.5.7 中的积分而得到. 这就是说构造平面曲线, 它在该平面上跟在空间中的脊线有同样的作为弧长函数的曲率 ρ. 注意到这时就有 $\mathrm{d}\,s^2=(\mathrm{d}\,v+\mathrm{d}\,u)^2+v^2\rho^2(u)\mathrm{d}\,u^2$, 这就直接证明了关联于有同一个函数 ρ 的 C 的两个可展曲面是等距的. 可以从曲面上的任何曲线出发并且使用 ρ 作为它的测地曲率进行这种构造.

表达式 $\mathrm{d}\,s^2=\mathrm{d}\,\alpha^2+\mathrm{d}\,\beta^2$ 令人惊讶的地方在于我们的曲面*等距于欧几里得平面* (不言而喻, 仅仅是局部的). 在圆锥面和圆柱面母线的情形, 它们分别对应于 C 是过一个固定点或过一个固定的 "无穷远" 点的母线, 相应的计算是平凡的. 基本的问题是: 局部等距的这个性质刻画了上面定义的可展曲面的特征吗? 参见在 10.6.6.2 和 11.12 的回答.

10.4.2 不同类型的坐标

我们给业已碰到的特殊的 $\mathrm{d}\,s^2$ 以 (经典的) 名称. 如果

$$F=0:\mathrm{d}\,s^2=E(u,v)\mathrm{d}\,u^2+G(u,v)\mathrm{d}\,v^2,$$

则坐标称为*正交的*. 进而如果 $E=G=C(u,v)$: $\mathrm{d}\,s^2=C(u,v)(\mathrm{d}\,u^2+\mathrm{d}\,v^2)$, 坐标称为*等温的或保形的*;形容词 "保形的" 解释如下: 曲面上在一个给定点的两条切线之间的夹角等于 (u,v) 的欧几里得平面上的对应的夹角. 比如在地图 (特别是航海图) 上就试图实现这个目标, 以便领航员能够掌握固定的航向 (在一段时间内). 有关这个主题, 参见 [40], 18.1.7 和 18.1.8.

如果 $E=1$ 且 $F=0:\mathrm{d}\,s^2=\mathrm{d}\,u^2+C(u,v)\mathrm{d}\,v^2$, 则坐标称为*测地的* (或高斯的); 关于这个称呼的解释, 参见 10.5.1. 如果有形式 : $\mathrm{d}\,s^2=(A(u)+B(v))(C(u)\mathrm{d}\,u^2+D(v)\mathrm{d}\,v^2)$; 则坐标称为*刘维尔的*; 上面 10.4.1.6 中的椭球面是它的一个特殊情形. 最后, 如果 $E=G=1$, 则坐标称为*切比雪夫的*. 它对应这样的情形: 我们要使一块织物变形, 以便能够把一个曲面穿在身上, 但是织物的纱 (这里是坐标线) 的长度应当

保持不变. 正交坐标总是存在的, 等温 (保形) 坐标也总是存在的, 不过难以证明, 特别是在非实解析的情形: 比如参见 [64], 补遗. 测地坐标总是存在的, 参见 10.4.8. 反之, 刘维尔坐标仅对于某些曲面存在, 其特征刻画参见 [38], 16 页. 最后, 还会遇到这样的坐标: $EG = 1$ 且 $F = 0$, 因为它保持面积, 在制图学中会用到.

10.4.3 局部曲面的度量

在 10.4 节的末尾所发展的概念对于抽象的和任意维数的黎曼流形照样有意义, 并且定义也是同样的. 但是在 2 维情形的黎曼几何却比高维简单得多. 自然, 这是由于涉及的事情较少, 比如像在平行移动中那样 (10.4.8 的注 3). 而本质的区别是: 在 2 维, 基本不变量是一个数值函数, 即高斯曲率 K: 参见 10.5. 而在更高的维数, 基本不变量是曲率张量, 这是一个十分复杂的 4- 线性形式 (既便如此, 它仍然是不无遗漏的). 从曲面的黎曼几何过渡到高维的黎曼几何, 无论是技术的难度, 还是课题的深度, 都是一个巨大飞跃.

我们处于 $\mathbf{R}^3$ 的一个曲面 V 上, 但是尽可能把它看作是仅仅是一个 2 维黎曼流形. 设 $([a,b],f)$ 是 V 的一条曲线; 它的长度是

$$\operatorname{long}(f) = \int_a^b \|f'(t)\| \,\mathrm{d}t.$$

它仅依赖第一基本形式. 连结两个点 $v, w \in V$ 的 V 上的曲线的长度的下确界称为*这两个点的距离*:

$$d(v,w) = \inf\{\operatorname{long}(f) : f \text{ 是 } V \text{ 的曲线, 使得 } f(a) = v, f(b) = w\}.$$

这样就得到了 V 的*内蕴度量*; 除非 V 是平面的一块, 它不会跟 $\mathbf{R}^3$ 中的距离 (即在拓扑意义下的诱导距离) 一致. 仅有平凡的不等式 $d_{\mathbf{R}^3}(v,w) \leqslant d(v,w) = d_V(v,w)$. 这个距离使 V 成为度量空间结构, 其前两个公理是显然的; $d(v,w) = 0$ 蕴涵 $v = w$, 这里也是显然的; 但是对于 2 维抽象黎曼流形, 将在 10.4.8 证明这个事实.

10.4.4 自然会提出的问题

跟在所有的度量空间一样, 人们希望

(i) 明晰计算 $d(v,w)$;

(ii) 了解是否存在一条从 v 到 w 的曲线, 其长度恰好是 $d(v,w)$;

(iii) 确定这些*最短路径* (如果不致引起混淆, 称之为 V 的*线段*) 或至少定性地研究它们;

(iv) 什么时候 v, w 由唯一线段连结?

在大部分情形下, 既便是看起来十分简单的情形, 这些问题必定没有明晰的解答. 比如参见 10.4.9.5 的椭球面的情形. 反之, 存在极其令人满意的定性结果; 特别地有: 充分接近的两个点总是被恰好一条线段连结 (像在欧几里得空间里一样). 这些最短路径是将在 10.4.5 定义而称为测地线 (通常其长度超过最短路径) 的曲线. 我

们将通过测地线这个媒介寻找最短路径, 而测地线本身将通过平行移动迂回地来发现 (参见 10.4.6). 测地线概念本身既饶具兴味, 又富有应用.

我们的研究让我们离开了 V, 不过这仅仅是表面的. 为了确认这个事实, 我们必须随即证明这个平行移动和相应的得到的测地线只依赖 V 的第一基本形式; 即事实上关联于 V 所提供的抽象黎曼流形. 于是它们就自动地对于等距变换是不变的. 这里我们可以注意到在 10.3.2 定义的等距概念跟度量空间的等距概念 (保持距离的映射) 是一致的, 不过这件事情并非显而易见. 参见 [107].

10.4.5 测地线

如果打算求一条画在 V 上的曲线 $C=\{f,[a,b]\}$, 使它是 V 的具有相同端点的曲线中的最短路径, 变分法指出一个必要条件 (如果仅要求一阶导数为零, 也是充分条件) 是 C 在所有点的加速度是 V 的法向量: 对于 $[a,b]$ 中的所有 t, $f''(t)\in(T_{f(t)}V)^{\perp}$. 一条这样的曲线称为 V 的*测地线*. 由于这已经蕴涵 $\|f'(t)\|$ 是常数, 我们就取它为 1.

这个结果对于我们的哲学具悲剧色彩, 因为看起来它依赖 V 的形状: 我们离开了 V, 而这原本是被禁止的! 为了证明测地线概念其实只依赖第一基本形式, 我们将推广这个概念. 请注意到期待我们的概念只依赖于 I , 是在情理之中的, 因为我们是在曲面上寻找距离的最小值, 而距离仅由 I 提供!

为了用几何方式得到测地线, 有多种方式. 一种方式是考虑两个固定在一个轴上的两个相等的小轮子; 如果让这个系统在曲面 V 上滚动, 过渡到极限就得到测地线. 这个操作事实上是内蕴的; 因为我们所做的正是, 在 V 上画两条等长的曲线, 并且有定值的距离. 一种更自然的方式是在 v 和 w 之间在 V 上尽可能地绷紧一条丝线 (这必然是内蕴的, 但在 $\mathbf{R}^3$ 内选择合适的一侧, 以便丝线停留伸展在 V 上).

10.4.6 平行移动

仍然记 V 上的一条曲线为 $C=\{f,[a,b]\}$. *设 Z 是沿 C 的切于 V 的向量场*, 如果它的速度向量保持是 V 的法向量: 对于 $[a,b]$ 内的所有 t, $Z'(t)\in(T_{f(t)}V)^{\perp}$, 则称 *$Z$ (对于 V) 是平行的*.基本结果是

定理 *给定曲线 C 和 $z\in T_{f(a)}V$, 则存在沿 C 的向量场 Z, 它是平行的, 并且 $Z(a)=z$. 它不仅是唯一的, 并且只依赖于第一基本形式. 还有, 平行移动保持标量积, 即保持第一基本形式.*

如此看来, 测地线不是别的, 正是自平行的曲线, 即对于测地线, 它们自己的速度向量沿着它自己是平行的.

10.4.7 共变导数, 测地曲率

事实上隐藏在平行移动背后的真正基础的概念是共变导数. 设 Z 是沿着曲线 C 的一个向量场. 不能在 V 上而只能在 $\mathbf{R}^3$ 里对它求导. 这引导我们定义在 V 上的一个导数: *Z 沿 C 的共变导数, 记作 $D_{f'}Z$*, 它是 Z 在 $\mathbf{R}^3$ 里的导数 $Z'(t)$ 在 $T_{f(t)}V$ 上的正交投影. 比如 V (更一般的, 一个任意黎曼流形) 的一条曲线的*测地曲率*将是 $\|D_{f'}f'\|$; 将用这个曲率取代第八章的曲率.

这个共变导数仅依赖于 I; 这是人们所期望的, 而投影到 V 的切空间, 为了停留在 V 上, 在我们的能力范围内, 该做的都做了. 解释如下: 一个黎曼度量以唯一方式使 (X,g) 上的每个向量场的配对 ξ,η 对应一个 η 对于 ξ 的共变导数 $D_\xi\eta$, 由两个公理刻画其特征: (i) 运算 D 保持标量积 g; (ii) 对于每个向量场的配对 (ξ,η) 有 $D_\xi\eta - D_\eta\xi = [\xi,\eta]$, 这里 $[\cdot,\cdot]$ 表示向量场的括号积 (参见 2.8.17 和 3.5.15). 这后一个条件代替了在 $\mathbf{R}^n$ 内的关于二阶导数的交换性的施瓦茨定理, 交换性在流形上不成立, 参见 4.2.

共变导数不变性的一个直接 (但是掩盖了事情本质) 的证明在于采用开头的定义并且指出它仅仅依赖 E, F, G. 共变导数的存在性和唯一性归结为微分方程的存在性和唯一性: 1.4.5.

重要的是要认识到有相同端点的两条曲线一般提供不同的平行移动. 这跟欧几里得平面的情形相反, 在这里, 平行移动得到的是向量的等价类 (在与所考虑的仿射空间对应的向量空间内相等的向量).

根据定义, 共变导数的通过坐标的明晰表达式涉及克里斯托费尔符号. 而后者仅用 E,F,G 的一阶导数即可完全计算出来.

从共变导数的计算公式得到一条曲线 $t \mapsto (u(t),v(t))$ 的测地曲率. 公式不算简单:

10.4.7.1 $$[Eu'^2+Gv'^2]^{-1/2}\left[\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{2\sqrt{EG}}(G'_u v' - E'_v u')\right],$$

其中的 φ 由 $\tan\varphi = \sqrt{\dfrac{G}{E}}\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}$ 定义, 并且 (读者会猜到) 我们所用的坐标是正交的, 即 $F \equiv 0$.

如果在特殊情形 $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}u^2 + C^2\mathrm{d}v^2$ 下, 并且曲线由 $v = f(u)$ 定义, 则测地曲率取值

10.4.7.2 $$[1+C^2v'^2]^{-3/2}[2C'_u v' + C^2C'_u v'^3 + C'_v v'^2 + Cv''].$$

对于这些公式, 参见 [29], 194 至 195 页或 [130], 131 页.

10.4.8 回到测地线, 局部最短路径

前面的定义表明 $D_{f'}f' = 0$, 这是测地线方程, 它是一个二阶微分方程 (不是线性的, 而是二次的, 并且是向量的). 由此得到

定理 *对于 V 的所有 v, 存在一个 $\varepsilon > 0$, 使得对于 T_vV 的所有范数为 1 的 ξ, 存在 V 的一条测地线, 其初始速度向量为 ξ, 并且至少定义在区间 $(-\varepsilon,\varepsilon)$ 上. 当 ξ 遍历 T_vV 的单位向量集时, 对应的测地线 γ_ξ 在开度量球 $B(v,\varepsilon)$ 内移动; 其中 $B(v,\varepsilon)$ 由 V 的跟 v 的距离小于 ε 的点构成. 此外, 对于所有 $\varepsilon' < \varepsilon$, γ_ξ 限制在 $[0,\varepsilon']$ 上的部分是 V 的唯一连结其两个端点的最短路径.*

注 1 对于等距于 $\mathbf{R}^2$ 的 2 维黎曼流形, 测地线对应于直线 (例如对于可展曲面).

注 2　一般情况下, 一条测地线不能定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上, 例如对于 $\mathbf{R}^2$ 的开圆盘 $B(0,1)$. 此外, 一条测地线, 如果延拓它太远, 一般不再是最短路径, 参见 11.1.

注 3　如果知道了测地线, 也就知道了平行移动 (这特别是针对 2 维黎曼流形的) 和共变导数. 事实上, 沿着一条测地线, 一个向量将由其长度和它跟速度向量的夹角以及根据连续性保持一个定向来确定. 于是一个正交于速度向量的单位向量将是一个平行场. 而共变导数将是 Z 在这样得到的正交坐标系里的普通导数.

注 4　上面的定理表明在所有情形下, V 的曲面拓扑和度量空间的拓扑一致.

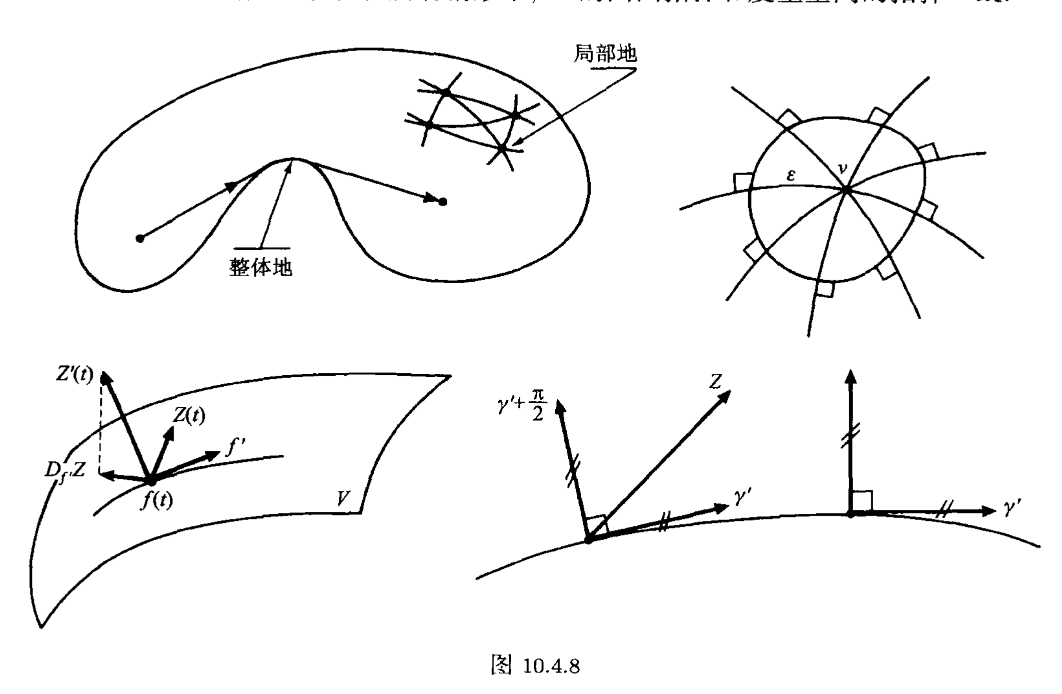


图 10.4.8

10.4.9　一些曲面的测地线的确定

10.4.9.1　球面

以常速率沿 S^2 的大圆行进, 加速度通过中心, 即是 S^2 的法向量, 故大圆是 S^2 的测地线, 根据 10.4.8 的唯一性, 没有其他的测地线. 此外, 我们有 10.4.4 的问题的完整答案. $v, w \in S^2$ 之间的距离是在 0 和 π 之间的由 $\cos(d(v,w)) = (v|w)$ 定义的实数 $d(v,w)$. S^2 的两个点用唯一的最短路径连结, 仅有的例外是对径点 $v, -v$.

10.4.9.2　柱面, 锥面和可展曲面

由于这些曲面等距于欧几里得平面, 它们的测地线是直线 (不过是相对于 V 上的适当坐标, 理所当然地一般并不是 $\mathbf{R}^3$ 中的直线). 但是为了求得最短路径要注意整体状态, 比方想一想旋转柱面和不同于平面的旋转锥面的情况. 再看看一个去掉顶点由在此点形成总角超过 2π 的直线族形成的锥面, 它的两个点将总是由唯一的一个线段连结.

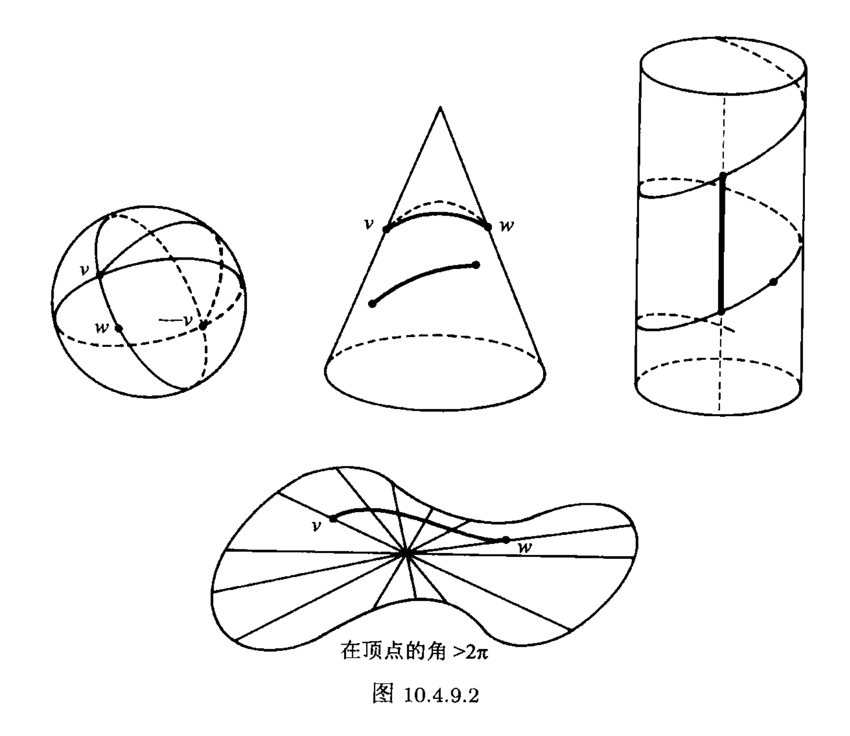


图 10.4.9.2

10.4.9.3 旋转曲面

如果把 $\mathrm{d}s^2$ 写成形式 $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}u^2 + a^2(u)\mathrm{d}\theta^2$, 那么沿着一条测地线量 $a^2(u(t))\dfrac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t}$ 保持常值 ("首次积分" 概念). 理由是简单的: 测地线的法线应该是曲面的法线, 而对于旋转曲面, 法线与 z 轴相交. 即在 x, y 平面的投影曲线是一条其加速度通过原点的曲线; 上面的常值在力学的 "向心加速度运动" 里是经典的. 这样仅由积分法就可以得到测地线的方程.

定性的状态是容易描述的: V 的测地线在 V 的两条纬线之间摆动, 这两条纬线投影在 x, y 平面的同一个圆周上. 在测地线当中, 要添加经线和 "赤道", 即这样的纬线, 在其上各点, 经线的切线是竖直的.

指出一个出人意料的事实: 存在球面以外的其他曲面, 尤其是旋转曲面, 对于它们, 所有的测地线都是周期的; 它们的 $\mathrm{d}s^2$ 靠上面的公式进行研究. 参见 11.10 节.

10.4.9.4 在使得 $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}u^2 + J^2(u,v)\mathrm{d}v^2$ 的曲面里的测地线

根据 10.4.7.2 这种曲面的测地线用 $(u, v(u))$ 表示的方程由关系

$$2\frac{\partial J}{\partial u}(v' + J^2 v'^3) + \frac{\partial J}{\partial v}v'^2 + Jv'' = 0$$

给出 (参见 [29], 195 页).

10.4.9.5 椭球面的测地线

对于椭球面 E: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} - 1 = 0$, 上面 10.4.1.6 给出的特殊的刘维尔类型的

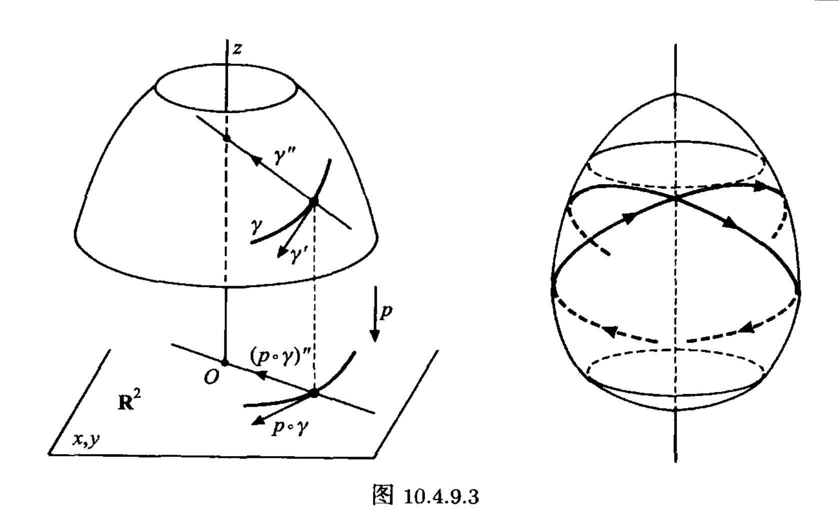


图 10.4.9.3

坐标 (参见 10.4.2) 使得可以仅通过积分来求 E 的所有测地线 (对于一般曲面这是办不到的, 不能用分解的方法积分一个二阶二次方程). 我们发现沿着测地线有关系式 (它代替了 10.4.9.3 的克莱罗的关系式)

$$\sqrt{\frac{(a-u)(b-u)(c-u)}{k-u}}u' \pm \sqrt{\frac{(a-v)(b-v)(c-v)}{k-v}}v' = 0 \ (k \text{ 是常数}).$$

由此得到 E 的测地线的下列定性形态. 对于 10.2.2.3 的共焦二次曲面族的每个单叶双曲面 H 对应测地线的单参数族; 这些测地线在 E 和 H 的相交曲线 (将会知道它们是 E 的曲率线: 10.6.8.3) 之间摆动. 几何上它们由下列条件定义: 它们的切线 (除自然切于 E 外) 切于 H. 这就形成了一个双参数的直线族. 一般情况下, 这样的直线族未必形成一个曲面的法线的集合, 参见 3.5.15.5. 但是在当前情况下, 存在一个这样的平行曲面族; 在 [37], 310 页会发现怎样明晰地计算它们.

在 10.2.3.12 提到的 H 退化为双曲线 $\dfrac{x^2}{a-b} - \dfrac{z^2}{b-c} - 1 = 0$ 的情形, 此双曲线交 E 于四个脐点 (参见 10.6.4). 那么从一个脐点引出的所有测地线总是通过 "对径" 脐点. 对于椭球面的测地线, 除前面介绍的之外, 还可以参考 [38], 14 页, [41], 263 页至 264 页, [43], 302 页和 ii, [44] 和 [92] 的 447 页前后.

10.4.9.6 测地映射

我们注意到, 两个 2 维黎曼流形可以不是等距的, 却存在从一个到另一个的微分同胚, 保持测地线. 例如, 根据 10.4.9.1, 一个球面的从其中心到任意平面的投影就是这样的微分同胚.

注 贝尔特拉米定理表明, 反之, 所有可以测地的映射到欧几里得平面上的曲面是常曲率的曲面, 从而是一个球面或一个双曲平面: [41], 296 页, 或 [64], 26 页. 更一般地, 设 $\mathrm{d}s^2$ 跟一个与之不等距的 $\mathrm{d}s^2$ 有同样的测地线, 我们知道如何刻画这样的 $\mathrm{d}s^2$ 的特征: 这恰好是刘维尔坐标下的 $\mathrm{d}s^2$: 参见 [38], 51 页. 特别地, $\mathrm{d}s^2$ 通常不存

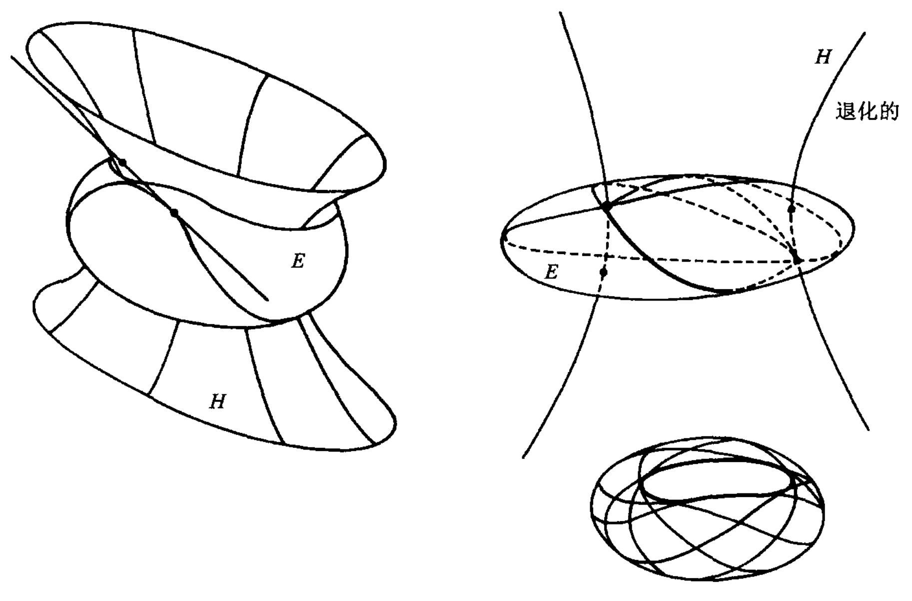


图 10.4.9.5

根据 H. Knörre, *Geodesics on the Ellipsoïd*, Inventiones mathematicae,Springer Verlag

在保持测地线却不等距的映射.

最后还要提及的是, 这类所考虑的问题是称为"射影微分几何"的领域的特殊情形; 参见 [142], [143], [144] 和 [145], 131 页.

10.5 高斯曲率

10.5.1 规范坐标, 测地极坐标

取原点为 (0,0) 的参数表示, 要求从原点出发的测地线的参数表示是直线 ("规范坐标"). 那么 $\mathrm{d}s^2$ 的有限展开必然有形式

10.5.1.1
$$g=\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+K(x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x)^2+o(x^2+y^2).$$

其中 K 是由我们的 $\mathrm{d}s^2$ 和点 $v=(0,0)$ 确定的一个实数. 在测地极坐标下: $x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta$, 则有 $\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}r^2+J^2(r,\theta)\mathrm{d}\theta^2$. 特别得到

10.5.1.2
$$K=-\frac{\partial^2 J}{\partial r^2}(0,0)/J(0,0)\quad (\text{取极限!}).$$

这样就在所有曲面上, 或 2 维黎曼流形上, 得到一个数值函数 $K:V\to\mathbf{R}$, 称为高斯曲率 (或总曲率, 参见 10.6.2). 特别的结论是 K 对于黎曼等距映射是不变的.

正如我们所知道的, 对于欧几里得平面 $K\equiv 0$, 那么 $K\neq 0$ 的曲面决不会等距于此平面. 不变量 K 是基本的, 公式 10.5.1.1 表明它测量了曲面或 $I=g=\mathrm{d}s^2$ 与

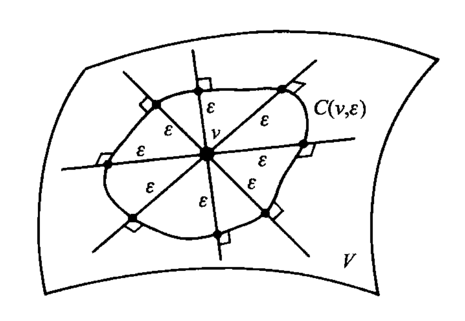
欧几里得平面的偏离. V 上的居民可以如此计算 K: 根据经验知道最短路径, 他能够画出以 v 为中心以 ε 为半径的度量圆周 $C(v,\varepsilon)$, 然后计算它的长度

10.5.1.3 $$\operatorname{long}(C(v,\varepsilon)) = 2\pi\varepsilon\left(1-\frac{K(v)}{6}\varepsilon^3+o(\varepsilon^3)\right) \text{(皮瑟公式)}.$$

读者将会找到属于狄奎的对于圆盘 $B(v,\varepsilon)$ 的面积的类似公式.

10.5.2 有常高斯曲率的曲面

下面的图 10.5.2 表明球面 S^2 的高斯曲率取常数值 1; 更一般地, 一个半径为 R 的球面的高斯曲率为 $1/R^2$:



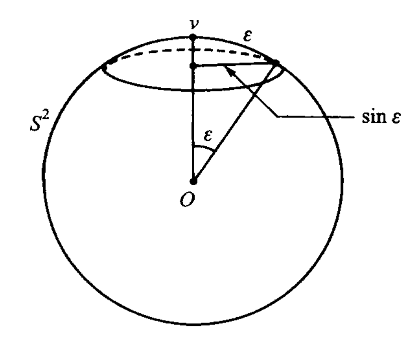


图 10.5.2

高斯曲率为常数 K 的 2 维黎曼流形将在后面起重要作用. 我们已经了解了常高斯曲率为零和为正数的情形. 对于负的情形, 下面的公式 10.5.3.3 表明只需取

$$\mathrm{d}\,s^2 = \mathrm{d}\,r^2 + \frac{\sinh^2(\sqrt{-k}r)}{\sqrt{-k}}\mathrm{d}\,\theta^2,$$

这跟对于平面 $\mathrm{d}\,s^2 = \mathrm{d}\,r^2 + r^2\mathrm{d}\,\theta^2$ 和对于球面 $\mathrm{d}\,s^2 = \mathrm{d}\,r^2 + \sin^2 r\ \mathrm{d}\,\theta^2$ 的公式形成对照.

另外, 公式 10.5.3.3 还告诉我们, K 恒等于同一个常数的所有 $\mathrm{d}\,s^2$ 彼此局部等距. 对于整体情形, 参见 11.2.1. 对于在 $\mathbf{R}^3$ 中的实际的有常高斯曲率的曲面, 参见下面的 10.5.3.10 和 11.15.

10.5.3 不同情况下计算 K 的公式

10.5.3.1 一般浸入

保留 10.4.1.1 的记号, 并且引进 $\mathbf{R}^3$ 中的混合积

$$D=\left(\frac{\partial^2F}{\partial u^2},\frac{\partial F}{\partial u},\frac{\partial F}{\partial v}\right),\quad D'=\left(\frac{\partial^2F}{\partial u\partial v},\frac{\partial F}{\partial u},\frac{\partial F}{\partial v}\right),\quad D''=\left(\frac{\partial^2F}{\partial v^2},\frac{\partial F}{\partial u},\frac{\partial F}{\partial v}\right),$$

则有 $K=\dfrac{DD''-D'^2}{(EG-F^2)^2}$.

10.5.3.2 高斯公式 (高斯奇妙定理)

虽然前面 K 的定义 (参见 10.5.1.1) 表明 K 仅依赖 E, F, G, 高斯还是通过繁重的计算确信了可以由 E, F, G 明晰地表示. 具体地说来, 从 10.5.3.1 出发, 高斯得到公式

$$\begin{aligned}4(EG-F^2)^2K = & E(E_vG_v - 2F_uG_v + G_u^2) + G(E_uG_u - 2E_uF_v + E_v^2) \\ & +F(E_uG_v - E_vG_u - 2E_vF_v + 4F_uF_v - 2F_uG_u) \\ & -2(EG-F^2)(E_{vv} - 2F_{uv} + G_{uu}),\end{aligned}$$

其中的下标表示关于这个指标求偏导数.

10.5.3.3 测地坐标

如果 $\mathrm{d}\,s^2 = \mathrm{d}\,u^2 + J^2(u,v)\mathrm{d}\,v^2$, 则

$$K = -\frac{\partial^2 J}{\partial u^2}/J.$$

还请参见 11.5.1.

10.5.3.4 图像

如果 $z = f(x,y)$, 沿用 10.4.1.2 的记号 p, q 和 4.2.20 的记号 r, s, t, 则有

$$K = \frac{rt - s^2}{(1+p^2+q^2)^2}.$$

10.5.3.5 恩尼珀曲面

$$K = -\frac{4}{(1+u^2+v^2)^2}.$$

10.5.3.6 直纹面

利用 10.2.3.7 的分布参数 λ, 则有

10.5.3.7
$$K = -\frac{\lambda^2}{(\lambda^2+v^2)^2}.$$

这就证明了一个直纹面的高斯曲率总是严格负的, 除非 $\lambda = 0$, 这时沿着对应的母线高斯曲率是零. 特别地, 对于一个可展曲面, K 恒等于零; 这个结果结合 10.5.2, 重新证明了 10.4.1.8.

10.5.3.8 椭球面

对于 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$, 我们有十分漂亮的公式 $K = \frac{p^4}{a^2b^2c^2}$, 其中 p 表示从原点到所考虑的点的切平面的距离.

10.5.3.9 隐式方程 $V = F^{-1}(0)$ 定义的曲面

我们引进依赖 λ 的矩阵 (其中 I 表示单位矩阵), 下标表示对于坐标求偏导数:

$$M(\lambda) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ F_{ij} - \lambda I \\ \\ \end{pmatrix} & \begin{matrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{matrix} \\ F_1 \quad F_2 \quad F_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

对于 $M(\lambda)$ 的行列式, 我们有

$$\det(M(\lambda)) = a + b\lambda + c\lambda^2.$$

利用这些记号则有

$$K = \frac{1}{F_1^2 + F_2^2 + F_3^2} \cdot \frac{a}{c}.$$

10.5.3.10 旋转曲面

它们的第一基本形式的形式是 $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}u^2 + J^2(u)\mathrm{d}v^2$. 于是根据 10.5.3.3, J, 随之 K 不依赖 v, 即仅依赖纬度. 这是意料之中的, 因为 K 是等距变换下不变的, 而旋转正是 $\mathbf{R}^3$ 的一个等距变换, 当然是 V 的 $\mathrm{d}s^2$ 的一个等距变换.

这就说明, 比如通过积分一个 (2 阶) 常微分方程, 可以求所有这样的旋转曲面, 其高斯曲率是给定的纬度的函数. 对于非零常高斯曲率的情形这样做; 而对于零常高斯曲率, 由于 J 应该是线性的, 直接得到旋转锥面和旋转柱面.

对于 $K \equiv 1$ 的情形, 我们求得由参数方程:

$$u \mapsto \left(a\cos u, \int_0^u \sqrt{1 - a^2\sin^2 t}\,\mathrm{d}t\right)$$

给定的经线的一个单参数族. 这样就有三种类型的图, 分别对应于 a 小于, 等于 (球面情形) 或大于 1.

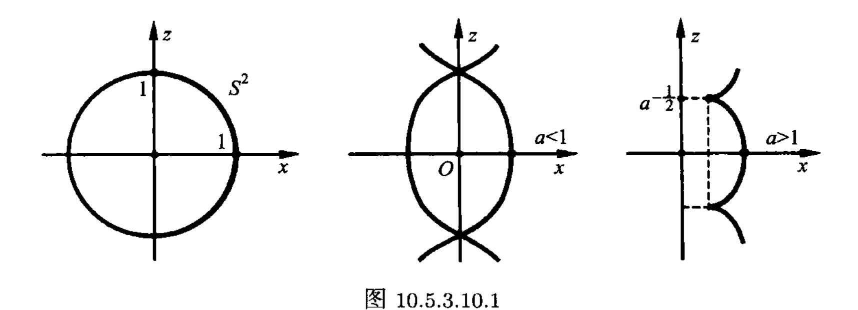


图 10.5.3.10.1

对于 $K = -1$, 也有三种类型 (其中两种依赖参数 a),它们是

$$u \mapsto \left(\mathrm{e}^u, \int_0^u \sqrt{1 - \mathrm{e}^{2t}}\mathrm{d}t\right) \quad (10.2.3.5 \text{ 的贝尔特拉米曲面}),$$

$$u \mapsto \left(a\cosh u, \int_0^u \sqrt{1 - a^2\sinh^2 t}\mathrm{d}t\right),$$

$$u \mapsto \left(a\sinh u, \int_0^u \sqrt{1 - a^2\cosh^2 t}\mathrm{d}t\right).$$

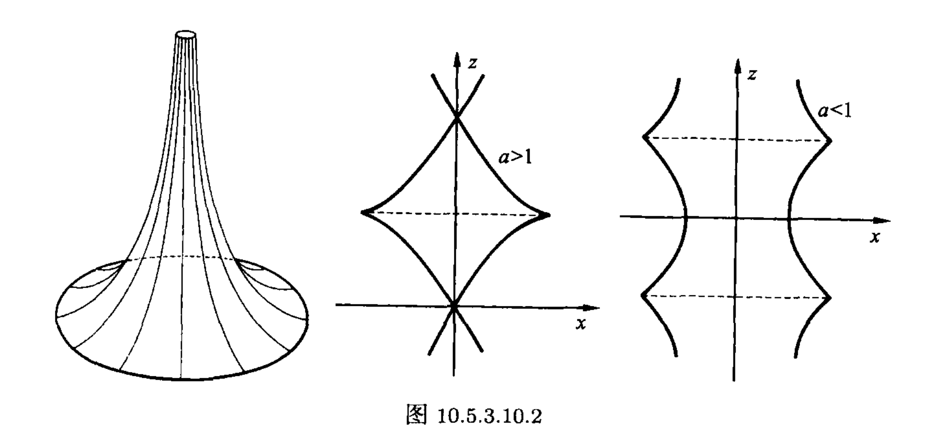


图 10.5.3.10.2

10.5.4 在多大程度上高斯曲率确定度量

在 10.4.1.7, 我们曾经看到两个不同的曲面却具有同一个内蕴度量. 那里的情形向我们指出了曲面的带一个非平凡的参数的等距的形变. 这使我们坚信第一基本形式根本确定不了曲面的形状 (不计在 $\mathbf{R}^3$ 的位移). 但是 K 度量一个曲面与欧几里得平面的偏离这个事实, 以及所有 K 为常值的曲面都等距的事实, 可能让我们猜想 K *确定* 2 维黎曼流形.

根本不是这样. 只需用一个微分同胚修改其 K 变动的 $\mathrm{d}s^2$, 保持 K 为常值的曲线 (K 的水平线). 这样就容易得到种种 $\mathrm{d}s^2$, 在它们之间存在保持 K 的微分同胚, 但它并非等距. 有关用 K 和 $\mathrm{d}s^2$ 的其他不变量刻画 $\mathrm{d}s^2$ 的特征的内容, 参见 [94].

10.5.5 高斯曲率和平行移动

10.5.5.1 我们将要揭示的精彩链条的关键环节是这样的事实: 对于测地极坐标下的 $\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}r^2+J^2(r,\theta)\mathrm{d}\theta^2$, 偏导数 $\dfrac{\partial J}{\partial r}(r,\theta)$ 表示度量圆周 $C(v,\theta)$ 的测地曲率 (其中 v 是坐标中心). 参见 11.3.3.

10.5.5.2 此外, 一个 2 维黎曼流形 (事实上, 任意的) 具有一个*典范测度* $\mathrm{d}m$. 在任意坐标卡里, 它等于 $\sqrt{EG-F^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$. 在上面的坐标里, 它等于 $\mathrm{d}m=J\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$.

10.5.5.3 设 D 是一个在我们的坐标下由一个在 $[0,2\pi]$ 上的正值函数 $r(\theta)$ 定义的区域. 我们要计算高斯曲率在 D 上的积分:

$$\mathscr{A}=\int_D K\mathrm{d}m=\int_D KJ\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta.$$

公式 10.5.3.3 表明对于 r 的积分可以完全实现:

$$\mathscr{A}=-\int_D\frac{\partial^2 J}{\partial r^2}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=-\int_0^{2\pi}\left[\frac{\partial J}{\partial r}(r(\theta))-\frac{\partial J}{\partial r}(0)\right]\mathrm{d}\theta.$$

仔细地继续这个计算 (比如利用公式 10.4.7.2) 则得

10.5.5.4 高斯 - 博内公式

设 D 是如上所述的区域, 此外假设边界 $C=\partial D$ 仅是分段可微的. 设 ρ 是这个边界的测地曲率, 它是对应 D 的外法向量的一个实数. 则

$$\mathscr{A}=\int_D K\mathrm{d}\,m=2\pi-\sum_{i=1}^{n}\beta_i-\int_C \rho\mathrm{d}\,s,$$

其中 $\mathrm{d}s$ 是沿着 C 的弧长微分, 而 β_i 是 C 的在其 n 个角点中的第 i 个角点处的外角.

注 这个公式的更具活力的证明需要在由 V 的单位切向量的集合 UV 构成的 3 维流形 (单位丛) 的框架内, 并且证明 2- 外微分形式 $K\cdot\mathrm{d}\,m$ (它给流形定向) 通过在 V 上的投影的逆拉回像是 UV 上的 1- 外微分形式, 它表示测地曲率. 那么高斯 - 博内公式就是斯托克斯定理的版本. 参见 [11], 284 页或 [63] 的末尾.

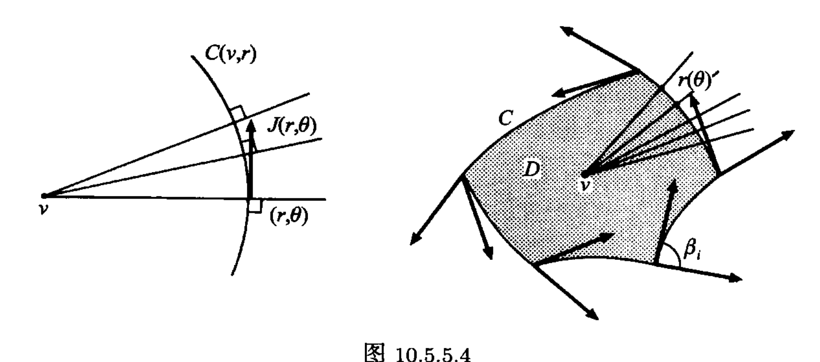


图 10.5.5.4

10.5.5.5 应用

最引人入胜的一个情形是区域 D 是一个测地三角形 (假定它总是含于一个测地坐标的区域内). 用 $\mathcal{T}$ 表示这个三角形, 而现在 A,B,C 是它的内角, 则

$$\int_D K\mathrm{d}\,m=A+B+C-\pi.$$

比如, 在球面 S^2 上, 我们重新发现阿尔贝特 · 吉拉尔公式: $\mathrm{Aire}(\mathcal{T})=\alpha+\beta+\gamma-\pi$ (参见 [40], 18.3.8.4). 对于欧几里得平面: 一个三角形的内角和等于 π. 在贝尔特拉米曲面上 (在其上 $K\equiv-1$), 将有 $\int_D K\mathrm{d}\,m=\pi-\alpha-\beta-\gamma$: 这个特殊情形的一个证明在 6.10.6 给出, 还可以参见 11.2.2.

10.5.5.6 大地测量学, 勒让德, 高斯和达布

公式 10.5.5.4 在大地测量学是基本的, 在这门学问里, 人们希望知道土地的形状, 并且据此绘制地图. 设 $\mathcal{T}$ 是一个曲面上的测地三角形, A,B,C 是它的三个内角, m,n,p 是它的顶点, 而 a,b,c 是它在曲面上的边. 欧几里得平面上以 a,b,c 为边长的三角形的内角记作 A^*,B^*,C^*. 问题是 (近似地) 求差 $A-A^*,B-B^*,C-C^*$ 的值: 勒让德得到结果:

10.5.5.7 $$A-A^*=B-B^*=C-C^*=\frac{\mathrm{Aire}\,(\mathcal{T})}{3}\cdot K+o(a^2+b^2+c^2).$$

这里 K 是看作球面的地球的高斯曲率. 事实上, 这个公式对于所有曲面带所指出的阶都是有效的, 其中 K 表示在三角形的任意一点的高斯曲率.

于是大地测量的校正不依赖顶点, 从而在所考虑的阶的限度内, 对于我们所关心的检测地球高斯曲率的变化是无能为力. 高斯经过非常细致的计算, 成功发现带下列阶的公式:

$$A - A^* = \mathrm{Aire}\,(\mathcal{T}) \left[\frac{2K(m) + K(n) + K(p)}{12}\right] + o(a^3 + b^3 + c^3).$$

关于曲面的几何著作鲜有给出这个公式的. 我们在达布的 [38] 的 168 页至 176 页会找到一个更完备甚至更高阶的公式. 数学大地测量学的一个非常详尽的陈述见于 [116], 它是关于椭圆函数的, 而正是这类函数用于旋转椭球面的测地线. 对于历史评论, 参见 [46], 对于公式 10.5.5.7 在近代几何中的应用和推广, 参见 [47].

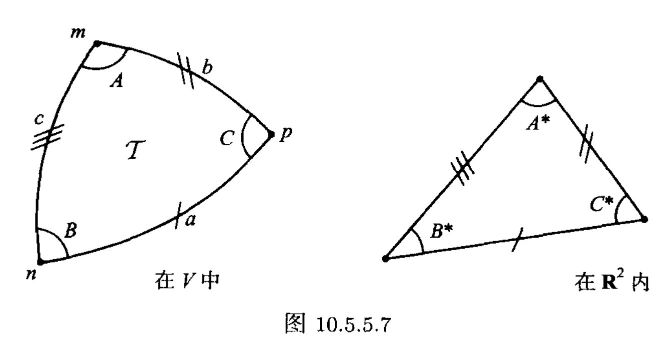


图 10.5.5.7

10.6 第二基本形式以及通过它计算的量

第二基本形式用以定量的研究曲面 V 在一个所考虑的点的邻域内的形状, 而在 4.2.20 仅是定性的研究. 它测量 V 的*平面性的偏离*; 这是因为如果 $I\!I$ 恒等于零, 则 V 是一个平面, 反之亦真. 它还用来计算画在曲面上的曲线的 (第八章意义下的) 曲率. 每次在实际中遇到一个曲面, 它总会以本质的方式介入: 光学里 (曲面的焦散面, 参见 [138], [139], [140], [141]), 流体静力学里的船壳 (*定倾中心*, 比如参见 [131], 卷 2, 第 XIX 章), 力学的大型槽道, 等等. 提醒一下, $I\!I$ 依赖 V 的定向, 自然只在于正负符号的差别. 最后, 正是第二基本形式告诉我们 "V 的形状", 参见 [154].

10.6.1 画在 V 上的曲线的曲率

根据 $I\!I$ 的定义我们知道, 如果画在 V 上的曲线 f 的法向量 f'' 与 V 的法向量的夹角为 θ, 则

10.6.1.1
$$f \text{ 的曲率} = \|f''\| = \cos\theta \cdot I\!I(f', f'),$$

这里的 f 以弧长作参数.

对于测地线 f 这个特殊情形, f 的曲率 $=II(f',f')$. 请注意, 转变到曲线 f 的测地曲率 ρ, 应该是 $\sin\theta \cdot II(f',f')$. 如果你具有几何情结, 就宁肯采用第八章的曲率中心的概念. 10.6.1.1 说的是, 把 V 的测地线的曲率中心垂直投影到 f 的密切平面上, 就得到 f 的曲率中心, 而该测地线在 v 跟 f 有同一条切线 (类似地引入法曲率概念).

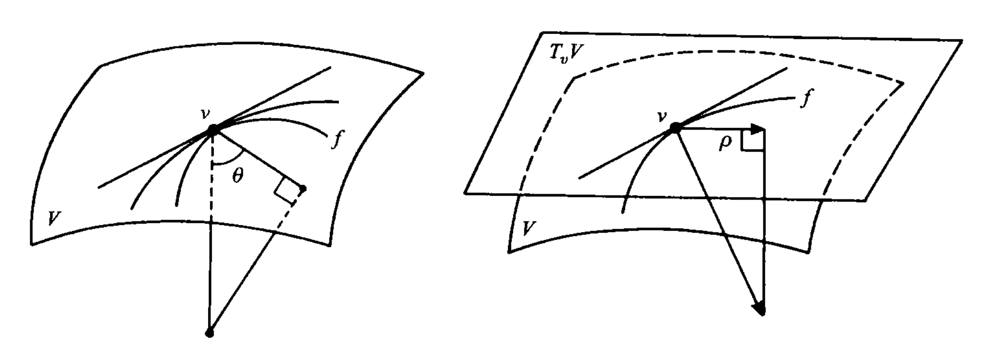


图 10.6.1

10.6.2　高斯曲率和平均曲率, 主方向

由于 I 是正定的, 把 II 关于 I 化为对角形 (比如参见 [40], 13.5) 将一无所失; 所得到的元素也是 10.3.3 的魏因加滕自同态的元素.

II 关于 I 的特征值称为 V 在所考虑的点的主曲率, 一般记作 k_1 和 k_2, 而特征方向称为主方向.出于几何的考虑, 还引进主曲率半径 $R_1 = 1/k_1, R_2 = 1/k_2$. 最后, II (对于 I) 的基本不变量是其迹和行列式; 我们使用称呼:

$$\text{高斯曲率} = k_1k_2, \quad \text{平均曲率} = H = \frac{k_1+k_2}{2}.$$

我们注意到主曲率不依赖定向, 而定向改变时, H 改变符号.

10.6.2.1　奇妙定理

高斯的令人惊愕的发现是

$$\boxed{K = k_1k_2 = \text{总曲率}}.$$

它的一个特殊推论是 I 和 II 不是独立的. 有关于此, 还可参见 10.7. 利用 10.3.3 的高斯映射可以把此式改写为

10.6.2.2
$$\boxed{\nu^*\omega = K\,\mathrm{d}m},$$

其中 ω 表示 S^2 的典范定向测度, 而 $\mathrm{d}m$ 表示 V 的定向测度, 即这里我们把 ω 和 $\mathrm{d}m$ 看作 2- (外) 微分形式. 于是如果 K 是正 (负) 的, 则高斯映射保持 (反转) V 和 S^2 之间的定向.

如果回忆起 10.5.3.2 中 K 的表达式, 就会发现当 V 变形但保持内蕴地等距于自己时, $K=k_1k_2$ 是不变的. 考虑图 10.6.2.2 所显示的多边形情形 (对于细节, 参见 [48], 141 页), 并且考虑这样的事实, 根据 10.5.5.5 的吉拉尔公式 (还可以参见 [40], 18.3.8.5) S^2 上的多边形的面积只依赖顶角的和而与边长无关, 就启发我们体会到上述的不变性.

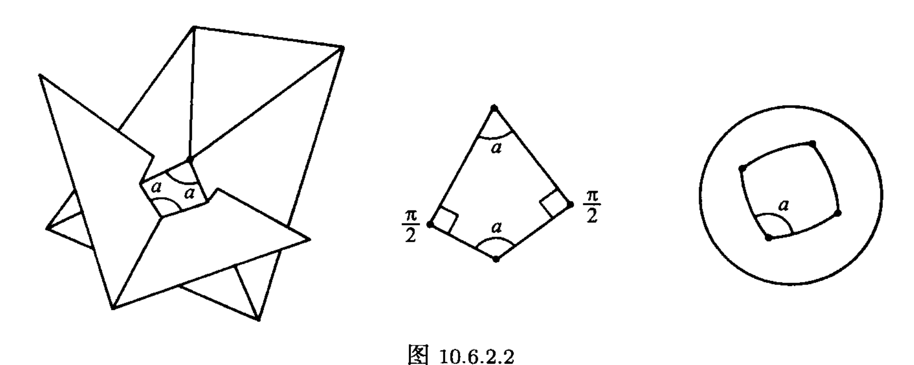


图 10.6.2.2

10.6.3 对于管形体积的应用

如果回想起 6.9.7, 就会发现那里记为 K_2 的正是 $\mathbf{R}^3$ 的一个曲面 $V=S$ 的高斯曲率 K, 这从 6.9.15 和 10.6.2.2 得到. 从公式 6.9.16 还得到: 如果 V 是一个相对紧致的曲面, 用 $TUB^\varepsilon V$ 表示夹在与 V 平行并且与 V 的距离为 ε 的两个曲面之间的空间的区域 (参见 10.2.2.12), 则其体积正是

$$\mathrm{Vol}\,(TUB^\varepsilon V)=2\varepsilon\mathrm{Vol}\,(V)+\frac{2}{3}\varepsilon^3\int_V K\cdot\mathrm{d}\,v.$$

还可参见 11.20.2.

10.6.4 密切抛物面

在 8.4.5 和 8.7.4 进行的关于平面曲线的密切圆的研究无法推广到 $\mathbf{R}^3$ 的曲面情形. 事实上, 只要 $R_1\neq R_2$, 围绕 V 的一个点 v 转动的测地线的密切圆的半径是变动的. 从而没有密切球的概念. 反之, 有自然的密切抛物面的概念, 我们可以伴随着 4.2.20 的定性研究来介绍它. 在空间 $\mathbf{R}^3$ 选择正交坐标系 x,y,z, 让它在 v 对于 V 恰到好处, 即 z 轴是 V 在 v 的法线, 而 x 和 y 轴的方向是 V 在 v 的主方向, 那么由 II 的定义本身知道抛物面

$$z=k_1x^2+k_2y^2$$

跟 V 有 3 阶接触. 如果 $K(v)>0$, 这是椭圆抛物面, 如果 $K(v)<0$, 这是双曲抛物面 (参见 10.2.12 和 4.2.20 小节的图形). 而如果 $K(v)=0$, 但是 k_i 中有一个不是零, 则是抛物柱面. 请注意, 在平面上, 密切抛物线的概念有意义, 不过还是圆周在度量上更自然. 如果两个 k_i 都是零, 即 $II(v)=0$, 则切平面与 V 有 3 阶接触. 仅此而已, 我们再无什么一般结论, 参见 4.2.22. 我们指出, 较之于在 4.2.20 的研究, 当前的是

定量的, 不过关于 V 同 T_vV 的交线, 跟 4.2.20 相反, 这里无话可说. 前面所说的归结为

定义. 设 v 是 V 的一个点.

如果 $k_1 = k_2$ (允许是零), 则说此点是脐点;

如果 $K(v) > 0$, 则说此点是椭圆点;

如果 $K(v) < 0$, 则说此点是双曲点;

如果 $K(v) = 0$, 但是 $I\!I(v) \neq 0$, 则说此点是抛物点;

如果 $I\!I(v) = 0$, 则说此点是平点.

定义和注释

除去在脐点, 主方向是正交的并且是唯一确定的. V 的渐近方向是使 $I\!I$ 为零的方向, 仅当 $K \leqslant 0$ 时存在渐近方向, 对于抛物点, 仅有一个渐近方向 (看作二重的), 对于双曲点, 有两个渐近方向. 对于平点, 所有方向都是渐近方向.

我们会料想到主方向的积分曲线 (称为 V 的曲率线) 和渐近方向的积分曲线在 V 的外在几何中扮演重要角色. 另外参见 10.6.8. 非常容易确信如果曲面的所有点都是脐点, 则它是球面或球面的一部分.

10.6.5　第二基本形式的公式

对于浸入 $(u,v) \mapsto F(u,v)$, 沿用 10.5.3.1 的记号, 立刻得到

$$I\!I = L\mathrm{d}u^2 + 2M\mathrm{d}u\mathrm{d}v + N\mathrm{d}v^2 = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}(D\mathrm{d}u^2 + 2D'\mathrm{d}u\mathrm{d}v + D''\mathrm{d}v^2)$$

(提请注意, 这里的 “ $'$ ” 和 “ $''$ ” 不表示求导数).

我们引进了字母 L, M, N, 这是因为在大多数古典著作里都采用它们. 比如用些许的二次型的代数知识立刻得到:

$$K = \frac{DD'' - D'^2}{(EG-F^2)^2} \quad 和 \quad H = \frac{1}{2}\frac{ED'' + gD - 2FD'}{(EG-F^2)^{3/2}}.$$

在 10.5.3.1 曾经用到第一个公式. 有了 K 和 H 就可以方便地计算 k_1 和 k_2.

10.6.6　在不同状况下各种量的明晰计算

10.6.6.1　图像

采用 10.5.3.4 中的记号则有

$$I\!I = \frac{r\mathrm{d}x^2 + 2s\mathrm{d}x\mathrm{d}y + t\mathrm{d}y^2}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad K = \frac{rt-s^2}{1+p^2+q^2},$$
$$H = \frac{1}{2}\frac{t(1+p^2) - 2pqs + r(1+q^2)}{(1+p^2+q^2)^{3/2}}.$$

10.6.6.2　可展曲面

我们将证明, 如果 $K \equiv 0$, 则曲面是 (局部) 可展的. 由图像的 K 的表达式, 这时总有 $rt - s^2 = 0$; 这表明 $\mathbf{R}^2$ 上的三个 1- 微分形式: $\mathrm{d}p = r\mathrm{d}x + s\mathrm{d}y, \mathrm{d}q = s\mathrm{d}x + t\mathrm{d}y$

和 $\mathrm{d}(z-px-qy)$ 成比例. 于是一般地 (根据在 5.4.11 说过的) 存在一个函数 $\alpha(x,y)$ 和三个一元函数 P,Q,H, 使得

$$p=P\circ\alpha,\quad q=Q\circ\alpha,\quad z-px-qy=H\circ\alpha.$$

这就恰好说明曲面 V 是其切平面 $z=P\cdot x+Q\cdot y+H$ 的包络. 对于一般情形, 参见 11.12.

10.6.6.3 恩尼珀曲面

我们求得

$$II=2(\mathrm{d}u^2-\mathrm{d}v^2), R_1=-R_2=\frac{1}{2}(u^2+v^2+1)^2, H=0.$$

于是我们的曲面的平均曲率总是零. 在 10.6.9.2 将称这样的曲面为极小曲面. 请你验证方螺纹的螺旋面和 10.2.3.6 的公式给出极小曲面.

10.6.6.4 隐式曲面 $F^{-1}(0)$

首先知道了 K 和 H, 随后就会得到 k_1 和 k_2. 沿用 10.5.3.9 的记号, 则有

$$H=-\frac{1}{2\sqrt{F_1^2+F_2^2+F_3^2}}\cdot\frac{b}{c}.$$

如果还想知道主方向, 比如可以取渐近方向的分角线, 而渐近方向由方程组

$$\sum_i a_iF_i=0\quad 和\quad \sum_{i,j}a_ia_jF_{ij}=0$$

确定 (参见 [65], 204 页至 205 页).

10.6.6.5 直纹面

沿用 10.4.1.7 的记号, 我们求得

$$II=\frac{1}{\sqrt{\lambda^2+v^2}}([\lambda(m''|\xi')+v(m'',\xi',\xi)]\mathrm{d}u^2+2\lambda\mathrm{d}u\mathrm{d}v),$$

通过 10.6.5 得到 10.5.3.6. 由此得到直纹面中唯一的极小曲面是带方螺纹的螺旋面.

10.6.6.6 旋转曲面

利用经线的参数方程 $u\mapsto(h(u)=x,k(u)=z)$, 前面的公式让我们能够进行所有的计算. 不过这里我们用几何方式进行计算. 首先, 出于对称考虑, 主方向由经线和纬线的切线给定. 公式 10.6.1.1 表明一个曲率半径等于

$$R_1=\frac{r}{\sin\theta},$$

其中 r 是我们所考虑的点的半径, 即该点到旋转轴的距离. 由于我们知道经线是测地线, 另一个曲率半径 R_2 是所考虑的点的经线作为平面曲线的曲率半径, 参见 8.4.15.

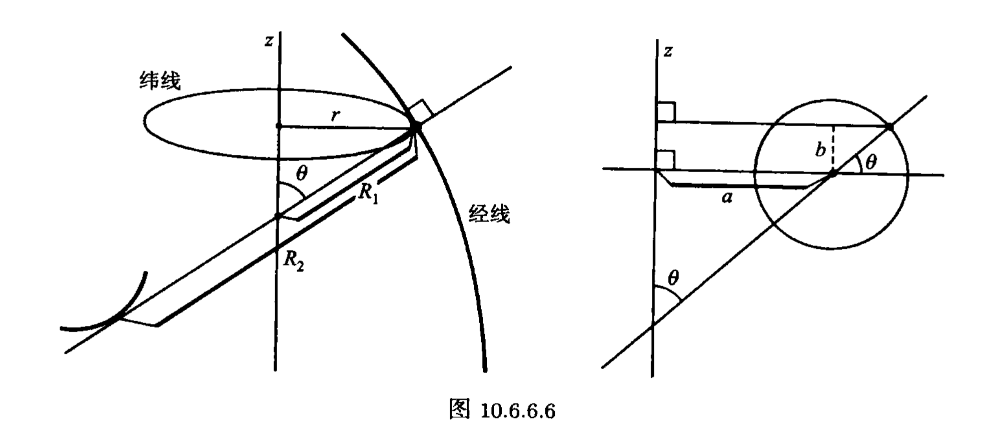


图 10.6.6.6

探讨四个例子

10.6.6.6.1　由半径为 b 的圆周绕距离中心为 a 的轴旋转生成的圆环面:

$$K = \frac{\sin\theta}{b(a + b\sin\theta)}, \quad H = \frac{a + 2b\sin\theta}{2b(a + b\sin\theta)}.$$

见图 10.6.6.6 右侧的图.

10.6.6.6.2　旋转椭球面. 从习题 8.7.19, 发现漂亮的关系: 在所有旋转椭球面上

$$k_1^3/k_2 = 常值.$$

10.6.6.6.3　悬链面

由图 10.6.6.6.3 标出的悬链线的曲率中心的性质人们发现这是一个极小曲面 (参见 8.7.20). 由于这个性质是平面曲线中悬链线的特征, 故仅有的旋转极小曲面是悬链面.

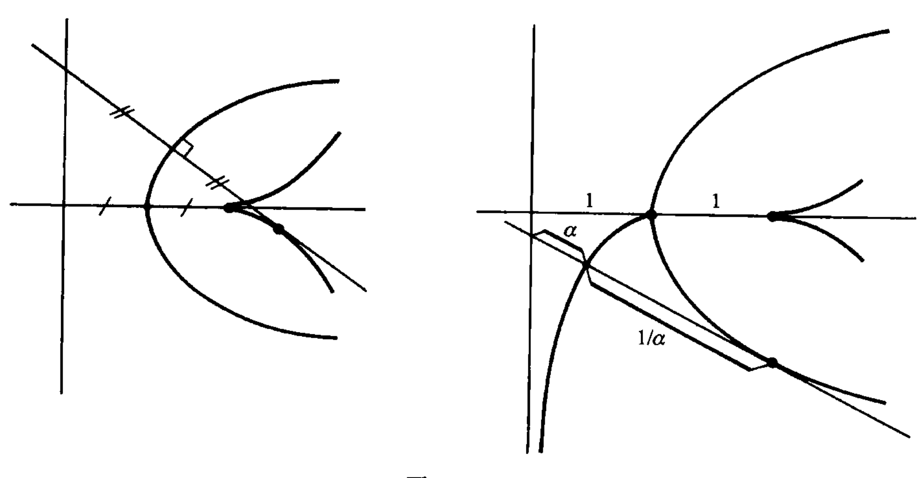


图 10.6.6.6.3

10.6.6.6.4 贝尔特拉米曲面

它的高斯曲率恒等于 -1; 这是曳物线的几何性质, 见图 10.2.3.5.

10.6.6.7 平行曲面

平行于 V 且与它距离为 k 的曲面的曲率半径, 非常简单地依赖于 V 的曲率半径, 是 R_1-k 和 R_2-k. 在 10.6.9.5 会见到一个应用, 还可参见 10.3.3.1.

10.6.6.8 一般椭球面

沿用 10.2.2.3 末尾的参数表示, 人们证明了 (有关这里的以及更多的内容, 参见 [37], 392 页)

$$-R_1^2=\frac{u^3v}{abc} \quad 和 \quad -R_2^2=\frac{uv^3}{abc}.$$

特别地, 有沿着每条曲率线, 比值 R_1^3/R_2 保持定值. 这明显推广了 10.6.6.6.2. 对于这个性质的逆命题, 参见 [37], 415 页. 对于一个一般的魏因加滕曲面的概念, 参见 11.18.

10.6.7 测地挠率

按照 8.6, 考虑双正则曲线 C, 不过 C 画在曲面 V 上. 那么 C 具有两个自然的标架: 第一个是弗雷内标架, 另一个如此得到, 用 V 的法向量补充单位切向量; 我们有 C 的两个法向量, 它们是 ν_C 和 ν_V. 两个标架的差别用 ν_C 和 ν_V 之间的夹角 θ 给定. 我们确信这个角是值得关注的, 沿着 C 的导数: $\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ 亦如是, 这里 t 表示 C 的弧长. 好的不变量是

$$C\ 的测地挠率=\tau_g=\tau-\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t},$$

不言而喻, 其中的 τ 表示 C 作为 $\mathbf{R}^3$ 的曲线的挠率. 这里提及两件事情: V 上的曲线的测地挠率仅依赖 C 的切向量而不 (像一般曲率那样) 依赖其法向量. 更明确地说就是有公式

$$\tau_g=(k_1-k_2)\sin\varphi\ \cos\varphi,$$

其中 φ 表示 C 的切方向同对应 k_2 的主方向的夹角. 作为推论, 如果 V 上的曲线的测地挠率是零, 则它必定是曲率线.

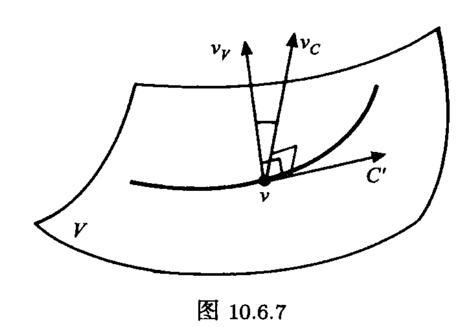


图 10.6.7

注　在曲面理论里, 哪怕我们想稍微前进一步, 事情陡然变得十分复杂. 举一个这样的例子. 根据 10.6.4 和 10.6.1.1, 一个曲面 V 的渐近曲线是这样的曲线, 其密切平面保持切于 V; 这类曲线备受关注是在情理之中的. 能够计算这些渐近曲线的 (普通) 曲率和挠率吗? 对于挠率, 公式是简单的:

$$\tau = \sqrt{-k_1k_2} = \sqrt{-K}.$$

反之, 曲率却由颇为复杂的下式给出:

$$\frac{4(-R_1R_2)^{7/8}}{(R_1-R_2)^{3/2}}\left[\frac{\partial}{\partial s_1}\left(-\frac{R_2}{R_1^3}\right)^{1/8} \pm \frac{\partial}{\partial s_2}\left(-\frac{R_1}{R_2^3}\right)^{1/8}\right],$$

其中偏导数 $\dfrac{\partial}{\partial s_1}$ 和 $\dfrac{\partial}{\partial s_2}$ 理解为沿着曲率线对于弧长求的导数, 参见 [37], 415 页, 请与 10.6.6.8 进行比较.

10.6.8　曲率线, 平行曲面和焦散面

图 10.6.8 无论是对于理论还是对于实践都是重要的. 它解释以下基本结果:

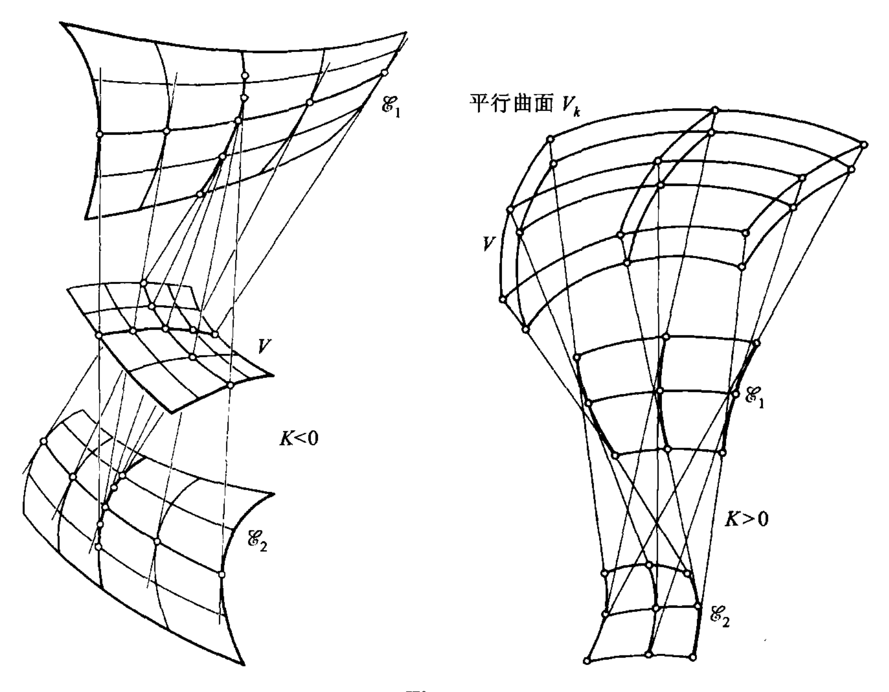


图 10.6.8

10.6.8.1

如果曲面 V 沿着其上的一条曲线的法线形成一个可展直纹面 (即这些法线有一个包络, 或者说是一条空间曲线的切线族), 则这条曲线是曲率线, 即其切线处处沿主方向.

在本节的整个后续部分假定不在一个脐点 (参见 10.6.4) 的邻域内. 请注意, 在一个脐点的邻域内, 情形跟图 10.6.8 所绘的便不一样, 通常不可能画出相应的图来. 对于 "通常的" 情形的图形, 参见 [108].

于是曲率线分为带一个参数的两个互相正交的族 $\mathscr{F}_1$ 和 $\mathscr{F}_2$. 其包络 (腰线, 参见 10.6.8.1) 一般描绘出两个曲面 $\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2$, 称为 V 的*焦散面* (或*焦曲面*). 在实际情形里, 如果 V 是一个波曲面, 它的法线是光线, 而光线将会灼伤不小心站在一个焦散面附近的人. 对于人类的眼睛, 我们说它是*散光的*, 如果 $\mathscr{C}_1$ 和 $\mathscr{C}_2$ 二者不退缩为一个点! 而在船壳理论里, 焦散面是定倾中心所在之处.

以下各点是平凡的:

—— 平行曲面有相同的焦散面;

—— 曲面的一点到曲面在此点的法线与 $\mathscr{C}_1$ 和 $\mathscr{C}_2$ 的交点的距离分别是 R_1 和 R_2;

—— 由上得到 10.6.6.7; 其无穷小的对应公式正是 10.3.3.1. 请注意这里部分地体现了 (一般在黎曼流形里, 乃至在相当普遍的度量空间里) *以下重要的原理*: 一个对象的曲率概念从考虑与它平行 (与它的距离是常值) 的诸对象而得到.

10.6.8.2 曲率线的例子

10.6.8.2.1 *槽形曲面*. 由变动曲线得到的曲线 (参见 10.2.3.10) 是测地线. 反之, 如果曲面的一族曲率线由测地线组成, 则这个曲面是槽形曲面.

10.6.8.2.2 *平移曲面*. 人们不会惊奇这样的结果: 其焦散面是两个柱面.

10.6.8.2.3 *单参数球面族的包络* (参见 10.2.3.12)

从图上看出, 由于每个球面沿一个圆周和 V 相切, 一个这样的圆周是一条曲率线, 并且相关联的可展曲面是一个锥, 最终相关联的焦散面 $\mathscr{C}_1$ 退化成一条曲线. 反之, 如果 $\mathscr{C}_1$ 是一条曲线, 则 V 是单参数球面族的一个包络. 另外一个等价的条件是, 沿着曲率线, 对应的曲率半径是常值. 提醒注意两个重要的特殊情形: *旋转曲面和管道曲面*.

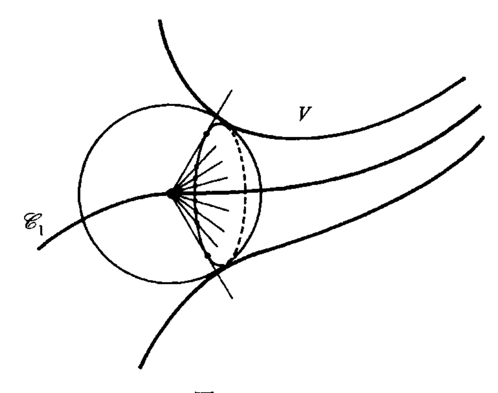


图 10.6.8.2.3

10.6.8.2.4　老朋友迪潘四次圆纹曲面.如果希望两条焦散面都退化为一条曲线,就会发现 V 必然是迪潘四次圆纹曲面. 逆命题也成立. 参见 10.2.3.12.

10.6.8.3　补充性质

—— 腰线 (尖点的脊线, 参见 10.2.3.9) 在它们的焦散面上, 是后者的测地线 (这简单地是由于这样的事实, 焦散面的法线平行于对应的曲率线的切线);

—— 设曲面 V 和 W 沿曲线 C 相交. 假定 C 是 V 的一条曲率线. 那么当且仅当 V 和 W 沿曲线 C 的交角是常值, C 也是 W 的一条曲率线;

—— 在单参数的三族曲面的特殊情形下, 如果它们形成正交三重族, 则它们的交线在每个曲面上都是曲率线. 我们已经遇到这样的两个例子, 共焦二次曲面和一个四次圆纹曲面族: 10.2.2.6.

—— 比如椭球面的曲率线, 在 10.4.9.5 为了求测地线曾经间接用到过, 具有一个美妙的关于椭球面度量的度量性质: 这是 E 的相对于脐点的定义双焦点圆锥曲线的性质,

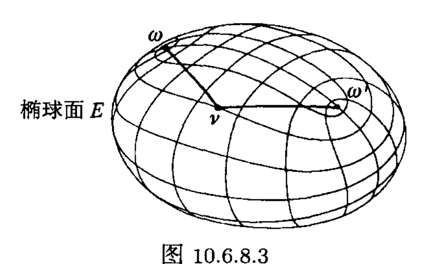


图 10.6.8.3

ω, ω' : 脐点 $d(\omega, v) + d(\omega', v) =$ 常数; Klingenberg, 54 页

一个椭球面的曲率线和它的脐点

即每条曲率线是与两个非对径脐点内蕴距离之和为常数的点的轨迹. 请注意, 还可以用距离之差代替和, 因为前面已经知道: 所有从一个脐点出发的测地线到达对径脐点, 从而根据 11.3.2, 这是一条定长的测地线. 至于证明, 参见 [92], 431 等页.

—— 曲率线在反演下变为曲率线: 事实上, 反演保持角度 (参见 [40], 10.8.5), 从而保持正交三重族. 根据前面所述的性质, 只需能够把整个曲面包含在一个正交三重族内. 而对于我们来说, 这恰好是平行曲面和图 10.6.8 所做的. 转而注意到渐近曲线在射影变换下 (参见 [40], 第 4 章) 保持不变: 事实上渐近方向是由 3 阶接触的性质定义的.

10.6.8.4　精细的公式

在 [38] 的 340 页至 341 页有一个公式表, 几乎回答了人们可能提出的涉及焦散面的不同元素的计算的所有问题. 比如那里有计算焦散面 $\mathscr{C}_1$ 的全曲率 K_1 的下列漂亮公式:

$$K_1 = -(R_1 - R_2)^2 \frac{\partial R_1/\partial u}{\partial R_2/\partial u},$$

其中 u 和 v 是对应曲率线的 V 的坐标. 这里是它的一个应用: 为了使一个曲面存在

在 R_1 和 R_2 之间的一个普适关系 (魏因加滕曲面, 参见 10.6.6.8 和 11.18) 必须且只需有等式

$$K_1K_2 = (R_1 - R_2)^4.$$

其中 K_i 是焦散面 $\mathscr{C}_i$ 的高斯曲率.

此外, 精细理论的爱好者还可以阅读 [39], 207 页. 在那里比如会了解到: 如果一族曲率线都是平面曲线, 并且其中一条是一个圆周, 则所有的都是圆周, 等等.

10.6.9 平均曲率的含义

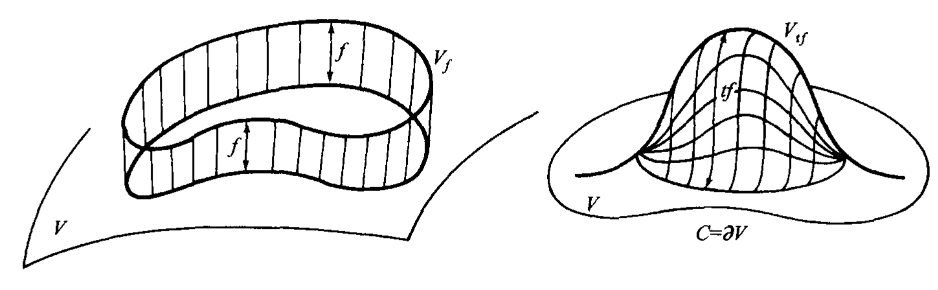


图 10.6.9

将定向曲面 V 的各点沿法方向移动一个长度 $f: V \to \mathbf{R}$. 这样就得到一个新的曲面, 记作 V_f (如果 f 是常数, V_f 是 V 的平行曲面). 假定 V 是准紧致的, 以便存在有限的积分. 那么就有

10.6.9.1
$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\,(\mathrm{Aire}\,(V_{tf}))}{\mathrm{d}\,t}(0) = 2\int_V f(v)H(v)\mathrm{d}\,v}\,.$$

其中 H 是 V 的平均曲率. 事实上:(i) 一个曲面的测度是其第一基本形式 $I_{V_{tf}}$ 的行列式的平方根; (ii) 行列式的导数涉及迹; (iii) 我们有通过 II 计算 I 的导数的公式 10.3.3.1; (iv)H 定义为 II 的迹.

对于平行曲面, 上式右端就简单地变为 $\int_V H(v)\mathrm{d}\,v$; 这再次印证了 10.6.8.1 中提到的一般原理. 现在求一个边界为给定曲线 $C = \partial V$ 并且有极小面积的曲面 V. 变分法的一个经典推理和 10.6.9.1 表明仅在一阶导数的层次上 (“临界点”) 就应该有

10.6.9.2
$$\boxed{V \text{ 是 } H \equiv 0 \text{ 的曲面}}\,.$$

并且称之为*极小曲面*. 我们已经多次碰到这样的曲面. 根据 10.6.6.1, 在曲面是函数图像的情形, 极小曲面方程是

$$(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t = 0.$$

利用高斯映射可以得到一个几何解释, 如果用参数 (u, v) 表示 V 的曲率线, 那么 (u, v) 就是 V 的保形 (等温) 坐标. 更简单的表述是: 高斯映射是保形的. 这一事实在 11.16.6 将起根本性的作用.

10.6.9.3 如果 V 的平均曲率是常数, 上面的叙述保持有效. 物理上, 有常平均曲率的曲面这样解释. 取一条固定的曲线 C 和它确定的极小曲面. 然后在下面有规律的吹气, 即在 V 的一侧维持一个常值压强. 物理事实表明平衡形状使得平均曲率是常值 (大小跟压强相当).

10.6.9.4 在 11.19.3 和 11.19.4 将更大范围地发展在 10.2.3.13 开始的研究, 这就是当平均曲率 (或高斯曲率) 按照在 S^2 上扫描的法向量限定时, 确定一个曲面.

10.6.9.5 注释

从 10.6.6.7 立刻推导出以下结果. 给定一个高斯曲率是常数的曲面, 则至少存在两个有常平均曲率的平行曲面. 反之, 给定一个平均曲率是常数的曲面, 则至少存在一个有常数高斯曲率的平行曲面. 关于应用, 参见 [93].

10.6.9.6 有常平均曲率的旋转曲面

根据 10.6.6.6, 我们了解到问题归结为找到平面曲线, 其曲率半径满足某个条件 (更一般地, 可以求旋转曲面, 使得其平均曲率按照纬度限定). 答案可以由计算得到, 但是一个令人惊愕的几何回答归功于德洛内,他的回答如下所述 (比如参见 [77] 和 [133]).

所有平均曲率为常数的旋转曲面可以这样获得: 无滑动地在一条直线上滚动一个圆锥曲线, 注视其焦点的轨迹曲线, 那么这条曲线围绕滚动所在的直线旋转产生的曲面是平均曲率为常数的旋转曲面. 在椭圆退化成的线段的情形给出球面, 在一个圆周的情形给出旋转柱面, 在抛物线的情形, 焦点轨迹是旋轮线, 从而给出悬链面, 在一般情形下给出所有其他的. 参见 [49].

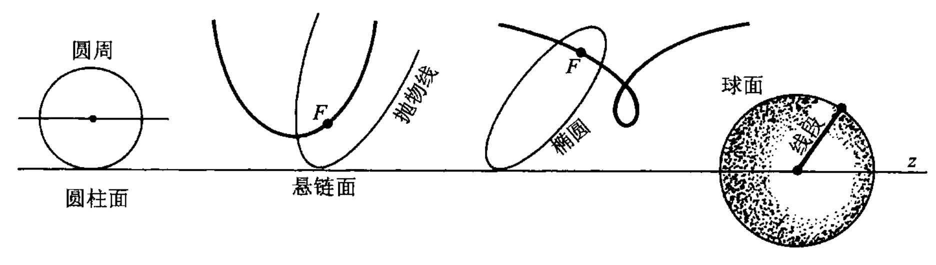


图 10.6.9.6

双曲线的情形也会出现.

10.6.9.7 等周和常平均曲率

平均曲率的恒定性的一个几何解释如下所述. 考虑 $\mathbf{R}^3$ 的一个紧致区域 Ω, 其边界是曲面 $\partial\Omega = S$. 如果我们致力于证明 $\mathbf{R}^3$ 中的推广了 9.3 的等周不等式, 一个自然的途径是假定在具有同样体积的区域中, Ω 是边界面积最小的. 基于公式 10.6.9.1 的经典变分计算表明边界 S 的平均曲率应当是常数. 关于这个主题的更多内容请参见 11.20.

10.7 曲面的两个基本形式之间的关系

在 10.6.2.1 我们已经发现一个这样的关系:

$$\boxed{K = II \text{ 的行列式} = k_1 k_2}.$$

另一个关系由科达齐 - 马依纳尔迪方程 (如果不写成向量形式而写成坐标形式则说是方程) 组成. 这个方程仅在引入关于向量场的协变导数 D 的概念 (参见 10.4.7) 之后才可以写成 "无坐标" 形式. 如果 W 表示在 10.3.3 引进的魏因加滕自同构, 则要寻找的方程是:

10.7.1

$$\boxed{\text{对于 } V \text{ 上的所有向量场 } \xi \text{ 和 } \eta \quad D_\xi(W(\eta)) - D_\eta(W(\xi)) - W([\xi,\eta]) = 0}.$$

方括号表示向量场的括号积. 为了把这个方程写成坐标形式, 必须先把 D 写成坐标形式, 而这就是克里斯特费尔符号, 参见 10.4.7. 在所有情形下, D 都是由第一基本形式 I 确定.

10.7.2 曲率线坐标的情形

这时科达齐 - 马依纳尔迪方程可以十分简单地写出. 采用 10.6.5 中的记号, 我们发现两个数量关系

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial v} &= \frac{1}{2}(k_1 + k_2)\frac{\partial E}{\partial v} = H \cdot \frac{\partial E}{\partial v}, \\ \frac{\partial N}{\partial u} &= \frac{1}{2}(k_1 + k_2)\frac{\partial G}{\partial u} = H \cdot \frac{\partial G}{\partial u} \end{aligned}}.$$

具有给定的作为弧长的函数的曲率和挠率的 $\mathbf{R}^3$ 的曲线的存在性和唯一性的基本定理 (参见 8.6.13), 现在就变为

10.7.3 定理

如果在 $\mathbf{R}^2$ 的一个开集上给定一个黎曼度量 $g = \mathrm{d}s^2 = I$ 和一个二阶微分形式 II, 并且 I 和 II 满足两个关系 10.6.2.1 和 10.7.1, 则存在 $\mathbf{R}^3$ 的一个浸入曲面, 其基本形式是 I 和 II; 并且如果忽略一个位移, 这样的曲面唯一.

证明的思路跟 8.6.13 类似, 精心寻找一个像弗雷内标架那样的 $\mathbf{R}^3$ 的一个标架, 让它依赖 $\mathbf{R}^2$ 的我们的开集内的坐标 u, v. 唯一的差别, 也是更加困难之根源, 在于代替常微分方程, 这里是 (关于 u, v 的) 偏微分方程. 问题看起来增加了难度. 不过现在涉及的是超定方程组, 一旦 3.5.15.4 中的弗罗贝尼乌斯相容条件满足, 其积分没有困难. 在我们的情形下, 这些条件恰好是 10.6.2.1 和 10.7.1! 证明的细节, 比如可以参见 [41]. 311 页, [64], 61 页, [18], 47 页, [48], 146 页.

以前我们没有谈论这些方程, 这是因为无论在前面各节结果的陈述中, 还是通常在其证明中, 它们实际不起任何作用. 反之, 在下一章, 在许多整体性结果中, 它们将扮演举足轻重的角色.

10.8 关于 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中的超曲面

读者不免感到惊奇, 在论述 $\mathbf{R}^2$ 的曲线之后, 随之就是 $\mathbf{R}^3$ 的曲面, 然后戛然而止. 其实理由是简单的: $\mathbf{R}^3$ 的曲面的理论, 比之 $\mathbf{R}^{n+1}$ $(n > 2)$ 的超曲面的理论, 要精细和丰富得多, 其基本的理由如下所述.

定义两个基本形式 I 和 II 总不会遇到障碍, 第一个是 $\mathrm{d}\,s^2 = g$. 通过关于 I 对角化 II 得到主曲率 $k_i(i = 1, \cdots, n)$. 必然存在前一节公式的推广, 特别是 10.6.2.1 的高斯公式; 它的对应公式告诉我们, 对于所有 i 和 j, 乘积 $k_i k_j$ 等于由对应 i 和 j 主方向生成的平面的截断曲率 σ_{ij} (参见 [64], 61 页或 [18], 23 页). 这些截断曲率仅依赖 I.

这里有一个如此强有力的关系, 它将表明, 事实上, 在一般情形下, 形式 II 由 I 确定. 因为假设果然对于所有配对有 $k_i' k_j' = k_i k_j, i < j$, 并且至少有三个指标使得 k_i 不是零, 则对于所有 $i, k_i' = k_i$, 或对于所有 i, $k_i' = -k_i$. 这正负号的可能的改变, 恰好对应于超曲面的定向的选取.

如此看来, 我们曾多次遇到的现象: 内蕴地等距的曲面却不能通过位移相重合, 仅在下列情况下发生: 流形在外部状况上退化得厉害, 以至 II 的秩保持小于 3. 对于那些感兴趣的读者, 可以查阅 [63], 第 12 章.

不过对于曲面的 I 和 II 之间的 "混合" 问题是 19 世纪几何的热点. 建议读者首先参考达布的四卷著作; 还有我们的第 11 章, 以及 [63] 的第 12 章. 另外参见 [112].

上面的基本评注涉及的是局部理论. 与之相反, 任意维数的 $\mathbf{R}^{n+1}$ 的超曲面的整体几何更是丰富多彩的. 限于本书的宗旨, 我们毫无触及. 对于那些渴望学习这些知识的读者, 除 [63], 第 12 章外, 还可以参考 [86], [103], [105].

第十一章　曲面的整体理论的简短导引

对于紧致 (必要时, 还需完备的) 曲面, 我们打算研究与第九章的对于平面曲线的类似问题, 并且得到类似的结果.

而在第十章已经明确指出, 这类问题自然分成两类: 一类是关于抽象黎曼曲面 (X,g), 而另一类则是关于嵌入或仅仅是浸入到 $\mathbf{R}^3$ 的曲面.

在本章的第一部分, 我们将研究 (X,g) 的度量几何 (内蕴的, 即使它来自嵌入!). 在研究最短路径的整体问题之后, 我们研究下列问题: 当用其自然的不变量高斯曲率 K 控制 (X,g) 时, 关于它的度量几何我们能够说些什么? 回答是在不等式的两个方向上的比较都是完美的: 如果 $K \geqslant k$ $(K \leqslant k)$, 则 (X,g) 的几何小于 (大于) 唯一的单连通并具有常曲率 $K \equiv k$ 的流形的几何. 这表明存在单实参数的一族普适对象, 用以解释所得结果的完美性.

曲率和拓扑之间的关系由高斯 - 博内公式解决. 然后, 我们研究第九章的平面区域的等周不等式对于位于 (X,g) 上的区域的推广. 这里出现等周断面的概念. 我们同样对于抽象曲面还研究等收缩不等式, 它在一定程度上相当对于无边界的紧致的 X 的等周不等式; 边界由所考虑的紧致曲面的最小周期测地线所代替, 而最小周期测地线是不依赖 X 的所有区域的.

作为过渡, 我们研究实际上还是没有完全解决的问题, 一个曲面 (X,g) 通过一个浸入 (或嵌入) 在 $\mathbf{R}^3$ 实现的问题.

在第二部分. 我们首先研究涉及高斯曲率 K 的问题. 接着是涉及平均曲率 H (它与 K 一起完全决定了曲面的第二基本形式, 因而是两个最自然的不变量) 的问题. $H \equiv 0$ 的曲面是著名的极小曲面, 而 H 是常数的曲面也是有深刻结果且十分有趣的曲面. 我们以对于 $\mathbf{R}^3$ 的区域的等周不等式以及闵可夫斯基对于它所做的精细化结束这部分.

在我们的导引中至少有两个遗漏：首先是分析，即拉普拉斯 - 贝尔特拉米算子，热传导方程，波动方程以及抽象黎曼曲面 (X,g) 上的振动和频率的研究. 关于这个内容广泛并且始终充满时尚的主题有两个优秀的参考文献 [72] 和 [73]. 其次是这样的事实，一个黎曼曲面也是下述意义下的黎曼曲面，即一条 (全纯) 复曲线. 对于这一广泛而且总是充满时尚的主题，可以参考 [70], [71].

对于我们探讨的所有专题，在下列意义下我们力求完备:

—— 讲出问题之原委和相关的重要结果;

—— 一旦有关内容在大部分有关曲面论的经典著作中都未曾提及，我们就会给出对应的参考文献.

第一部分　2 维整体黎曼流形

11.1　最短路径的整体问题

11.2　常曲率的曲面

11.3　度量性质: 一阶和二阶变分公式

11.4　最短路径的唯一性和单射半径

11.5　$K \geqslant k$ 的流形

11.6　$K \leqslant k$ 的流形

11.7　高斯 - 博内公式和霍普夫公式

11.8　曲面上的等周不等式

11.9　周期测地线和等收缩不等式

11.10　只有周期测地线的曲面

11.11　两部分间的过渡: 嵌入和浸入问题

第二部分　嵌入或浸入到 $\mathbf{R}^3$ 内的曲面

11.12　零曲率的曲面

11.13　曲率为正或零的曲面

11.14　唯一性和刚性

11.15　$K<0$ 的曲面

11.16　平均曲率为零的曲面，又名极小曲面

11.17　平均曲率是常数的曲面或肥皂泡曲面

11.18　魏因加滕曲面

11.19　作为平面族的包络的曲面: 公式和应用

11.20　对于曲面的等周不等式

11.21　花束: 球面和迪潘四次圆纹曲面的表征

第一部分
2 维整体黎曼流形

11.1 最短路径的整体问题

11.1.1

在 10.4.8 曾经提到 (X,g) 的充分靠近的两个点之间用唯一的一条线段 (最短路径) 连结. 那么整体情形如何? 显然无论是存在性还是唯一性, 一般都是不对的. 简单地取普通球面 (比如 S^2) 但是挖去一个点 (如果更贪婪的话, 不妨挖去一个更大的洞). 那么一方面在关于被挖去的点对称的两个邻近的点之间没有任何线段连结它们. 而另一方面对于对径的两个点, 却有无穷多条线段连结它们.

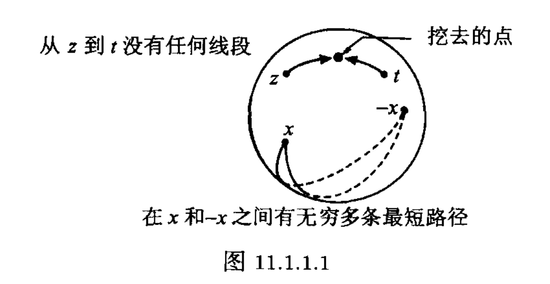


图 11.1.1.1

我们注意到缺少了一个点的球面不再是完备度量空间; 另一方面某些测地线不再定义在整个 $(-\infty,+\infty)$ 上. 这两个注释是霍普夫 – 里诺基本定理的关键. 首先对于 $x\in X$ 定义在 x 的指数映射, 记作$\exp_x$, 在下述意义下它表达了从 X 在 x 的切空间 T_xX 上到 X 内扫描到的最大可能的部分: 沿用 10.4.8 的记号, 在可能的情形下, 令 T_xX 的一个向量 η 对应点 $\gamma_{\eta/\|\eta\|}(\|\eta\|)$, 在测地线 γ_ξ 上从 x 延伸长度 $\|\eta\|$ 得到的点. 这个最大部分是 T_xX 的在原点的星形部分, 其边界对应于这样的点, 在那里, 测地线不能再延伸了.

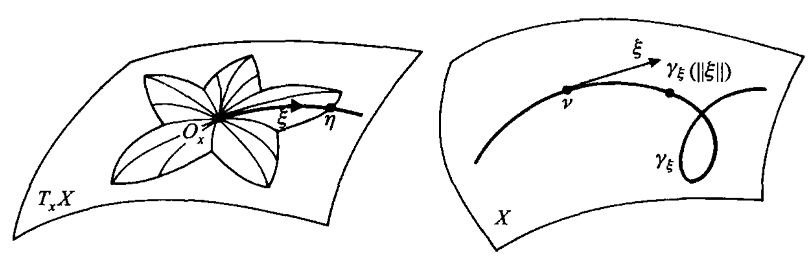


图 11.1.1.2

11.1.2　霍普夫 – 里诺定理

对于一个 (X,g), 以下三个条件是等价的:

(i) 对于一个 x, 指数 $\exp_x X$ 定义在整个切空间, 即从 x 出发的所有测地线定义在整个实直线上;

(ii) 对于所有 x, 指数映射定义在整个 T_xX 上;

(iii) 度量空间 (X,g) 是完备的.

此外, 这些条件的每一个蕴含 X 的所有点对至少有一个线段连结.

11.1.3　注

最后的条件不蕴涵其他的, 欧几里得平面上的开圆盘表明了这一点. $\mathbf{R}^3$ 的一个曲面 S 可能是完备的但不是 $\mathbf{R}^3$ 的一个闭子集, 虽然其逆为真: 取 $\mathbf{R}^3$ 的一个柱面, 它卷在一个极限对象上而不能达到 (柱面与跟母线垂直的平面的交是螺旋线, 该螺旋线带极限点或极限圆周). 隐藏在 11.1.2 中的富有启发性的思想是当一条测地线在 x 的周围环绕时, 是那些洞妨碍它处处定义.

自此以后所考虑的 (X,g) 将是完备的 (除非明确指出相反的情形). $\mathbf{R}^3$ 的曲面也都是完备曲面.

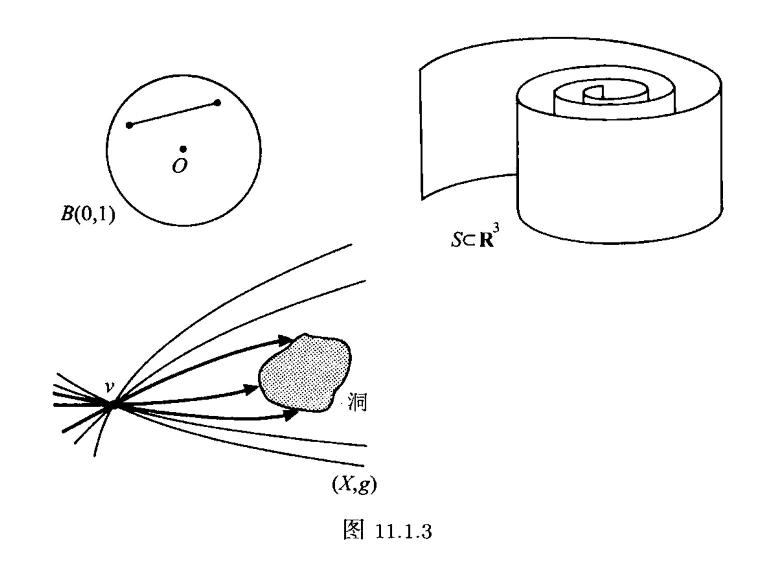


图 11.1.3

11.1.4　直径

一个度量空间的直径是它的点之间的距离的上确界. 11.1.2 表明, 对于一个 (X,g), 当且仅当 X 紧致时这个直径是有限的. 趁此机会回顾 10.4.8 的注 4: 给定了 g 的流形 X 的拓扑, 跟在 X 上由 g 构造的度量空间结构的拓扑一致. 直径将随情况记作 $\mathrm{Diam}\,(g)$ 或 $D(g)$.

11.2 常曲率的曲面

在 10.5.2 曾经看到, 半径为 R 的球面的高斯曲率是常数并且等于 $1/R^2$, 欧几里得平面有常高斯曲率零, 而在平面 $\mathbf{R}^2$ 上, 配备以在极坐标下等于 $\mathrm{d}r^2+\dfrac{\sinh^2\sqrt{-k}r}{-k}\mathrm{d}\theta^2$ 的 $\mathrm{d}s^2$(k 是任意负实数), 那么这个平面的高斯曲率等于 k. 对于每个实数 k, 用 S_k^2 表示上面定义的诸对象. 上面的定理充分表明了记号的合理性.

11.2.1 定理

所有高斯曲率为常数且单连通的 (X,g) 等距于 S_k^2.

局部等距来自 10.5.2, 至于整体的等距是单连通的推论 (在球面的情形必须两个坐标卡覆盖, 对此须稍加注意).

11.2.2

对于负高斯曲率的情形, 另外两个模型是有用的: 庞加莱的半平面, 即在上半平面上 $\mathrm{d}s^2$ 等于 $y^{-2}(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2)$. 还有, 在圆盘 $x^2+y^2<-\dfrac{4}{k}$ 上, $\mathrm{d}s^2$ 由

$$\left(1+\frac{k}{4}(x^2+y^2)\right)^{-2}(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2)$$

给定. 第一个是与 S_{-1}^2 等距, 而第二个是与 S_k^2 等距 ($k<0$).

11.2.3

现在设 (X,g) 是任意黎曼曲面, $\tilde{X}$ 是 X 的一个拓扑覆叠, 它由投影 $p:\tilde{X}\to X$ 给定. 那么, 沿用 10.3.2 的语言, 在 $\tilde{X}$ 上将有一个诱导黎曼度量 p^*g, *记之为* $\tilde{g}$. 而 $(\widetilde{X},\tilde{g})$ 称为 (X,g) 的一个*黎曼覆叠*; 显然, 对于任意维数这都有效.

11.2.4

从前面的叙述推出:*所有带常高斯曲率的 (X,g) 是一个 S_k^2 对于一个离散并且无不动点的等距映射群的商.* 在 k 是正数情形, 曲面的分类 (参见 4.2.25) 表明仅有两个这样的流形: S_k^2 本身和它对于对径映射的商, 也就是实投影平面 (参见 2.4.12.2)$P^2(\mathbf{R})$, 它从而继承一个典范度量, 称为*椭圆*度量. 其实这里面临的是椭圆几何, 它的测地线都是周期的 (参见 11.10), 并且形成一个满足关联公理的 "直线" 的集合, 关于所有这些内容参见 [40], 第 19 章, 以及 [149] 和 [150].

在 $k=0$ 的情形, 欧几里得平面等距的无不动点的离散子群将提供非紧致的柱面和默比乌斯带, 以及紧致的环面和克莱因瓶 (参见 2.4.12). 然而这里如此得到的两个环面, 仅当对应的平面网格的一个是由另一个由平面的等距变换得到的, 才是等距的. 在规范化之后, 就得到由图 11.2.4.1 影线部分的区域表示的 "平坦的" 环面的带两个参数的一个族; 底部左端点对应"正方形" $\mathbf{Z}^2$ 网格, 而右端的点对应 "六边形"网格. 关于细节, 请参见 [79] 和 [73].

对于克莱因瓶, 生成它们的平坦环面的对合运算要求该环面是长方形类型的; 因而在规范化之后, 仅存在一个单参数族, 比如该参数是宽度.

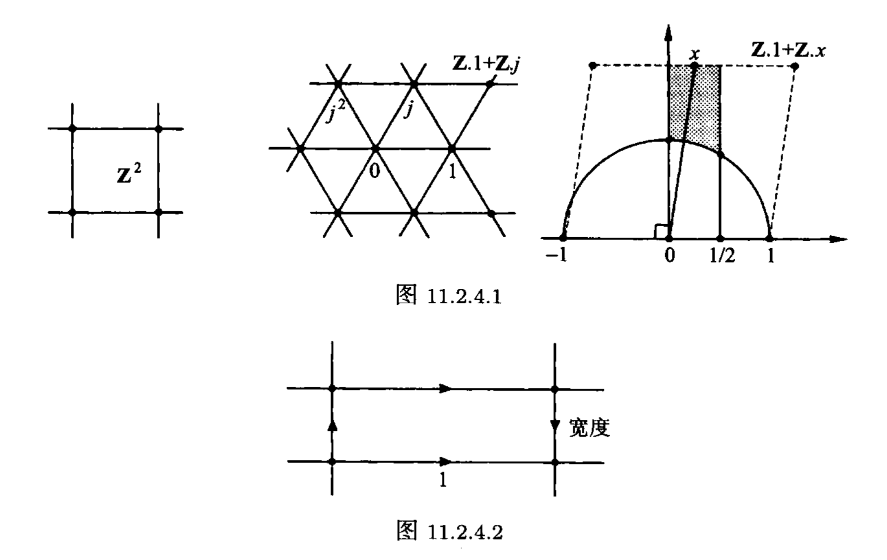


图 11.2.4.1

图 11.2.4.2

11.2.5

$k<0$ 的情形就要复杂得多. 首先必须指出, 在所有紧致曲面上, 存在一个带负常高斯曲率的度量, 只要它的亏格 $\geqslant 2$. 为了认识到这一点, 最简单的办法是在双曲平面上找到正多边形, 它的顶角等于 $2\pi/n$, n 是 4 的任意整倍数, 而这是容易的, 参见 [40], 19.8.20. 反之, 在这类紧致曲面上的黎曼结构的集合的研究是极端复杂的, 并且仍然处在蓬勃发展之中. 本质是这个 "模空间" 的维数等于 $6\gamma-6$, 如果曲面是定向的并且有 γ 个洞; 而在关联的非定向的情形下, 维数是 $3\gamma-3$. 对于这一广泛的主题, 关于定向的情形, 请参见 [70], 关于非定向情形, 请参见 [78] 和 [109].

常曲率为 k 的紧致曲面 X 的面积非常容易地通过高斯 – 博内公式 (参见 11.7.1) 计算出来: $\mathrm{Aire}(X)=2\pi k^{-2}\chi(X)$.

11.3　度量性质: 一阶和二阶变分公式

把一条测地线 γ(除非明确做相反声明, 总是速度为 1 的情形) 嵌入到曲线 $C_\alpha = C|_{[a,b]\times\{\alpha\}}$ 的一个单参数族中, 这里

11.3.1　　$$C:[a,b]\times(-\eta,\eta)\to X,$$

并且使得 $C_0=\gamma$. 我们希望计算它们的长度 $\mathrm{Long}\,(C_\alpha)=l(\alpha)$. 前两阶导数容易计算:

11.3.2　一阶变分公式

$$\frac{\mathrm{d}\,(l(\alpha))}{\mathrm{d}\,\alpha}(0)=(s_b'(0)|\gamma'(b))-(s_a'(0)|\gamma'(a)),$$

其中 s_t 表示横截曲线 $\alpha \mapsto C(t,\alpha)$. 比如, 对于固定的极值曲线, 这个变分一定是零, 参见 10.4.5. 这还蕴涵: 如果 γ 是从 m 到 n 的测地线, δ 是从 n 到 p 的测地线, 则

$$d(m,p) < d(m,n) + d(n,p) \quad (\text{严格三角不等式})$$

只要在 n 真的有一个角, 即只要 $\gamma'(n) \neq \delta'(n)$.

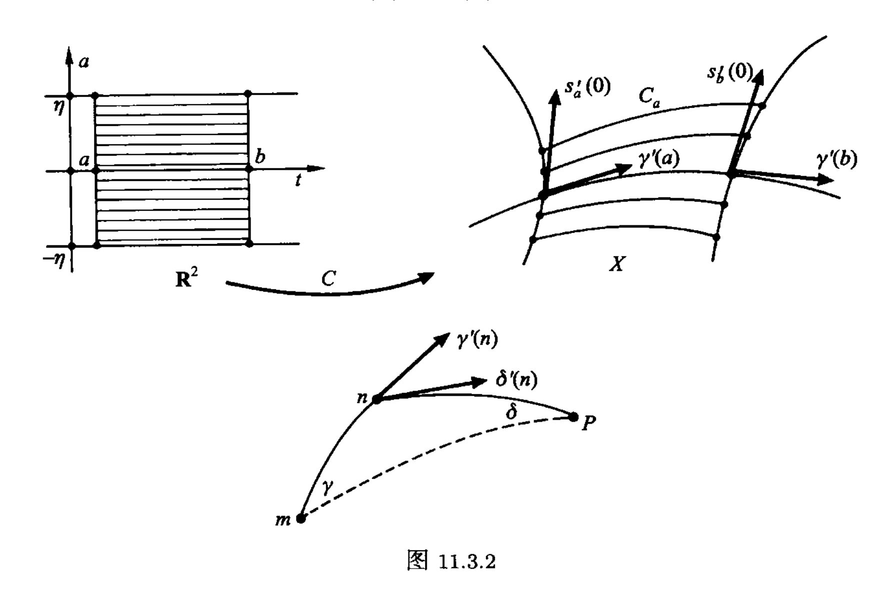


图 11.3.2

为了计算 2 二阶导数, 我们假定所有横截曲线 s_t 在 0 正交于 γ, 以便使计算简化. 沿 γ 给 X 定向. 那么横截向量 $s'_t(0)$ 被写成 $s'_t(0) = y(t)\,(\gamma'(t) + \pi/2)$ (这个记号表示向量 $\gamma'(t)$ 按照一个固定的定向旋转 $\pi/2$), 其中 $y(t)$ 是一个数值函数 (参见 10.4.8 注 3). 那么

11.3.3 二阶变分公式

$$\frac{\mathrm{d}^2(l(\alpha))}{\mathrm{d}\,\alpha^2} = [\rho(b)y(b) - \rho(a)y(a)] + \int_a^b [y'^2 - K(\gamma(t))y^2]\,\mathrm{d}\,t.$$

这里 K 显然是高斯曲率, 而 ρ 表示测地曲率. 这个公式, 尤其是它的 "集成" 版本, 定理 11.5.5, 是现时黎曼几何的最重要工具. 后面我们将充分地使用它, 参见 11.6.2.

11.4 最短路径的唯一性和单射半径

11.4.1 割迹理论

设 ξ 是一个单位切向量, 而 γ_ξ 是它的测地线; 在 10.4.8 曾经知道对于充分小的 t, 有 $d(m = \gamma(0), \gamma(t)) = t$. 如果 t 特别大, 一般这是错误的. 在一个紧致流形上, 你

就想想它的直径吧! 于是存在一个 t_0, 使得

$$\text{对于所有 } t \leqslant t_0, \quad d(\gamma(0), \gamma(t)) = t;$$
$$\text{对于所有 } t > t_0, \quad d(\gamma(0), \gamma(t)) < t.$$

记这个实数为 $\text{Cutval}(\xi)$, 有可能它是 $+\infty$. 称它为单位向量 ξ 的割值.

定理 如果 $t = \text{Cutval}(\xi)$, 必须至少以下两个断言之一成立 (有可能同时成立):

—— 至少存在从 $\gamma(0)$ 到 $\gamma(t)$ 的异于 $\gamma_{[0,t]}$ 的第二个线段;

—— 映射 $\exp_m : T_m X \to X$ 在 $t \cdot \xi$ 的秩 < 2.

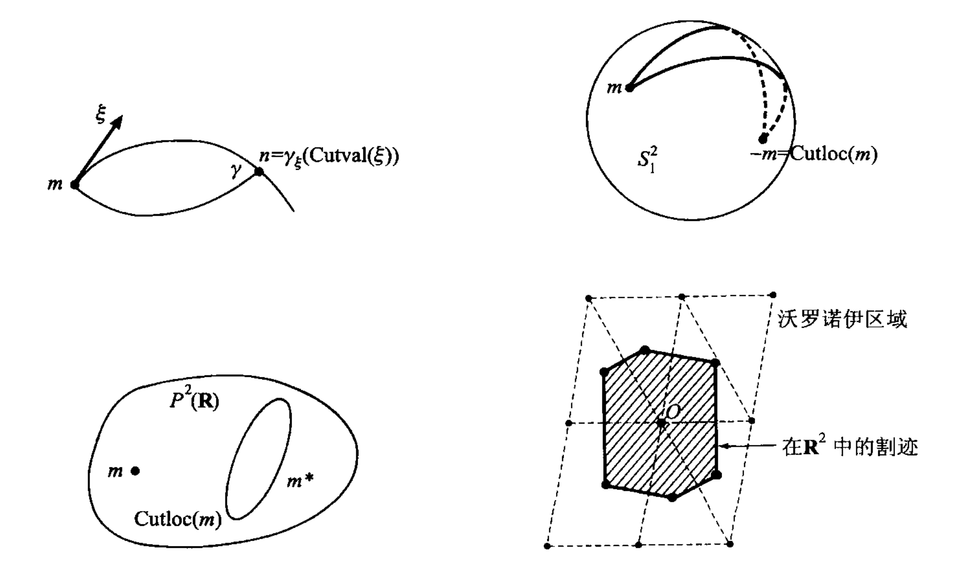
此外, 如果在一个向量 η 映射 $\exp_m$ 的秩 < 2, 则总有 $\text{Cutval}(\eta/\|\eta\|) \leqslant \|\eta\|$. 当秩小到如此时, 则称两个点 $m = \gamma(0)$ 和 $n = \gamma(t)$ 在测地线 γ_ξ 上是共轭的. (X, g) 的点 m 的**割迹**根据定义是 X 的点 $\exp_m(\text{Cutval}(\xi) \cdot \xi)$ 的集合. 记之为 $\text{Cutloc}(m)$.

11.4.2 割迹的例子

在 10.4.9 已经体会到明晰地寻找一个曲面的测地线的难度. 那么寻找割迹就更加困难. 求共轭点这一部分多少容易些, 并且有时会有助于求割迹.

对于球 S_1^2, 所有点的割迹缩减到它的对径点. 对于椭圆空间, $\text{Cutloc}(m)$ 是点 m 的对偶投影圆周 - 直线 m^*. 对于平坦环面, 原点的割迹是给出环面的网格的沃罗诺伊区域 (参见 [40],1.9.12) 的边界在指数映射下的像. 对于一个旋转环面, 外赤道的点的割迹由以下几部分组成: 内赤道, 对面的经线, 以及外赤道的一段弧, 其端点是 m 的共轭点.

对于椭球面, 在 10.4.9.5 所做的研究告诉我们, 对于脐点, 其割迹是对面的脐点, 而对于其他的点, 其割迹总是一个区间: 参见 [51].



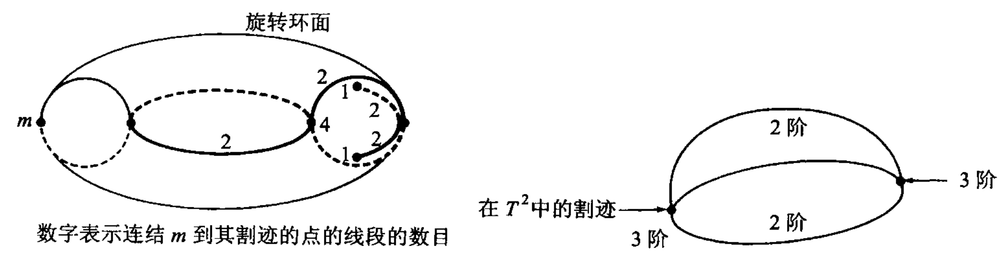


图 11.4.2

11.4.3 关于割迹的理论结果

割迹的研究开始于庞加莱, 而后有迈尔斯, 瓦纳 (Warner), 格鲁克 - 辛格 (Gluck-Singer), 布赫纳和 C.T.C. 沃尔. 目前我们知道:

—— 割迹是至少由两条不同线段连结的点的集合的闭包;

—— 如果 (X,g) 是实解析的, 则所有点的割迹是一个下-解析集. 故在 2 维情形这是一个图像. 毗连此图像的一个点的线段的数目是它在图像里的阶. 1 阶情形表明该点是共轭点;

—— 与上相反的是, 总地说来, 割迹可以是纷繁复杂的: 在 S^2 上存在这样的黎曼度量, 它的几乎所有的点的割迹都是非可三角剖分的.

—— 不过, 对于通常的度量 (我们不打算详细界定通常的度量这一概念; 仅仅指出其出发点是几乎所有的度量都是通常), 所有点的割迹是可三角剖分的, 并且仅有至多 3 阶的点.

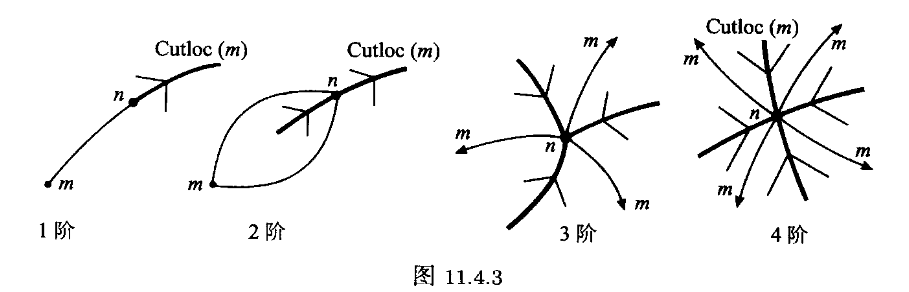


图 11.4.3

有关内容的参考文献是 [80] 和 [81].

11.4.4 单射半径

(X,g) 在 m 的单射半径是 $\inf\{\mathrm{Cutval}\,(\xi):\xi\in U_mX\}$, 记作 $\mathrm{Inj}\,(m)$ 或 $\mathrm{Inj}(g,m)$. 这里 U_mX 表示 T_mX 中单位向量的集合. 因为函数 Cutval 在切丛 UM 上是连续的, $\mathrm{Inj}\,(m)$ 的值总是正的. (X,g) 的单射半径是

$$\mathrm{Inj}\,(X,g)=\mathrm{Inj}\,(g)=\inf\{\mathrm{Inj}\,(m):m\in X\}.$$

如果 X 是紧致的, 则它总是正的. 一般情况下则否, 如图 11.4.4 所示意的.

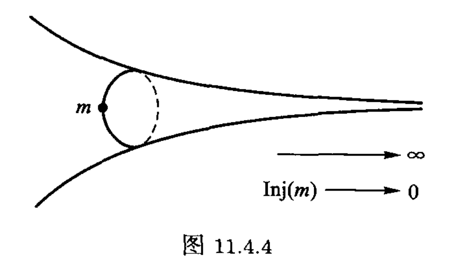


图 11.4.4

单射半径的用途之一是所有度量圆盘 $B(m,r)$ 将微分同胚于 $\mathbf{R}^2$, 只要 $r \leqslant \operatorname{Inj}(m)$. 同样, 对于 X 的所有 m, 补集 $X\backslash\operatorname{Cutloc}(m)$ 总是微分同胚于 $\mathbf{R}^2$.

利用单射半径, 还可以控制 (X,g) 的面积. 等栓不等式 (参见 [53], 6 页) 是说:

$$\operatorname{Aire}(X,g) = \operatorname{Aire}(g) \geqslant \frac{4}{\pi}\operatorname{Inj}^2(g).$$

并且等式仅对于一个球面和常高斯曲率曲面成立. 通过 (X,g) 的切平面上用割值定义的星形区域, 还可以更精细地控制面积 (参见 [82]): 设 $E(x)$ 是 T_xX 的对应割值的星形区域, 而 $\operatorname{Vol}(E(x))$ 是其对于 T_xX 的勒贝格测度的体积. 那么存在一个普适常数 $c(n)$ (这里 $n = \dim(X)$) 使得

$$\operatorname{Vol}^2(X,g) \geqslant c(n)\int_X \operatorname{Vol}(E(x))\mathrm{d}\,x.$$

11.5　$K \geqslant k$ 的流形

这一写法表示我们研究 (X,g), 其 (高斯) 曲率 K 处处 $\geqslant k$, 其中 k 是一个给定实数. 为了研究它们, 引进一个新概念是适宜的, 尽管只不过表明测地坐标的一点应用, 参见 10.5.3.2.

11.5.1　雅可比场

曲面上的测地线 γ 的雅可比场是沿着 γ 的一个数值函数 f, 使得

$$f'' + K\cdot f = 0,$$

即 $f''(t)+K(\gamma(t))\cdot f(t) = 0$. 对于所有雅可比场, 可以关联一个单参数的曲线族 C, 使得 C_α 是一条测地线, 而 f 是关联于 $C_0 = \gamma$ 的函数, 也就是说 f 是偏导数 $\dfrac{\partial C}{\partial\alpha}(\cdot,0)$ 的大小, 更准确地是 $\dfrac{\partial C}{\partial\alpha}(t,0) = f(t)\left(\gamma'(t)+\dfrac{\pi}{2}\right)$. 此外, 可以预先固定 $f(0)$和 $f'(0)$. 在这种情形下, 对于横截线 s_0 (上面 11.3 的记号) 这些量表现为: s_0 在 0 的速度是

$$s_0'(0) = f(0)\left(\gamma'(t)+\frac{\pi}{2}\right),$$

并且 s_0 在 0 的测地曲率取值 $\rho = \dfrac{f'(0)}{f(0)}$.

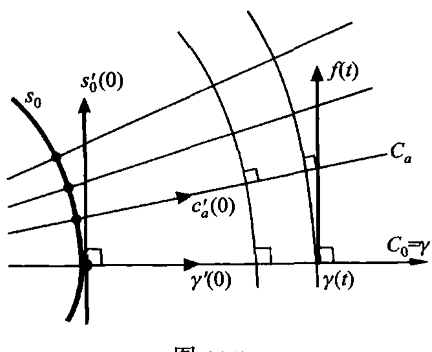


图 11.5.1

11.5.2　记号

在 S_k^2 上, 雅可比场的方程是 $f''+kf=0$. 用 h_k 表示这个方程满足条件 $h_k(0)=0$ 和 $h_k'(0)=1$ 的解, 即

如果 $k>0$, 则 $h_k(t)=\dfrac{\sin\sqrt{k}t}{\sqrt{k}}$, 如果 $k=0$, 则 $h_k(t)=t$, 如果 $k<0$, 则 $h_k(t)=\dfrac{\sin\sqrt{-k}t}{\sqrt{-k}}$.

记第一个零点为 k_0, 如果 $k>0$, 这是 $\pi/\sqrt{k}$, 否则, 是 $+\infty$.

11.5.3　基本引理

由施图姆－刘维尔的经典理论和上面所说的, 得到这个基本引理. 在一个 $K \geqslant k$ 的 (X,g) 里, 所有满足 $f(0)=0$ 和 $f'(0)=1$ 的雅可比场使得 $f(t)$ 变为零之前有 $f(t) \leqslant h_k(t)$. 特别地, 如果 $k>0$, 则存在 $t: 0<t \leqslant \pi/\sqrt{k}$, 使得 $f(t)=0$. 注意我们走不到 k_0 之外.

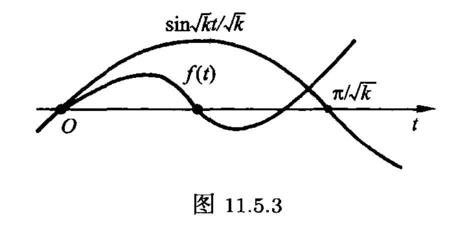


图 11.5.3

从这个引理可以得到许多推论.

11.5.4　$k>0$ 的情形

定理 11.4.1 表明对于所有 ξ 有 $\mathrm{Cutval}(\xi) \leqslant \pi/\sqrt{k}$. 由此特别有, 对于满足 $K \geqslant k$ 的 (X,g) 成立 $\mathrm{Diam}(g) \leqslant \pi/\sqrt{k}$. 注意甚至对于一个曲面 $S \subset \mathbf{R}^3$ 的内蕴直径也是这样. 一个特殊的结论是 (参见 11.1.4) 流形 X 必是紧致的. 根据下面 11.7 的高斯－博内公式人们发现 X 只可能是 S^2 或 $P^2(\mathbf{R})$. 最后注意到 $\pi/\sqrt{k}$ 正是 S_k^2 本身的直径. 其 $K>0$ 但非紧致的 (X,g) 的情形必定是细腻的. 科恩－福森证明了这只能是 $\mathbf{R}^2$, 参见 [83].

11.5.5 $K \geqslant k$ 的流形上的三角学

S_k^2 上的三角形用 $\mathscr{T}^*$ 表示, 其两个边的长度是 b 和 c, 长度为 a 的边对应的顶角是 α. 设 $a^* = F_k(b,c,\alpha)$ 是第三个边的长度. 我们知道它们满足

$$\begin{cases} (a^*)^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha, & \text{当 } k=0, \quad \text{欧几里得平面}, \\ \cos a^* = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos\alpha, & \text{对于 } S_1^2, \\ \cosh a^* = \cosh b \cdot \cosh c - \sinh b \cdot \sinh c \cdot \cos\alpha, & \text{对于 } S_{-1}^2. \end{cases}$$

(比如参见 [40], 18 和 19 章).

假定 $\mathscr{T}$ 是 (X,g) 上的一个三角形, 元素 b,c,α 和 a 意义如上. 如果第三条边, 即长度为 a 的边可以由一个与角 α 的顶点的割迹不相交的线段得到, 那么 11.5.3 的积分给出不等式 $a \leqslant F_k(b,c,\alpha)$, 如果 $K \geqslant k$. 而 A.D. 亚历山德罗夫则证明了:

$$\text{对于 } (X,g) \text{ 的所有三角形}: a \leqslant F_k(b,c,\alpha).$$

11.5.6 $K \geqslant k$ 的流形上的测度

上面 11.5.3 的积分提供下列不等式:

$$\operatorname{Aire}(B(m,r)) \leqslant \operatorname{Aire}(S_k^2 \text{ 内半径为 } r \text{ 的球}).$$

还可以比这做得更好, 参见 [84],65 页.

11.6 $K \leqslant k$ 的流形

施图姆 - 刘维尔的技术在反向保持有效, 于是有

11.6.1 引理

在一个 $K \leqslant k$ 的 (X,g) 里, 所有满足 $f(0)=0$ 和 $f'(0)=1$ 的雅可比场使得对于所有 $t \leqslant k_0$ 有 $f(t) \geqslant h_k(t)$. 特别地, 在 $t < k_0$ 时, f 不变为零, 从而如果 $k \leqslant 0$, f 从不取零.

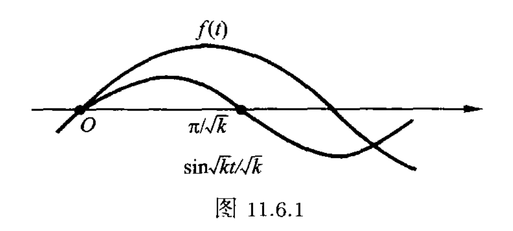
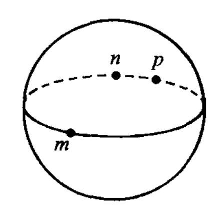


图 11.6.1

11.6.2 推论

对于所有半径 $r \leqslant k_0$ 并且 $r \leqslant \operatorname{Inj}(m)$ 的圆盘有

$$\operatorname{Aire}(B(m,r)) \geqslant \operatorname{Aire}(S_k^2 \text{ 内半径为 } r \text{ 的圆盘}).$$



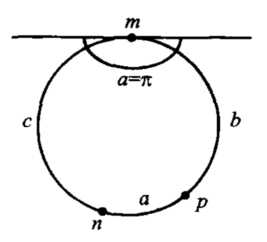


图 11.6.2

同样的, 所有充分小的三角形满足 $a \geqslant F_k(b,c,\alpha)$. 但是这里亚历山德罗夫的结果一般不再成立: 注意典范球面的一个赤道上的三个点即可明白.

不过如果 X 是单连通的并且 $k \leqslant 0$, 则亚历山德罗夫定理成立:

$$\text{对于所有三角形有不等式}: a \geqslant F_k(b,c,\alpha).$$

特别地, 有著名的*阿达马定理*: 在一个高斯曲率为负或零的流形上, 如果它是单连通的, 则任意两个点用唯一一个线段连结 (如果不是单连通的, 存在唯一的测地线连结两个点并且属于一个给定的同伦类). 注意由此推出: $K \leqslant 0$ 和单连通蕴涵 X 微分同胚于 $\mathbf{R}^2$.

11.6.3 极点

黎曼流形的一个点称为一个*极点*, 如果在这个点的单射半径是无穷. 于是这样的流形微分同胚于 $\mathbf{R}^2$(对应的, 一般是 $\mathbf{R}^n$). 前面所叙述的可以改述为: 对于 $K \leqslant 0$ 的单连通的 (X,g), 其所有点都是极点. 但是, 比如一个椭圆抛物面的顶点也是一个极点 (虽然 $K > 0$). $\mathbf{R}^3$ 的二次曲面的极点在 [51] 中加以研究, 其结果是非常细腻的.

11.7 高斯 – 博内公式和霍普夫公式

对于*紧致的*黎曼曲面 (X,g) 进行三角形剖分, 并且在我们的三角形剖分的每个三角形上应用公式 10.5.5.4. 用 X 的欧拉示性数 $\chi(X)$ 的下列定义

$$\chi\,(\text{三角形剖分后的 } X) = \text{顶点个数} - \text{边数} + \text{三角形个数},$$

随即得到

11.7.1
$$\boxed{\int_X K(m)\,\mathrm{d}\,m = 2\pi\chi(X)}\,.$$

这个公式在曲面论中是基本的. 在适当定义的意义下, 它被科恩 – 沃森推广到非紧致情形, 对于一般情形, 参见 [85]. 对于其精细化, 比如适用于 K 为正的部分和 K 为负的部分, 可以参见 [86].

11.7.2

现在考虑紧致情形, 那么注意到 11.7.1, 对于 2 维黎曼流形, "曲率和拓扑" 的问题便迎刃而解. 首先我们重新发现 11.5.4: 如果 $K > 0$, 流形只能是 S^2 或 $P^2(\mathbf{R})$. 其次现在我们知道如果 $K < 0$, 则 X 在 4.2.25 的关于其洞的数目大于或等于 1 的曲面列表中. 此外, 如果我们处处有 $K \geqslant 0$ 或处处有 $K \leqslant 0$, 仍然会有前述情形, 仅有的例外是曲率恒等于零的情形, 而在 11.2.4 已经对它们进行了分类: 这是环面或平坦克莱因瓶. 最后注意到如果 K 恒等于 -1, 按照 11.2.5 的注释, 我们有 $\operatorname{Aire}(X) = 2\pi(\gamma - 1)$; 如此看来在曲率给定后面积随着拓扑复杂的程度而增加, 这相当直观. 不过, 还是请参见 11.9.

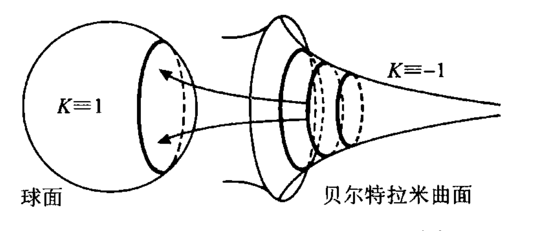
11.7.3 应用: 一个曲面的极小面积

研究给定 X 上的 g, 其曲率满足 $-1 \leqslant K \leqslant 1$, 是很自然的. 因为这表明 X 的几何是有界的 (或者说是用其加速度控制 g). 一个 X (紧致的或非紧致的) 曲面的极小面积是

$$\operatorname{Minvol}(X) = \inf\{\operatorname{Aire}(X, g) : -1 \leqslant K_g \leqslant 1, g \text{ 是 } X \text{ 上的黎曼度量}\}.$$

在所有紧致曲面的情形下,11.7.1 彻底解决了问题: 这个关联于 X 的不变量等于 $2\pi\,|\chi(X)|$. 由此推出它不是零, 并且分别对于曲率为 ± 1 的度量达到这个值; 仅有的例外是环面和克莱因瓶, 在这时这个值是零, 并且对于所有平坦度量达到. 用形象化的方式我们说环面和克莱因瓶可以 "被捣碎" 成更低维的流形, 这里指的是圆周和点.

非紧致的情形需要细致得多的分析. 在 [87] 中可以找到回答: 对于平面 $\mathbf{R}^2$, 这个不变量等于 $2\pi(1 + \sqrt{2})$; 除去平面 $\mathbf{R}^2$, 这个不变量的值等于 0, 在下列唯一的情形下达到, S_1^2 的一个半径为 $\operatorname{Arc}\sin(1/(2\sqrt{2}))$ 闭度量球面, 沿着它的边界圆周衔接一块贝尔特拉米曲面, 其边界圆周跟球面上的圆周有同样的测地曲率和同样的长度. 这样就得到一个黎曼流形, 不过它是 C^1 类的; 曲率在穿过接口处的圆周时有跳跃, 从 $+1$ 到 -1. 需要指出的是, 在任意维的情形, 最小体积问题还远未解决, 参见 [88].



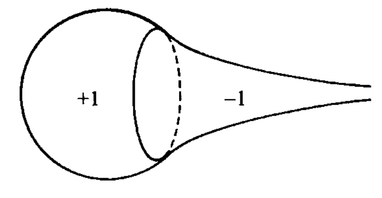


图 11.7.3

11.7.4 霍普夫公式

在 7.7.6.1 曾经提到对于紧致的 X 上的有

$$\chi(X) = \sum_i \operatorname{indice}_{x_i} \xi,$$

其中 ξ 是紧致的 X 上的任意向量场. 当时我们承认这个公式. 这里它容易从 10.5.5.4 的证明和随之的注得到. 于是有双重公式

$$\boxed{\int_X K(m)\cdot \mathrm{d}\,m = 2\pi\chi(X) = \sum_i \mathrm{indice}_{x_i}\xi}\,.$$

一个直接推论是: 如果 S 是浸入到 $\mathbf{R}^3$ 的曲面; 那么如同 S 是球面或实投影平面那样, 它总是至少有一个脐点 (参见 10.6.4). 事实上, 如果不是这样, 在每个点将有明确定义的主方向, 并且由于正交性, 是不同的主方向. 在定向的情形, 就得到一个在 S 上处处非零的向量场, 从而没有求指标的点, 于是 $\chi(S)=0$, 得到矛盾. 在不定向的情形, 取可定向的覆叠映射.

$\mathbf{R}^3$ 的一个旋转环面不存在任何脐点. 反之一个年代久远的仍然没有得到回答的猜想是: 在同胚于 S^2 的嵌入到 $\mathbf{R}^3$ 内的一个曲面 S 上, 总是至少有两个脐点. 参见 [89].

11.8 曲面上的等周不等式

在一个 (X,g) 上是否存在 9.3 节的对于平面区域的经典等周不等式的推广? 即我们考虑 X 的一个区域 Ω, 其边界是 $C=\partial\Omega$, 我们要寻找长度 $\mathrm{Long}(C)$ 和面积 $\mathrm{Aire}\,(\Omega)$ 之间的一个不等式.

11.8.1 典范球的情形

以下结果归功于施密特: *在 S_1^2 的所有具有给定面积的区域 Ω 中, 球冠 (即度量圆盘) 的边界的周长最小, 并且这是仅有的形状.*

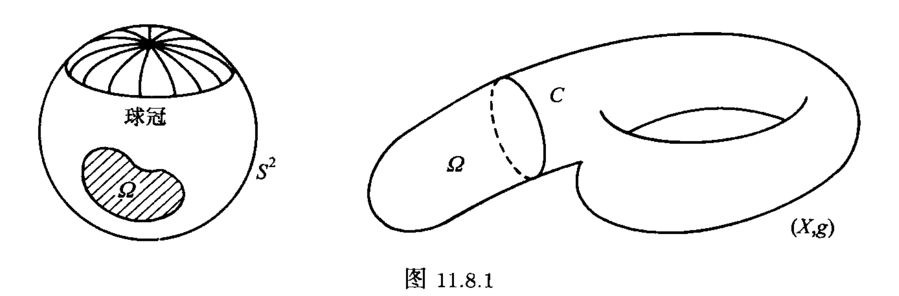


图 11.8.1

这里证明的方法不同于 9.3; 而在于推广施泰纳在平面上使用的对称化到球面上, 参见 [40], 这是因为 S^2 具有对于每个大圆的对称性, 而相应的对称变换是等距的.

11.8.2 一般情形

希望有一个在非常一般情形下的不等式是不切实际的. 诚然 11.8.1 直接推广到 $S_k^2(k>0)$, 但其中的常数自然依赖于 k. 此外, 图 11.8.2 中的哑铃表明, 不仅曲率, 连直径也应该出现在等周不等式中.

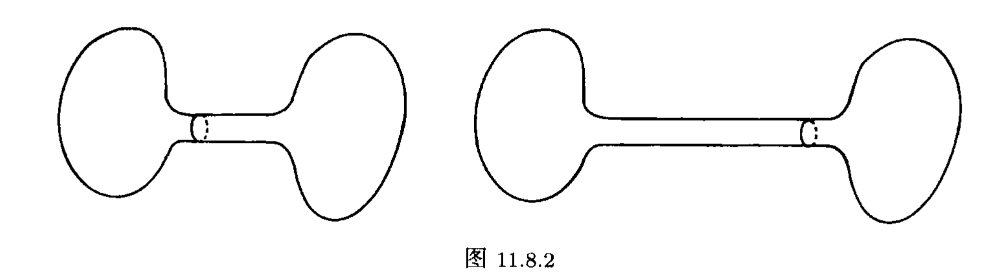


图 11.8.2

不过, 我们有最优的答案: 存在一个三变量的数值函数 Univ$(\cdot,\cdot,\cdot)$, 使得下面的不等式成立. 设 (X,g) 是紧致的任意黎曼曲面, Ω 是 X 的任意区域, 而 $C=\partial\Omega$ 是其边界曲线. 则如果 (X,g) 满足 $K\geqslant k$, 就有

$$\mathrm{Long}\,(C)\geqslant \mathrm{Univ}\,(\mathrm{Aire}\,(\Omega),\mathrm{Diam}\,(g),k).$$

此外, 这个不等式是最佳的. 在 $k>0$ 的情形, 达到最佳的极限流形是球面, 而区域是球冠. 在 $k\leqslant 0$ 的情形, 极限流形是奇异的, 它由粘接两个平面或双曲圆盘得到. 想法是取面积给定的一个区域, 而其边界尽可能短. 这就蕴涵此边界是 "广义圆周", 即 (X,g) 的一条曲线, 其测地曲率是常数. 接着计算支撑在这个边界上的 Ω 的面积, 它以平凡的方式由推广 11.5.3 的不等式控制. 参见 [72] 和 [86].

11.8.3　等周轮廓

我们用这个概念来阐明当 $k\leqslant 0$ 时问题的困难. 一个紧致的 (X,g) 的等周轮廓是这样的函数, 它令在 0 和 (X,g) 的全面积 A 之间的每个实数 a 对应 (X,g) 的面积等于 a 的区域的边界的长度的下确界. 在图 11.8.3 中我们画了 S^2, $P^2(\mathbf{R})$ 和一个平坦环面的等周边界函数. 对于平坦环面情形是这样的: 当 a 小时, 最优的区域是圆盘, 当 a 达到某个值时, 最优区域变成带形 (其边界是测地线, 有常高斯曲率零).

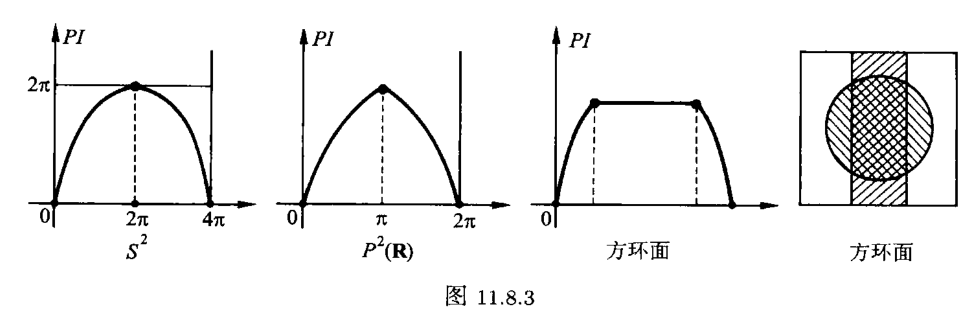


图 11.8.3

关于曲面上的等周不等式的更多内容, 参见 [60].

11.9　周期测地线和等收缩不等式

考虑 $\mathbf{R}^3$ 中的一个有洞的曲面, 用最大的力抻紧的鞋带勒住该曲面, 而不致使之摆脱. 在极限状态下, 鞋带就成了曲面 S 上的周期测地线. 一般的结果是: 在 (X,g)

的每个自由同伦类中, 如果此类不是平凡的, 存在最小长度的一条周期测地线, 它不退缩为一个点. 我们仅考虑紧致情形, 否则下面的示意图表明这时无望得到什么结果.

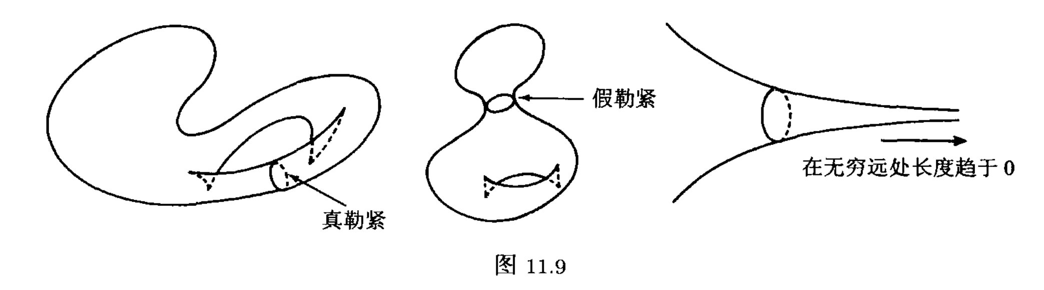


图 11.9

我们定义非单连通的一个 (X,g) 的收缩是 X 的不同伦于 0 的最短周期测地线的长度, (X,g) 的收缩记为 $\mathrm{Sys}(g)$.

图形暗示收缩给定后, 面积 $\mathrm{Aire}(g)$ 不可能太小. 此外, 洞越多, 面积也越大. 换句话说, 面积随拓扑复杂性而增加. 以下是我们目前所知道的等收缩不等式.

11.9.1 洛纳不等式

对于 $X=T^2$, 对于所有 g, 我们有 $\mathrm{Aire}(g)\geqslant(\sqrt{3}/2)\,\mathrm{Sys}^2(g)$; 此外, 当且仅当 (X,g) 等距于等边环面时等号成立, 所谓等边环面就是对应于在 11.2.4 定义的六边形网格的环面.

11.9.2 普不等式

对于 $P^2(\mathbf{R})$ 上的所有 g, 我们有 $\mathrm{Aire}(g)\geqslant(2/\pi)\,\mathrm{Sys}^2(g)$; 当且仅当 g 是 11.2.4 的椭圆度量时等式成立.

11.9.3 格罗莫夫不等式

对于所有有 γ 个洞的曲面 X 和 X 上的所有 g, 总有 $\mathrm{Aire}(g)>c(\gamma)\,\mathrm{Sys}^2(g)$, 其中 $c(\gamma)$ 是仅依赖 γ 的正实数, 并且随 γ 趋于无穷.

11.9.4 巴瓦德不等式

对于克莱因瓶, 巴瓦德 (参见 [151]) 前不久用最佳不等式 $\mathrm{Aire}(g)\geqslant(2\sqrt{2}/\pi)\,\mathrm{Sys}^2(g)$ 解决了相应问题. 但等式仅对于一个有奇异性的曲面成立, 它由粘接两个默比乌斯带得到, 二者都等于 S^2 的由距离赤道 $\leqslant\pi/4$ 的点形成的子集对于对径的商.

对于前述所有内容, 基础参考文献是 [53]; 维数 $\geqslant 3$ 的流形的情形就困难得多了.

11.9.5 克罗克不等式

即使 X 是单连通的, 即如果 X 是球面 S^2, 还是可以有 "内蕴等周不等式", 即对于流形本身, 而无需考虑它的区域. 该不等式说: 对于 S^2 上的所有的 g:

$$\mathrm{Aire}(g)>\frac{1}{961}L^2.$$

其中 L 表示最短 (不退缩为一个点的!) 周期测地线的长度. 事实上, 在所有曲面上, 即使它是单连通的, 总存在周期测地线, 参见 [43]. 给出的常数不是最优的; 人们猜测最优常数是 $1/(2\sqrt{3})$, 并且被由两个等腰三角形以平凡的方式粘接成的奇异曲面达到. 参见 [95]. 还可参见 [155].

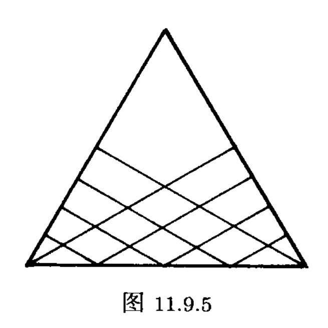


图 11.9.5

11.10　只有周期测地线的曲面

我们注意到在典范球面 S^2 上所有测地线是周期的, 并且有最小周期等于 2π. 此外, S^2 是对径的, 也就是说, 所有点 m 的割迹退化成一个点, 即它的对径点. 一个具有第一个性质的流形 (X,g), 说它是 $P1$ 的, 如果具有第二个性质, 则说它是 $SP1$ 的.

所有的测地线都是周期的, 并不先天就注定它们都有同一个最小周期. 在任意维数情形一般这是不成立的, 参见 [45], 185 页. 但是, 格罗莫尔和格罗夫 (Grove) 新近证明 ([54]) 对于曲面这总是正确的.

11.10.1　具有性质 $P1$ 的可能的曲面

除 S^2 之外, 我们还知道对于 $P^2(\mathbf{R})$ 上的椭圆几何, 也有性质 $P1$. 球面和实投影平面是仅有的可能的流形. 因为通过连续转动测地线的切向量到它的反向向量, 就会发现所考虑的流形的基本群只能是平凡的或仅有两个元素. 由于曲面显然是紧致的, 在 4.2.25 的分类中仅留下了 S^2 和 $P^2(\mathbf{R})$ 这两种选择.

11.10.2　两个惊异

第一个是在 S^2 上存在许多非一般性的黎曼度量, 它们是 $P1$ 的. 迈克尔指出这类的旋转度量正是

$$\mathrm{d}\,s^2=(1+h(\cos r))\mathrm{d}\,r^2+\sin^2 r\mathrm{d}\,\theta^2,$$

其中的 h 是从 $(-1,1)$ 到本身的奇函数.

事实上, 正如吉勒敏所指出的, 还存在许多这类度量, 它确定了 S^2 上的对于所有 $P1$ 度量的集合在典范度量下的切空间. 这个切空间同构于 S^2 上所有奇函数 f 的集合, 其中 $f:S^2\to\mathbf{R}$, 使得 $f(-x)=-f(x)$.

仅此而已, 关于这个集合人们再也不知道更多东西. 它是连通的吗? 等等.

第二个惊异在于对于 $P^2(\mathbf{R})$, 情形则截然不同: 格林证明了 $P^2(\mathbf{R})$ 上的 $P1$ 黎曼结构必然是典范的 (带常高斯曲率). 注意在前面的叙述中, 总是做好了规范化. 最后注意一个明显的事实: 通过一个有两叶的覆叠, S^2 上的 $SP1$ 结构和 $P^2(\mathbf{R})$ 上的 $P1$ 结构之间有等价性. 对于本节的所有内容, 参考文献是 [45].

11.11 两部分间的过渡: 嵌入和浸入问题

11.11.1 拓扑问题

为了完整起见, 我们指出两个非度量问题. 第一个是实投影平面 $P^2(\mathbf{R})$, 因为它是不可定向的, 决不能嵌入到 $\mathbf{R}^3$ 内 (参见 [55]). 但是它可以浸入到 $\mathbf{R}^3$ 内, 这在 10.2.4 已经提到.

第二个是令人惊奇的现象: 通过浸入的一个连续序列, 可以把 S^2 的标准嵌入翻转成其对置, 对于 "球面的翻转", 特别参见 [96].

11.11.2 度量问题

设 (X, g) 是给定的黎曼曲面, 为了简单化, 假定它是紧致的. 它总能等距地被嵌入或浸入到 $\mathbf{R}^3$ 中吗? 未必: 事实上, 所有这样的曲面至少有一个点 m, 使得 $K(m) > 0$. 为了确信这个结果: 把它的图像放在一个球面内, 并且让图像内切于球面. 在切点, 应当有 $K \geqslant 1/R^2$, R 是球面的半径.

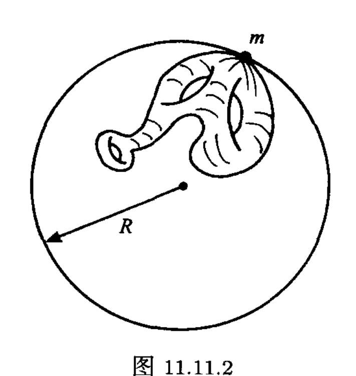


图 11.11.2

除此之外, 我们能说的只是关于这个极其自然的问题我们还一无所知. 理由是关于最初等的问题的现实的不确定性: 设 (X, g) 是一个黎曼曲面, $m \in X$. 是否存在含 m 的一个如此小的开集 U, 使得 $(U, g|_U)$ 是等距的嵌入到 $\mathbf{R}^3$ 内的.

今天我们知道的是: 如果 $K(m) > 0$, 这总是可能的, 如果 $K(m) < 0$ 也如此 (这就直接蕴涵在实解析的情形, 不加任何限制这总是可能的); 最近, C. S. 林刚刚证明: 如果 K 的微分在 m 不等于零: $\mathrm{d}K(m) \neq 0$ 或如果 $K \geqslant 0$, 并且可微性至少是 C^{10} 的, 则是可能的. 而波戈列洛夫构造了一个 C^2 类的反例. 关于这些内容, 参见 [97], [156], [157]. 对于嵌入和等距浸入的问题, 参见 [98] 和 [99].

11.11.3 正高斯曲率的情形

反之, 外尔、亚历山德洛夫、尼伦伯格和波戈列洛夫等人的相继地锲而不舍地努力, 终于证明了:

定理 设 g 是 S^2 上的黎曼度量, 它使得处处有正的高斯曲率. 则它存在一个到 $\mathbf{R}^3$ 内的等距嵌入.

在 11.14.1, 我们将会发现这个嵌入不计整个 $\mathbf{R}^3$ 的等距, 是唯一的.

至于高斯曲率处处为负的情形, 参见 11.15 节.

第二部分
嵌入或浸入到 $\mathbf{R}^3$ 内的曲面

11.12 零曲率的曲面

这里有一个典型的例子, 局部推不出整体. 我们曾经在 10.6.6.2 看到, 所有 $K \equiv 0$ 的曲面局部地是可展的; 即它是沿每条直母线有同一切平面的直纹面. 但是, 构造局部怪异的即性质变化的曲面是容易的: 可以用 C^∞ 方式把锥面块或柱面块衔接到一块平面上:

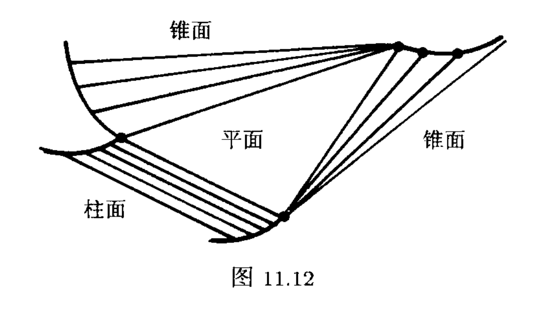


图 11.12

所发生的事情是: 这个曲面 $S \subset \mathbf{R}^3$ 的第二基本形式 II 的秩从 0 跳跃到 1: 当 K 是零时, 它绝对不会等于 2. 此外, 上面的图在 $\mathbf{R}^3$ 中不是闭的, 所得到的曲面不是完备的. 可以料想: 如果一个可展曲面不是柱面并且是完备的, 根据在 10.2.3.9 所说的, 它应当部分地展开一条腰曲线. 近来, 已经有了明确的结论:

11.12.1 哈特曼 – 尼伦伯格定理

$\mathbf{R}^3$ 的一个完备的并且高斯曲率为零的曲面必定是一个柱面.

证明是精细的; 1959 年的这个结果仅仅是显示 19 世纪的几何和当代几何的不同风貌的一个例子. 注意这个结果是在利布曼的结果 (参见 11.14 开头) 六十年之后

问世的, 尽管后者似乎更加困难.

11.13 高斯曲率为正或零的曲面

我们考虑浸入到 $\mathbf{R}^3$ 内的一个紧致抽象曲面 X, 并且假定它的高斯曲率 $K \geqslant 0$. 我们能谈论什么呢? 根据 11.7.1, 我们知道, X 只能是球面, 投影平面或克莱因瓶. 但是 11.11.2 排除了后两种可能性, 对于它们, 11.7.1 表明应该是处处有零高斯曲率. K 处处为正的情形由阿达马在 1898 年解决:

11.13.1 定理

设紧致的 X 浸入到 $\mathbf{R}^3$, 并且高斯曲率处处为正, 则事实上 X 嵌入到 $\mathbf{R}^3$ 内, 并且在那里是一个严格凸体的边界 (如果需要, 参见 [40], 第 11 章).

证明既十分美丽, 又非常简单, 以致我们难以割舍. 如果 X 是可定向的 (随之 S^2 作为流形也是定向的), 考虑在 10.3.3 定义的高斯映射 $\nu : X \to S^2$. 高斯曲率为正的条件恰好说明 ν 的秩是最大值 2. 根据 4.1.5, 因此这是一个覆叠映射. 但是 S^2 是单连通的, 映射 ν 是双射的. 我们看到这蕴涵 X 在 $\mathbf{R}^3$ 内的像整个在其切平面的一侧, 由此根据 [40], 11.5.5 得到结论. 非定向的情形更容易证明, 留给读者.

11.13.2 推广

我们可以致力于降低条件推广阿达马定理, 或者是紧致性, 或者是把 $K > 0$ 换为 $K \geqslant 0$. 两个降低都是不允许的, 请看直立在带重点的浸入的平面曲线上的柱面.

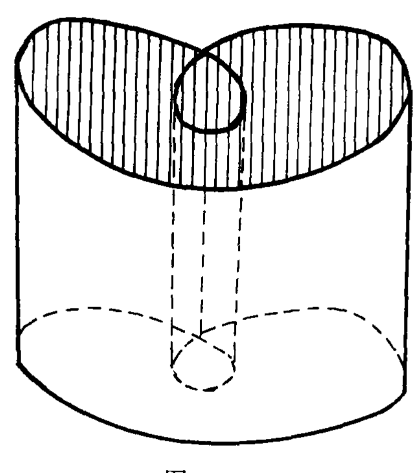


图 11.13.2

这是恰当时机, 注意到类似于 11.13.1 的定理在平面情形是不成立的, 而在任意维数 $n \geqslant 2$ 为真. 理由在于圆周与球面 $S^n (n \geqslant 2)$ 相反不是单连通的. 关于这一主题, 参见我们在 9.6 对于曲线整体凸性所做的研究.

多亏陈 – 拉肖夫, 斯托克, 和 Do 卡莫 – 里马的共同努力, 得以有了 11.13.1 的最佳推广: *或者假设 X 是紧致的, 并且 $K \geqslant 0$, 或者 X 是任意的, 而 $K \geqslant 0$, 并且至*

少在一个点 $m \in X$ 有 $K(m) > 0$, 则 11.13.1 的结论保持有效 (参见 [41], 387 页).

11.14 唯一性和刚性

在 10.2.3 和 10.5.3.10 我们曾经遇到局部等距的曲面, 但是不能通过整个 $\mathbf{R}^3$ 的等距从一个变到另一个. 更一般地, 众多的曲面是局部地可等距变形的, 参见 [63] 的第 12 章, 对应的偏微分方程组是欠定的. 不过, 一般情形仍然尚未解决. [63] 是对于本节内容的基本参考文献, 还可参见 11.14.2.

反之, 可以问一问这类例子是否整体地存在, 尤其是在考虑紧致曲面时. 历史上, 第一件要做的事情是关注球面 S^2. 里布曼在 1899 年首先指出 $\mathbf{R}^3$ 的所有等距于 S^2 的曲面是半径为 1 的球面. 这是以下十分美丽的定理的一个非常特殊的情形:

11.14.1 定理 (科恩 – 沃森, 赫格洛茨)

设 S 和 S' 是 $\mathbf{R}^3$ 的两个等距的曲面, 并且它们的高斯曲率 K 是严格正的. 则存在 $\mathbf{R}^3$ 的一个等距映射 f, 使得 $f(S) = S'$.

这个结果容易从在 11.19.1.6 给出的赫格洛茨公式得到. 注意这个公式本质上利用了科达齐 – 马伊纳尔迪方程, 参见 10.7. 还要提起, 根据 10.8, 一个这样的结果当维数 $n \geqslant 3$ 时是平凡的.

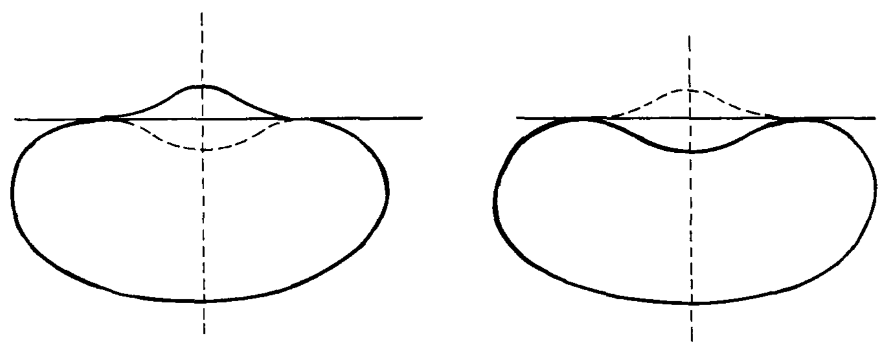


图 11.14.1

由图 11.14.1 中的两条经线生成的两个旋转曲面表明, 在 11.14.1 中限制 $K > 0$ 是本质的. 反之, 我们还不知道任何这样的实解析的两个等距的紧致曲面的例子. 仍然要参见 [63] 的第 12 章.

11.14.2 形变和刚性

反之, 可以发问 S 和 S' 是否可以像在 10.2.3.6 中那样, 经由彼此等距的曲面的一个连续族从一个形变为另一个. 甚至可以发问, 要求更低些, 是否 S (或 S') 是柔性的, 也就是说, 是否存在包含 S 的一个带一个参数的曲面族, 使得它们的 $\mathrm{d}s^2$ 的一阶导数在 S 是零. 甚至对于 S^2 拓扑类型的 (自然是非凸的) 曲面, 问题也没有解决. 对于所有这些问题, 以及部分结果, 参考十分完备的文献 [57], 还有 [63]. 然而这

还是令人惊讶, 一些曲面不是可等距形变的, 虽然局部地是可等距形变的. 下面这个著名的例子是叶非莫夫提出的, 这就是曲面

$$(x, y, x^9 + \lambda x^7 y^2 + y^9),$$

只要 λ 是超越数. 参见 [146], 389 页. 还可查阅 [147].

把关于曲面的这个问题同 $\mathbf{R}^3$ 的多面体的刚性形变问题作比较是饶有兴味的. 一个多面体是柔性的, 如果可以用一个操作形变它, 在该操作中, 只有沿着棱的二面角可以像在 10.6.2 中那样变化. 从 1813 年起,柯西证明了对于多面体的 11.14.1 的类似定理: *两个凸并且等距的多面体可以通过整个空间的等距从一个变化为另一个.* 对于未必凸的多面体, 问题直到 1978 年才有了转机, 是年柯奈利发现一个柔性的多面体: 参见 [40], 12.8.4.2. 但是还不知道柔性多面体是否保持一个常值体积. 对于所有这些内容, 参见 [40] 及其所附文献.

考虑多面体的另一个益处在于亚历山德洛夫和波戈列洛夫有许多结果, 在对于凸曲面的研究中, 使用了多面体逼近, 参见 [40], 12.9 和 [57].

11.14.3 有洞曲面

在 S^2 上挖去北极和南极, 这样就得到一个非完备的曲面 X. 从 10.5.3.10.1 的图的中间的纺锤形出发, 波戈列洛夫成功地构造了无穷多个从 X 到 $\mathbf{R}^3$ 内的等距浸入 (这里曲面带常曲率等于 1). 甚至可以用去掉 $\geqslant 2$ 的有限个点的球面作同样的事情. 作为补偿, 格林纳和吴最近证明了这些浸入决不会是嵌入. 直观地看, 应当对于覆盖多次的类似于 10.5.3.10 的纺锤形寻找浸入. 参见 [58].

11.15 $K<0$ 的曲面

好奇的读者不免会问, 为什么在 11.2, 我们引进了带坐标的双曲平面, 而非把它定义为一个嵌入 $\mathbf{R}^3$ 里的 (美丽) 曲面. 贝尔特拉米曲面, 10.5.3.10 末尾的更一般的曲面, 仅表示了其片断, 在其上看到出现曲线, 涉及的不再是子流形, 而是带奇异性的对象. 这委实可惜, 但这首先解释了为什么双曲几何要等待黎曼到 1854 年利用 11.2.2 的公式来创建. 其次, 由于下列定理, 这也是不可避免的:

11.15.1 定理 (希尔伯特, 1901)

$\mathbf{R}^3$ 内的任何曲面, 即使是嵌入到 $\mathbf{R}^3$ 内的, 都不可能具有负的常高斯曲率.

这个结果曾经被叶非莫夫推广到变高斯曲率的情形:

11.15.2 定理

在 $\mathbf{R}^3$ 内没有浸入曲面使得 $K \leqslant k$, 其中 k 是一个负实数.

证明的要点在于利用曲面的完备性指出, 从一个点出发并前进充分远, 必然会出现奇异性, 而且在任意方向都如此, 这样就得到一条带奇异性的曲线, 像在贝尔特拉米曲面上所具有的那种曲线. 对于证明, 参见 [59].

11.16 平均曲率为零的曲面, 又名极小曲面

我们要求解整体极小曲面: 10.6.9.2. 局部极小曲面用途之一是解决普拉托问题: 求边界是空间一条给定的曲线的有绝对极小面积的曲面. 在这一节, 我们要完全忘却这个问题; 对它感兴趣的读者可以参阅卓越的文献 [61], 它包含了当时的最新结果.

我们现在所关心的仅仅是 $\mathbf{R}^3$ 的平均曲率处处为零的曲面: $H \equiv 0$. 它们为数众多吗? 它们的几何是什么样的? 除去平面这一明显的解之外, 我们还提到: 10.2.1.3 的谢尔克曲面; 10.6.6.6.3 的悬链面, 它是仅有的旋转极小曲面; 10.6.6.5 的方螺纹螺旋面, 它是仅有的直纹极小曲面; 10.6.6.3 的恩尼珀曲面 (它仅是浸入的); 10.2.3.6 的 "属于魏尔斯特拉斯" 的曲面. 后者是充分一般的.

我们要指出上述问题的一些激动人心的结论, 而另外一些结论则推荐读者参阅 [61].

11.16.1 几何

内蕴几何就隐藏在 11.6 节里: 事实上, 关系 $H = (k_1 + k_2)/2 = 0$ 蕴涵 $K = k_1k_2 \leqslant 0$.

11.16.2 紧致性

不存在任何紧致极小曲面: 事实上, 11.11.2 的图形指出在点 m 的两个主曲率 $k_1 \geqslant 1/R$ 和 $k_2 \geqslant 1/R$, 于是 $H \geqslant 1/R > 0$.

11.16.3 伯恩斯坦定理

这个定理说如果极小曲面定义在整个平面 $\mathbf{R}^2$ 上, 则它是 $\mathbf{R}^3$ 中的平面. 这其实是关于 10.6.9 的偏微分方程 $(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t = 0$ 的解的一个结果. 请与谢尔克曲面比较.

11.16.4

作为交换, 存在三重周期的极小曲面, 即它对于 $\mathbf{R}^3$ 的平移群 $\mathbf{Z}^3$ 是不变的. 甚至从中可以找到带六个参数的曲面族. 参见 [61] 的 17 节, 那里, 为了解决此问题而动用了复变中的黎曼曲面, 超椭圆曲线和阿贝尔积分的理论.

11.16.5 具有给定对称性的曲面

存在这样的极小曲面, 其拓扑类型可以随心所欲的复杂. 为了得到一个十分简单的例子, 在 11.16.6 推广的魏尔斯特拉斯公式里, 取函数 $f(Z)$, 它定义在除去单位的 n 次根的整个平面上:

$$f(Z) = (Z^n - 1)^{-2}, \quad \nu(Z) = Z^{n-1}.$$

当 $n = 2$ 时, 就得到 10.2.3.6 的悬链面, 而当 $n = 3$ 时, 就得到图 11.16.5 所示的曲面.

11.16.6 一般公式

可以推广公式 10.2.3.6, 一般得到所有极小曲面. 仅仅指出作为出发点的思路 (详情请参见 [61]). 根据 10.4.2, 在曲面上总存在保形坐标; 进一步假设 X 是可定向

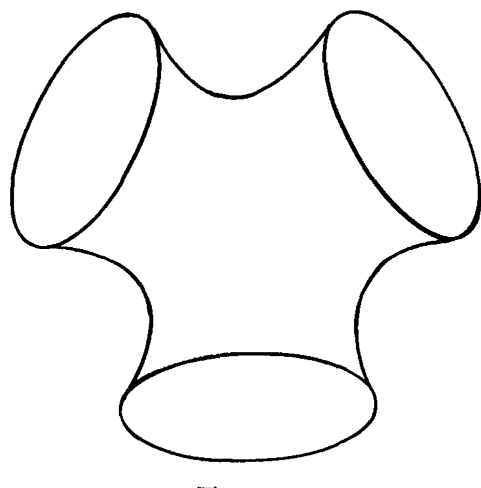


图 11.16.5

的, 并且浸入到 $\mathbf{R}^3$ 内. 在 X 上定义一个复 (全纯) 结构, 使得旋转 $\pi/2$ 相当于乘以 $i=\sqrt{-1}$ (在 X 上已经定义了与定向关联的度量). 这就是说 X 现在是一个黎曼曲面. 此外, 我们还有它的高斯映射 $\nu: X \to S^2$. 在 10.6.9 我们已经知道: 如果 X 是极小曲面, 则这个映射是保形的; 这就是说, 如果把 S^2 看作带复结构的黎曼曲面, 那么 ν 是一个全纯 (复解析) 映射. 采用这套语言, 所有浸入极小曲面 X 有明晰地由

$$x = \mathrm{Re}\left[\int_{Z_0}^{Z} F(Z)(1-\nu^2(Z))\mathrm{d}\,Z\right], \quad y = \mathrm{Re}\left[\int_{Z_0}^{Z} iF(Z)(1+\nu^2(Z))\mathrm{d}\,Z\right],$$

$$z = 2\mathrm{Re}\left[\int_{Z_0}^{Z} F(Z)\nu(Z)\mathrm{d}\,Z\right],$$

定义的坐标. 这里变量 Z 自然是在黎曼曲面上, 而 Z_0 是在其上取定的一个点. 一般写法让我们得到许多结果. 下面略举一二.

11.16.7 全曲率

我们将在浸入 (不排除嵌入) 极小曲面 X 上, 考虑积分

$$\mathrm{Courbtot}\,(X) = \int_X K(\nu)\mathrm{d}\,\nu.$$

由于 $K \leqslant 0$, 值 $-\infty$ 是允许的. 根据 10.6.2.2 这个值是高斯映射的像 $\nu(X)$ 的面积的负值, 不过像在 7.5.4 那样要计算面积的重复度.

这里有几个基本的结果应该归功于奥瑟曼. 这个 Courbtot (X) 或者是负无穷大, 或者是有限数, 这时它必须是 -4π 的正整数倍数. 此外, -4π 仅在两个有明确表达式的极小曲面达到:悬链面和恩尼珀曲面. 还有: 一般情形下, ν 在 S^2 中的像 $\nu(X)$ 覆盖 S^2, 至多除去 6 个点 (这属于哈维尔). 而如果 Courbtot (X) 是有限的, 则至多遗漏 3 个点. 要知道更多结果, 请参见 [61].

11.17 平均曲率是常数的曲面或肥皂泡曲面

我们在 10.6.9 已经知道研究平均曲率 H 为常数的曲面的两个动机. 一个是物理学的, 另一个在于证明等周不等式. 我们现在在整体曲面的情形下考虑它们, 并致力于回答存在性和唯一性问题. 这需要在紧致的情形下进行, 因为否则的话, 我们在 10.6.9.6 已经有了德洛内曲面.

11.17.1 球面情形

首先要问的是, 在球面以外, 是否还存在 H 是常数的紧致曲面? 1899 年以来, 针对高斯曲率 K 处处为正的情形, 里布曼就以否定方式回答了这个问题 (参见 11.14). 所用方法是下节所用方法的一个特殊情形, 并且经过希尔伯特的推广. 在广泛运用科达齐 - 马伊纳尔迪方程 (参见 10.7) 之后人们指出曲面的所有点都是脐点. 再应用 10.6.4 末尾的结论: 即使在局部情形下, 球面是仅有的其所有点都是脐点的曲面.

11.17.2 亚历山德洛夫定理和霍普夫定理

现在如果取消条件 $K>0$, 并且同时允许所有类型的拓扑, 情形将会怎样? 在 1955 年, 亚历山德洛夫证明了所有嵌入到 $\mathbf{R}^3$ 的曲面 S, 如果它是紧致的, 并且其平均曲率 H 是常数, 则它必是球面. 证明非常困难; 它把分析和几何交织在一起, 在那里得出结论: 所有方向都是 S 的一个对称平面的法向量的方向. 参阅卓越的文献 [62], 以及 [64] 的第 9 章 (补遗).

不久以后, 在 1956 年,霍普夫在文献 [62] 里证明了, S^2 的所有带常数平均曲率的浸入都是一个球面. 证明同样是艰难的; 它用到以下事实: S^2 作为黎曼曲面, 不允许有非平凡的二次微分.

11.17.3 温特浸入

直到 1984 年才解决的一个问题是, 是否存在非正亏格的并且平均曲率为常数的紧致曲面? 温特构造了环面 T^2 的浸入, 它具有常平均曲率. 一般的样子酷似 10.2.4 中的图形. 可以参阅文献 [90] 和 [128].

11.17.4 威尔莫猜想

为了简单, 我们如此表述它: 在一个紧致曲面 S 上, 考虑平均曲率平方的积分 $\int_S H^2(v)\mathrm{d}v$. 什么时候这个泛函达到它的极小值? 了解这样的事实是有好处的: 这个积分不仅在位似变换下不变, 对于 $\mathbf{R}^3$ 的保形群 (由反演生成的群, 参见 [40], 第 10 章和第 18 章) 也是不变的. 如果 S 是球面 S^2, 根据 11.7.4, 并且由于 $H^2 \geqslant K$, 答案是简单的. 当且仅当 S 是球面时, 该积分达到最小值.

反之, 如果 S 是环面 T^2, 我们就显得茫然. 威尔莫在 1965 年猜想这个积分总超过 $2\pi^2$ (被 "方" 环面达到). 这个猜想仍然悬而未决; 在 [100], 有一个部分的回答. 还必须知道 L. 西蒙不久前证明了实际上最小值被 $\mathbf{R}^3$ 的 C^∞ 紧致曲面达到.

11.17.5 对于给定常平均曲率的曲面的边界问题: 雷利希猜想

我们几乎没有涉及这类问题, 见 11.16 的引言. 不过这里指出一个新的现象: 决

不会有唯一性. 事实上, 考虑 $\mathbf{R}^3$ 内的一个圆周; 那么总有一个有给定平均曲率的球面, 使得此圆周环绕其上. 于是有两个解以此圆周作边界. 通常有 “大汽泡” 和 “小汽泡”. 对于至少一个解的存在性, 存在众多结果, 但是雷利希的猜想, 在于存在另一个解. 这个猜想不久前被布来吉斯和科龙解决, 参见 [101].

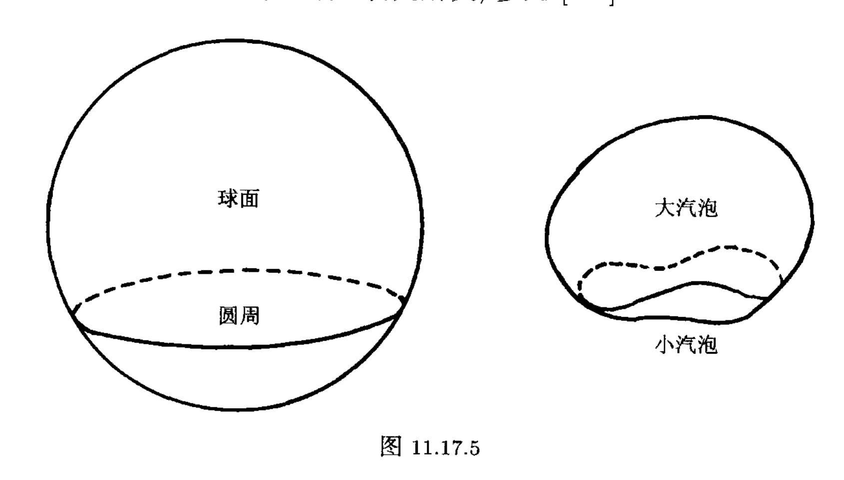


图 11.17.5

11.18 魏因加滕曲面

设 k_1 和 k_2 是一个曲面的两个主曲率. 对于曲面我们曾经遇到: 所有点都是脐点: $k_1 = k_2$. 极小曲面: $k_1 = -k_2$. 平均曲率为常数的曲面: $k_1 + k_2 =$ 常数. 还在 10.6.6.6.2 见到过对于一个旋转椭球面 k_1^3/k_2 是常数. 最后对于管道曲面我们有 $k_1=$ 常数, 参见 10.2.3.12, 10.6.8.2.3 和 2.7.6. 换句话说, 在所有这些情形下, 在 k_1 和 k_2 之间存在一个普适关系.

11.18.1 定义

给定一个曲面, 如果存在两个变量的一个 C^∞ 函数 $U(\cdot,\cdot)$, 使得对于我们的曲面的所有 v, $U(k_1(v), k_2(v)) = 0$, 则称之为**魏因加滕曲面**.

从 10.6.6.6 推出所有旋转曲面是魏因加滕曲面. 但还有许多魏因加滕曲面, 并非旋转曲面. 比如, 管道曲面. 以前面的例子作基础, 通过粘接, 就可以随心所欲地 (在 C^∞ 范围内) 构造拓扑类型复杂的魏因加滕曲面. 首先可以取一个任意的结和关联的管道曲面. 其次还可以构造带任意数目的洞的紧致曲面: 只需知道如何在球面上安上一个柄以组合成 “魏因加滕曲面”, 进而可以安上任意有限个柄. 为此, 下面的图 11.18.1 表明, 在球面 S^2 上沿一个圆周剜去一块, 沿此圆周衔接一块德洛内曲面 (参见 10.6.9.6), 再在后者上衔接一个管形 (管道曲面), 最后以同样方式返回到 S^2.

11.18.2 $K > 0$ 的情形

对于魏因加滕曲面的仅有的整体结果是下面这个: 如果 S 是一个 $K > 0$ 的曲面, 并且它不是球面; 则在 S 上不存在这样的点 v, 同时使得 $k_1(v)$ 是 S 上的最大值,

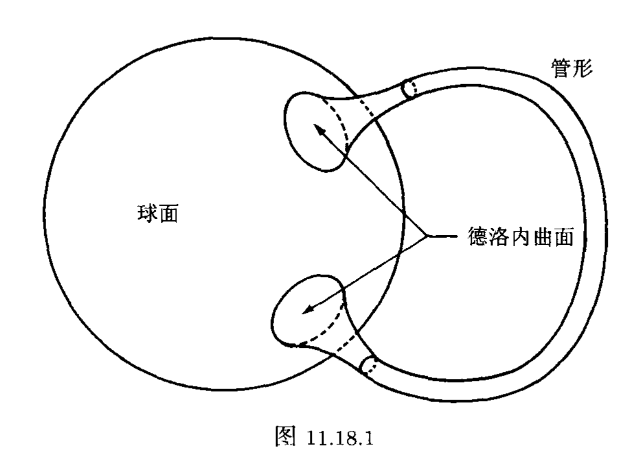


图 11.18.1

而 $k_2(v)$ 是 S 上的最小值.

证明可系统地利用 10.7.2 中写出的科达齐 - 马伊纳尔迪公式.

推论　设 S 是 $K>0$ 的魏因加滕类型的曲面, 使得处处有 $k_1=f(k_2)$, f 是递减函数. 则 S 是一个球面.

11.14 和 11.17.1 的结果是这里的特殊情形.

11.18.3　一般情形

对于整体情形, 比如实解析魏因加滕曲面, 我们一无所知. 而在局部情形, 在 10.6.8.4, 我们已经见识了一个美丽的公式. 在 [38], 322 页, 甚至会发现讨论满足关系

$$\frac{2}{k_1}-\frac{2}{k_2}=\sin\left(\frac{2}{k_1}+\frac{2}{k_2}\right)$$

的曲面族.

11.19　作为平面族的包络的曲面: 公式和应用

在 10.2.3.13 我们已经知道如何定义 $\mathbf{R}^3$ 的一个曲面 S 作为两个参数的平面族的一个包络. 实际上, 我们这里仅仅跟严格凸曲面打交道. 在把空间的原点固定在 S 的内部. 支撑函数 p 是从原点到 S 的切平面的距离; 可以把它看作 S 上的一个函数, 或通过高斯映射把它看作单位球面 S^2 上的函数, 在我们当前的情形下, 由于严格凸性, 这是一个双射. 在 10.2.3.13 曾经有过公式, 由它通过函数 $p:S^2\to\mathbf{R}_+$ 给出 S 的切平面 $P(\xi)$ 上的切点 $\nu(\xi)$. 同样, 高斯曲率函数 K 和平均曲率函数 H 以同样方式在 S 上或 S^2 上表示.

欧拉问题是在知道作为曲线的切向量的函数的曲率函数之后, 求该曲线: 10.2.3.13. 这里有两个自然的问题, 一个是对于高斯曲率 K (闵可夫斯基问题), 另一个是对于平均曲率 (克里斯托费尔问题). 首先需要几个公式.

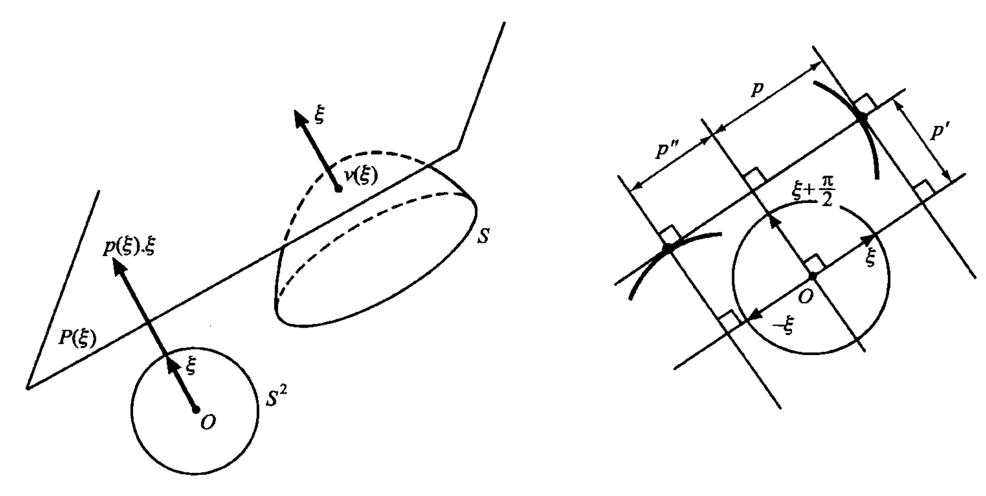


图 11.19

11.19.1 公式

平均曲率是容易计算的. 延拓定义在 S^2 上的函数 p 到 $\mathbf{R}^3$ 上, 使得它是 1 次齐次的: $p(t\cdot\xi)=tp(\xi)$. 那么就有

11.19.1.1
$$2H(\nu(\xi))=\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}\right)(\xi)$$

(即 $H=-\Delta p/2$, Δ 是 $\mathbf{R}^3$ 的拉普拉斯算子). 对于 $K(\nu(\xi))$ 有 (下标表示求导):

$$[K(\nu(\xi))]^{-1}=(p_{xx}p_{yy}-p_{xy}^2)+(p_{yy}p_{zz}-p_{yz}^2)+(p_{zz}p_{xx}-p_{zx}^2).$$

借助斯托克斯公式, 偶尔还有科达齐 - 马伊纳尔迪公式, 我们得到

11.19.1.2
$$A=\mathrm{Aire}(S)=\int_S p(v)H(v)\mathrm{d}\,v\quad(\text{闵可夫斯基}),$$

11.19.1.3
$$M=\int_S H(v)\mathrm{d}\,v=\int_S p(v)K(v)\mathrm{d}\,v\quad(\text{闵可夫斯基}),$$

11.19.1.4
$$\int_{S^2}K(v(\xi))^{-1}\xi\mathrm{d}\,\xi=0\quad(\text{对于 }\xi\text{ 的向量积分, 而 d}\xi\text{ 是 }S^2\text{ 的典范测度}),$$

11.19.1.5
$$\int_{S^2}H(v(\xi))\xi\mathrm{d}\,\xi=0\quad(\text{对于 }\xi\text{ 的向量积分}).$$

最后是涉及 $\mathbf{R}^3$ 的两个曲面 S 和 S' 的十分细腻的赫格洛茨公式, 如果它们通过抽象映射 $\varphi:S\to S'$ 是等距的, 则

11.19.1.6
$$2\int_S H(v)\mathrm{d}\,v-2\int_S H'(\varphi(v))\mathrm{d}\,v=\int_S k(S;S')(v)\mathrm{d}\,v,$$

其中 k 是用 S 和 S' 的第二基本形式计算的一个混合量, 准确地说:

$$k(S;S') = \det{}^{-1}(I)({}^tI)^{-1}[\varphi^*(II') - (II)]I^{-1},$$

其中 "′" 表示在 S' 上的量, 而关于 I 的量是第一基本形式的矩阵 (在任意坐标系里, 结果是不变的).

11.19.2　第一批应用

读者容易从闵可夫斯基的两个公式的联合应用得到结论: 球面是仅有的 K 或 H 是常数的曲面 (参见 11.14 和 11.17.1).

赫格洛茨公式证明 11.14.1 的刚性; 事实上, II 和 II' 在两个曲面的对应点有相等的行列式, 因为这是它们的高斯曲率, 并且它们之间存在等距映射. 由于考虑的是 2 维情形, 这就蕴涵在通过 φ 对应的点的迹的不等式, 由此得到 $k(S;S')$ 总是正的或零. 于是就容易地推出结论.

11.19.3　闵可夫斯基问题

这个问题是求一个曲面 S, 其在 S^2 上的函数 $\xi \mapsto K(v(\xi))$ 是给定的 (比较 11.11.3). 唯一性已经由闵可夫斯基证明, 他利用和推广了上面的公式的混合积分. 存在性的证明异常困难. 注意 11.19.1.4 提供了三个数值的必要条件.

多亏鲁伊和尼伦伯格, 他们证明了这个问题的解在这些仅有的条件下总是存在的; 这里涉及的是分析. 关于文献和上面公式的证明, 参见 [63] 的第 11 章. 至于最近的文献, 参见 [105].

11.19.4　克里斯托费尔问题

这个问题是在 S^2 上给定了函数 $\xi \mapsto H(v(\xi))$ 时求 S. 公式 11.19.1.1 的简单性, 让人猜想这个问题是简单的, 至少比闵可夫斯基问题会更简单. 事实上, 让我们想一想平面曲线问题. 诚然首先有 9.5.2 的积分条件: 曲率的积分取值 2π. 这里我们有向量积分 11.19.1.5 给出的三个数值的必要条件. 但是在第九章有四顶点定理: 9.7.4, 它表明曲率不可能是圆周 S^1 上的任意函数. 当维数 > 2 时, 它是什么样的函数?

对于这样的更高的维数, 答案随之更加复杂. 在形形色色的部分的解答出现之后, 费雷伊在 1968 年成功地给出了必要并且充分的条件 (不只是上面的向量积分的条件), 使得给定的函数 H 是一个曲面的平均曲率. 这些条件过分复杂, 以致我们连陈述结果都不大可能; 建议读者参见 [102].

我们最后指出曲面的曲率的严格正值的条件 (或严格凸性) 在两个问题里是本质的, 正如图 11.19.4 所提供的反例:

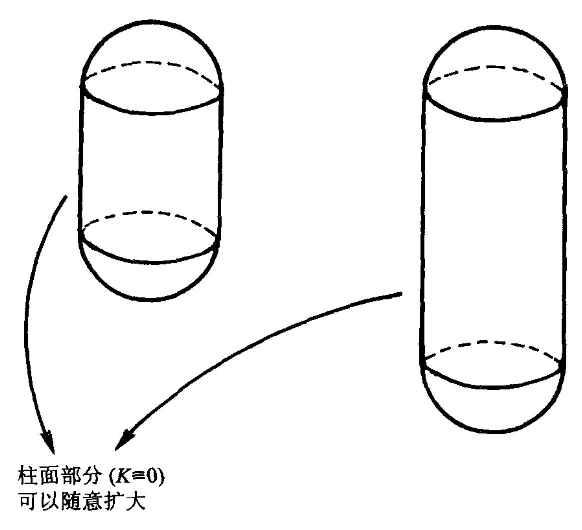


图 11.19.4

11.20 对于曲面的等周不等式

考虑一个紧致曲面 S, 它是一个区域 Ω 的边界 $S=\partial\Omega$. 可以推广等周不等式 9.3 到这种状况下吗? 回答是肯定的, 并且是对于任意维数. 这是一个经典的结果, 比如参见 [40], 12.11 或本书 6.6.9 或 [86].

11.20.1 闵可夫斯基不等式

记 Ω 的体积为 V, S 的面积为 A. 我们知道有

$$A^3 \geqslant 36\pi V^2,$$

等式仅对于球面才成立.

闵可夫斯基精细化了这个不等式, 引进了第三个要素, 这就是 11.19.1.3 中的平均曲率的积分 M. 他证明了双重不等式:

$$\frac{A^4}{9V^2} \geqslant M^2 \geqslant 4\pi A.$$

并且正如人们所期望的那样, 如果其中的一个不等式成立, 则这个曲面必定是球面. 对于证明和到任意维数的推广, 参见 [86], [67], [103].

11.20.2 半-管形的体积

设 S 是 $\mathbf{R}^3$ 的一个准紧致曲面; 在 10.6.3 我们曾经指出包含在距离 S 为 ε 的两个平行曲面之间的体积等于

$$\mathrm{Vol}\,(TUB^{\varepsilon}S) = 2\varepsilon \mathrm{Aire}\,(S) + \frac{2}{3}\varepsilon^3 \int_S K(v)\mathrm{d}\,v.$$

而包含在 S 和与之距离为 ε 的一个平行曲面之间的体积等于多少呢? 回答是

$$\varepsilon \operatorname{Aire}(S)+\varepsilon^2 M+\frac{1}{3}\varepsilon^3\int_S K(v)\mathrm{d}\,v.$$

通过求差就重新给出前面的公式. 请注意 M 的符号显然依赖 S 的侧, 在该侧, 沿单位法向量截取距离 ε (参见 10.3.3).

上面的公式不难由 10.6.6.7 和 10.6.9.1 证明. 它有种种推广, 而推广了 H 和 K 的积分的不变量是基本的, 称它们为里赤茨 - 基灵曲率. 我们在 6.9 节已经遇到了偶指标的这种曲率. 关于这一主题, 参见 [47].

11.21 花束: 球面和迪潘四次圆纹曲面的表征

我们现在汇总前面得到的主要是关于球面的结果和与之关联的一些其他结果.

11.21.1 球面的局部表征

所有局部曲面, 如果

A) 其所有点都是脐点,

B) 或其至少一个焦散面退化为一个点,

C) 或它对于 $\mathbf{R}^3$ 的等距的带三个参数的局部群是不变的

则它必定是球面的一块.

在 10.6.4 已经见到了 A). 对于 B) 我们仅指出其第二个焦散面也同样退化为一个点, 此点就是球面的中心.

11.21.1′ 外在和内蕴等距

到目前为止, 事实上我们尚未谈论过等距. 领会 C) 是容易的. 顺便指出, 旋转柱面的片是仅有的对于 $\mathbf{R}^3$ 的等距的带两个参数的局部群不变的曲面. 在带一个参数的局部群的情形, 就会发现所有的螺旋形曲面, 作为特例, 包含旋转曲面是不变的曲面.

前面谈的都是外在等距. 现在谈论内蕴等距, 情形将会怎样呢? 所谓内蕴等距, 就是从曲面 V 到它自身的映射, 它保持第一基本形式 $g=\mathrm{d}\,s^2=I$. 如果存在一个这样的局部群并且至少带两个参数, 则 V 是局部齐性的, 从而高斯曲率是常数. 随之它有一个带三个参数的等距的局部群. 这样一来, 仅有的情形是: 出现三个, 一个或零个参数. 零个参数的情形, 曲面是一般曲面. 最后看一个参数的情形. 不变曲线的考虑表明 (11.3.2 的第一变分公式) 曲面的正交轨线必定是测地线, 它们之间的变换由所考虑的群实现. 于是如果取关联的测地线坐标, $\mathrm{d}\,s^2$ 的形式是

$$\mathrm{d}\,s^2=\mathrm{d}\,r^2+J^2(r)\mathrm{d}\,\theta^2.$$

即 J 不依赖于 θ. 由 10.5.3.10 的技术立刻表明一个这样的 $\mathrm{d}\,s^2$ 总可以由一个旋转曲面的第一基本形式 (局部地) 等距地实现.

11.21.2 球面的整体表征

这里仅考虑 $\mathbf{R}^3$ 的紧致曲面 V.

A) 如果 V 的所有截面是圆周, 则 V 是一个球面;

B) 如果对于所有直线的方向, 与之关联的外切于 V 的柱面沿一个圆周与之相切, 则 V 是一个球面;

C) 如果 V 的所有点都有一个对径点, 则 V 是一个球面 (结合 11.10 和 11.14);

D) 在包围的区域具有给定体积的曲面中, 如果 V 达到面积的最小值, 则 V 是一个球面;

E) 在面积给定的曲面中, 如果 V 实现平均曲率的积分的最小值, 则 V 是一个球面;

F) 在具有给定面积的曲面中, 以及在具有给定体积的曲面中, 如果 V 实现平均曲率的积分的最大值, 则 V 是一个球面;

G) 如果 V 同胚于 S^2, 并且实现平均曲率的平方的积分的最小值, 则 V 是一个球面 (参见 11.17.4);

H) 在满足处处 $K \geqslant 1$ 这个条件的曲面中, 球面是仅有的内蕴直径等于 π 的曲面 (参见 11.5.4)

I) 在给定体积的曲面中, 球面是仅有的外在直径最小的曲面;

J) 球面是仅有的高斯曲率是常数的曲面, 要了解更一般的结果, 参见 11.18.2;

K) 球面是仅有的平均曲率是常数的嵌入曲面.

除 A) 外, 上面这些结果我们在前文中都碰到过, A) 的证明留给读者. 对于 B), 推荐参考下文; H) 也留给读者 (参见 11.5.4); 最后的 I) 是比伯巴赫的一个结果. 总体的参考文献是 [110]. 在 [40], 9.13.8 也可以找到比伯巴赫不等式, 但不涉及其逆命题.

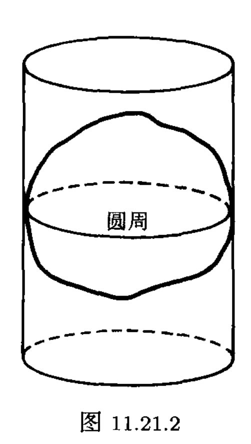


图 11.21.2

11.21.3 球面的非特征的整体性质

A) 在 11.21.2 B) 已经知道外切于一个球面的柱面沿一条平面曲线与之相切: 这个性质属于所有椭球面, 而事实上是二次曲面的特征: 参见 [110].

B) 在 11.10 已经知道了球面以外的曲面, 它们的所有测地线都是周期的;

C) 球面是*常宽度的*. 一个曲面 V 沿一个给定方向的宽度, 是切于 V 的以这个方向为法方向相距最远的 (V 非凸时才需这个限制) 两个平面之间的距离. 实际上这就是说给定空间的两个固定平行平面后, 球面可以在其间以两个自由度移动. 其实这是一个很弱的条件: 利用 11.19 的支撑函数 p 的说法, 这仅仅是要求 $p(\xi)+p(-\xi)=$ 常数. 关于这个主题的一个最近的报告是 [111].

D) 但是球面还有*常腰围*. 即对于所有方向, 外切柱面的准线有常周长. 换句话说, 在一个给定的纸做的曲面里, 可以以两个自由度移动球面 (柱面随之形变). 跟前一个一样, 这也是一个很弱的性质. 它等价于前一个性质, 参见 [110].

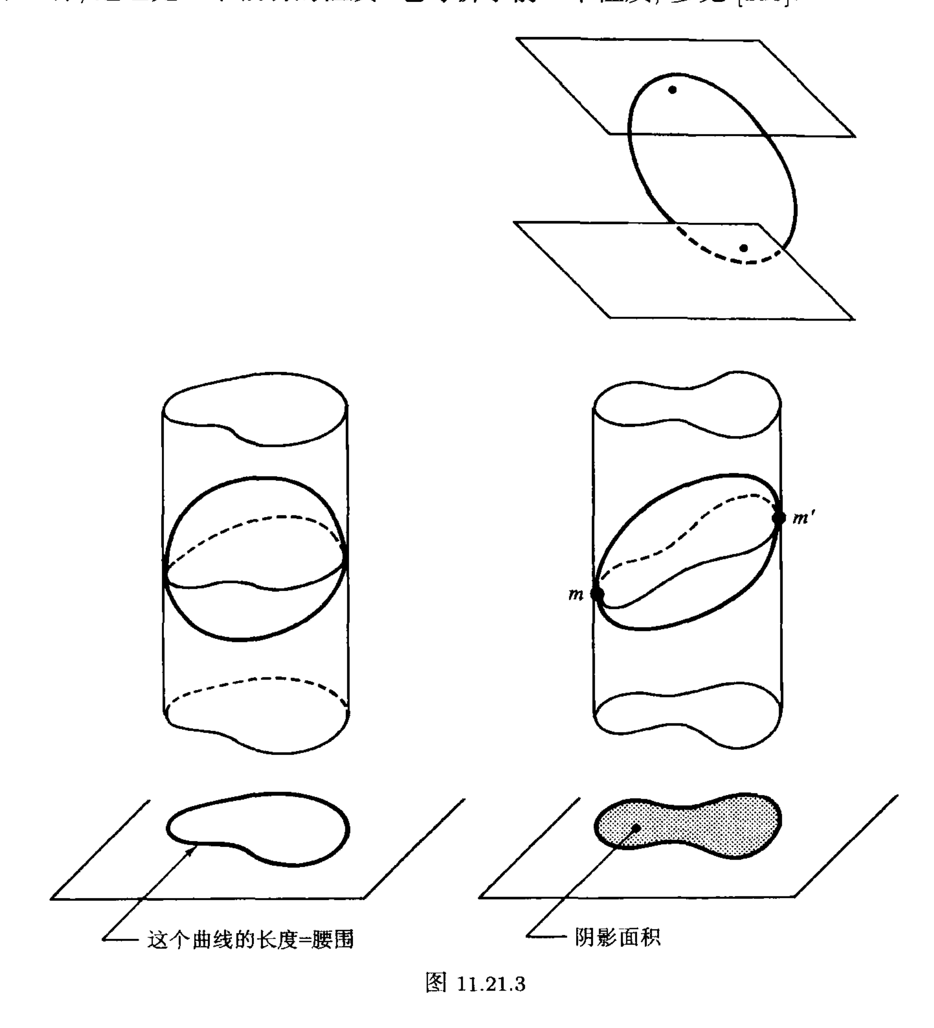


图 11.21.3

E) 球还有*常阴影面积*. 这也是一个弱的性质. 重要的是要知道它联系着柯西的对于凸集的重要公式, 参见 [86], [103], [14], 16.24, 问题 4 或 [40], 12.10.2. 一个符合我们的想法的结果是: 对于一个常阴影面积的曲面, 在位于平行切平面上的两个点

m, m', 总有 $K(m) + K(m') =$ 常数. 参见 [110], 153 页.

11.21.4 迪潘四次直纹面的特征性质

A) 在五球面坐标下, 这是二次的 (并非全部, 参见 [40], 20.7.2 和本书前面的 10.2.2.6);

B) 这是旋转柱面, 旋转锥面和旋转环面的反演图形;

C) 局部地这是这样的曲面, 其两个焦散面退化为两条曲线;

D) 班朝夫的一个十分精细的结果说, 在 $\mathbf{R}^3$ 的紧致曲面中的这类曲面可以如下表征: 当用空间的任意一个球面切割它时, 补集总是至多有两个连通分支.

对于 D), 以及对于 C) 到高维迪潘四次直纹面的推广, 特别要参见 [113], [114], [115], [152], [153] 以及 [114] 的文献.

参考文献

[1] H. CARTAN, *Calcul différentiel*, Hermann.
[2] J. DIXMIER, *Cours de Mathématiques du Premier Cycle*, 2e année, Gauthier-Villars.
[3] N. BOURBAKI, *Algèbre*, chap. 3, Hermann.
[4] J. DIXMIER, *Cours de Mathématiques du Premier Cycle*, 1re année, Gauthier-Villars.
[5] H. CARTAN, *Formes différentielles*, Hermann.
[6] A. GUICHARDET, *Calcul intégral*, A. Colin.
[7] S. LANG, *Analysis* II, Addison-Wesley.
[8] J. DIEUDONNÉ, *Foundations of Modern Analysis*, Academic Press.
[9] S. LANG, *Analysis* I, Addison-Wesley.
[10] M. SPIVAK, *Differential Geometry*, vol. I, Brandeis University, Michael Spivak.
[11] S. STERNBERG, *Lectures on Differential Geometry*, Prentice Hall.
[12] J. MILNOR, *Morse Theory*, Princeton University Press.
[13] M. GREENBERG, *Lectures on Algebraic Topology*, Benjamin.
[14] J. DIEUDONNÉ, *Eléments d'Analyse*, t. III, Gauthier-Villars.
[15] I. SINGER and J. THORPE, *Lecture Notes on Elementary Topology and Geometry*, Scott, Foresman & Co.
[16] S. HU, *Differentiable Manifolds*, Holt-Rinehart-Winston.
[17] H. WEYL, On the volume of tubes, *Amer. J. Math.*, 61 (1939), p. 461-472.
[18] S. KOBAYASHI and K. NOMIZU, *Foundations of Differential Geometry*, vol. II, John Wiley.
[19] J. MILNOR, *Topology from the differentiable viewpoint*, University Press of Virginia.
[20] L. BLUMENTHAL and K. MENGER, *Studies in Geometry*, Freeman & Co.
[21] M. SPIVAK, *Differential Geometry*, vol. II, Brandeis University, Michael Spivak.
[22] H. CARTAN, *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*, Hermann.
[23] R. ABRAHAM and J. ROBBIN, *Transversal mappings and flows*, Benjamin.
[24] H. FEDERER, *Geometric measure theory*, Springer.
[25] E. A. FELDMAN, Deformations of closed space curves, *J. of Diff. Geom.*, 2 (1968), p. 67-75.
[26] N. KUIPER, Minimal total absolute curvature for immersions, *Inventiones math.*, 10 (1970), p. 209-238.

[27] W. Pohl, The self-linking number of a closed space curve, *J. of Math. and Mechanics*, 17 (1968), p. 975-986.

[28] M. Barner und F. Flohr, Der Vierscheitelsatz und seine Verallgemeinerungen, *Der Mathematikunterricht*, heft 4/58, p. 43-73.

[29] J. Lelong-Ferrand, *Géométrie différentielle*, Masson.

[30] E. Jones, *A generalization of the two-vertex theorem for space curves*, preprint, Wisconsin State University.

[31] H. Gluck, The converse to the four vertex theorem, *L'Enseignement mathématique*, 17 (1971), 295-309.

[32] S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry*, vol. I, John Wiley.

[33] N. Hicks, *Notes on Differential Geometry*, Van Nostrand.

[34] J. N. Hilliard, *La prestidigitation au XXe siècle : tours divers*, Payot.

[35] F. W. Warner, *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Scott & Foresman.

[36] G. Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. 1, 2e éd., Paris, Gauthier-Villars, 1914 ou New York, Chelsea, 1972.

[37] G. Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. 2, 2e éd., Paris, Gauthier-Villars, 1915 ou New York, Chelsea, 1972.

[38] G. Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. 3, Paris, Gauthier-Villars, 1894 ou New York, Chelsea, 1972.

[39] G. Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. 4, Paris, Gauthier-Villars, 1896 ou New York, Chelsea, 1972.

[40] M. Berger, *Géométrie*, 5 vol., 2e éd., Paris, CEDIC-Nathan, 1977-1978 ou *Geometry*, 2 vol., Springer, 1986.

[41] M. Do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice Hall, 1976.

[42] R. Osserman, *A survey of minimal surfaces*, Van Nostrand, 1969.

[43] W. Klingenberg, *Riemannian Geometry*, de Gruyter, 1982.

[44] H. Knörrer, Geodesics on the Ellipsoid, *Inventiones Mathematicae*, 59 (1980), p. 119-143.

[45] A. Besse, *Manifolds all of whose Geodesics are Closed*, Springer, 1978.

[46] P. Dombrowski, 150 Years after Gauss, *Astérisque*, Paris, SMF, 1979.

[47] J. Cheeger, W. Müller, R. Schrader, On the curvature of piecewise flat manifolds, *Comm. Math. Phys.*, 92 (1984), p. 405-454.

[48] J. Stoker, *Differential Geometry*, Wiley, 1969.

[49] J. Eells, *On the surfaces of Delaunay and their Gauss maps*, preprint, Warwick University.

[50] S. Wolpert, The topology and geometry of the moduli space of Riemann surfaces, Arbeitstagung Bonn 1984, *Lecture Notes in Mathematics*, n° 1111, Springer, p. 431-451.

[51] H. von Mangoldt, Über diejenigen Punkte auf positiv gekrümmten Flächen, welche die Eigenschaft haben, daß die von ihnen ausgehenden gesdätischen Linien nie aufhören, kürzeste Linien zu sein, *Crelle's J.*, 91 (1881), p. 23-52.

[52] J. Wolf, *Spaces of Constant Curvature*, Berkeley, J. A. Wolf, 1972.

[53] M. Gromov, Filling Riemannian Manifolds, *Journal of Differential Geometry*, 18 (1983), p. 1-147.

[54] D. Gromoll et K. Grove, On Metrics on S^2 all of whose Geodesics are Closed, *Inventiones Math.*, 65 (1981), p. 175-177.

[55] M. Greenberg, *Lectures in Algebraic Topology*, Benjamin, 1967.

[56] A. Gramain, *Topologie des Surfaces*, Paris, PUF, 1971.

[57] A. Pogorelov, *Extrinsic Geometry of Convex Surfaces*, Translations of the AMS, 1973.

[58] R. Greene et H. Wu, On the Rigidity of Punctured Ovaloïds. II, *J. of Differential Geometry*, 6 (1972), p. 459-472.

[59] T. Klotz-Milnor, Efimov's Theorem About Complex Immersed Surfaces of Negative Curvature, *Advances in Math.*, 8 (1972), p. 474-543.

[60] R. OSSERMAN, The isoperimetric inequality, *Bull. AMS*, 84 (1978), p. 1182-1238.

[61] W. MEEKS III, A survey of the geometric results in the classical theory of minimal surfaces, *Bol. Soc. Bras. Mat.*, 12 (1981), p. 29-86.

[62] H. HOPF, Differential Geometry in the Large, *Lecture Notes in Mathematics*, n° 1000, Springer, 1983.

[63] M. SPIVAK, *Differential Geometry*, vol. 5, Publish or Perish, 1975.

[64] M. SPIVAK, *Differential Geometry*, vol. 4, Publish of Perish, 1975.

[65] M. SPIVAK, *Differential Geometry*, vol. 3, Publish or Perish, 1975.

[66] B. O'NEILL, *Elementary Differential Geometry*, Academic Press, 1966.

[67] R. WALTER, *Differentialgeometrie*, Mannheim, BI.-Wissenschafsverlag, 1978.

[68] G. VALIRON, *Equations fonctionnelles et applications*, Paris, Masson, 1945.

[69] W. KLINGENBERG, *Eine Vorlesung über Differentialgeometrie*, Springer, 1973 ; *A course in differential geometry*, Springer, 1978.

[70] S. WOLPERT, The topology and geometry of the moduli space of Riemann surfaces, dans Arbeitstagung Bonn 1984, *Lecture Notes in Mathematics*, Springer, 1985, p. 431-451.

[71] R. GUNNING, Lectures on Riemann Surfaces, *Mathematical*, notes n° 2, Princeton University Press, 1962.

[72] P. BÉRARD, *Lectures on Spectral Geometry*, Rio de Janeiro, IMPA, 1985, et *Springer Lecture Notes in Mathematics*, n° 1207, 1980.

[73] I. CHAVEL, *Eigenvalues in Riemannian Geometry*, Academic Press, 1985.

[74] J. THORPE, *Elementary Topics in Differential Geometry*, Springer, 1979.

[75] D. LEHMANN et C. SACRÉ, *Géométrie et Topologie des surfaces*, Paris, PUF, 1982.

[76] E. ROUCHÉ et Ch. de COMBEROUSSE, *Traité de géométrie*, t. 2, Paris, Gauthier-Villars, 1912.

[77] J. EELLS, *On the surfaces of Delaunay and their Gauss maps*, preprint, Warwick University, 1978.

[78] Travaux de Thurston sur les Surfaces, Séminaire Orsay, *Astérisque*, n°s 66-67, Paris, Société Mathématique de France, 1979.

[79] M. BERGER, P. GAUDUCHON, E. MAZET, Le spectre d'une variété riemannienne, *Lecture Notes in Mathematics*, n° 194, Springer, 1971.

[80] M. BUCHNER, The structure of the cut-locus in dim $\leqslant 6$, *Compositio Math.*, 37 (1978), p. 103-119.

[81] C. T. C. WALL, Geometric properties of generic differentiable manifolds, dans *Geometry and Topology*, *Lecture Notes in Mathematics*, n° 597, Springer, 1979.

[82] C. CROKE, Curvature free volume estimates, *Inventiones Math.* 76 (1984), p. 515-521.

[83] D. GROMOLL et W. MEYER, On complete open manifolds of positive curvature, *Annals of Math.*, 90 (1969), p. 75-90.

[84] M. GROMOV, *Structures métriques pour les variétés riemanniennes*, rédigé par J. LAFONTAINE et P. PANSU, Paris, CEDIC-Nathan, 1981.

[85] J. CHEEGER, M. GROMOV, On the Characteristic Numbers of Complete Manifolds of Bounded Curvature and Finite Volume, *Differential Geometry and Complex Analysis*, Springer, 1985, p. 115-154.

[86] J. BURAGO et V. ZALGALLER, *Geometric Inequalities*, Springer.

[87] C. BAVARD et P. PANSU, *Sur le volume minimal de* $\mathbf{R}^2$, à paraître aux Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure.

[88] M. GROMOV, Volume and Bounded Cohomology, *Publications Mathématiques* de l'IHES, n° 56.

[89] C. TITUS, A proof of a conjecture of Loewner and of the conjecture of Caratheodory on umbilic points, *Acta Mathematica*, 131 (1973), p. 43-77.

[90] H. WENTE, A counter-example in 3-space to a conjecture of H. Hopf, Arbeitstagung Bonn 1984, *Lecture Notes in Mathematics*, Springer, 1985, p. 421-428.

[91] G. DARBOUX, *Principes de Géométrie analytique*, Paris, Gauthier-Villars, 1917.
[92] G. SALMON, *A treatise on the analytic geometry of three dimensions*, New York, Chelsea.
[93] J. SERRIN, On surfaces of constant curvature which span a given curve, *Math. Z.*, 112 (1969), p. 77-88.
[94] E. CARTAN, *Les problèmes d'équivalence*, Séminaire de Mathématiques, exposé D, 11 janvier 1937, ou *Œuvres complètes*.
[95] C. CROKE, Area and the length of the shortest closed geodesic, *J. Diff. Geometric*, 27 (1988) p. 1-22.
[96] B. MORIN et J.-P. PETIT, Le retournement de la sphère, dans *Les Progrès des Mathématiques*, Belin, Pour la Science, 1980, ou *Mathématiques d'Aujourd'hui*, Belin, Pour la Science, 1986.
[97] C.-S. LIN, The local isometric embedding in $\mathbf{R}^3$ of 2-dimensional Riemannian manifolds with non negative curvature, *J. Diff. Geometry*, 21 (1985), p. 213-230.
[98] M. GROMOV, V. ROKHLIN, *Embeddings and Immersions in Riemannian Geometry*, Russian Math. Surveys, 25 (1970), p. 1-57.
[99] M. GROMOV, *Partial Differential Relations*, Springer, 1986.
[100] P. LI et S.-T. YAU, A New Conformal Invariant and its Applications to the Willmore Conjecture and the First Eigenvalue of Compact Surfaces, *Inventiones Math.*, 69 (1982), p. 269-291.
[101] H. BRÉZIS et J.-M. CORON, Multiple Solutions of H-Systems and Rellich's Conjecture, *Comm. Pure and Appl. Math.*, 37 (1984), p. 149-187.
[102] W. FIREY, Christoffel's Problem for General Convex Bodies, *Mathematika*, 15 (1968), p. 7-21.
[103] K. LEICHTWEISS, *Konvexe Mengen*, Springer, 1979.
[104] L. HÖRMANDER, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators : I, II, III, IV*, Springer, 1985.
[105] V. OLIKER, Hypersurfaces in $\mathbf{R}^{n+1}$ with prescribed curvature and related equations of Monge-Ampère type, *Communic. in Partial Diff. Equat.*, 9 (1984), p. 807-838.
[106] J. COOLIDGE, *A history of the conic sections and quadric surfaces*, Oxford Univ. Press, 1945 ou Dover, 1968.
[107] R. PALAIS, On the differentiability of isometries, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 8 (1957), p. 805-807.
[108] J. SOTOMAYOR et C. GUTIERREZ, Structurally stable configurations of lines of principal curvature, dans *Astérisque*, n°ˢ 98-99, Soc. Math. France, 1982, p. 195-215.
[109] L. BÉRARD-BERGERY, J.-P. BOURGUIGNON et J. LAFONTAINE, Déformations localement triviales des métriques riemanniennes, *Proc. Symp. Amer. Math. Soc.*, 27 (1973), p. 3-32.
[110] W. BLASCHKE, *Kreis und Kugel*, Chelsea, 1949.
[111] G. CHAKERIAN et H. GROEMER, Convex Bodies of Constant Width, in *Convexity and its Applications*, edited by P. M. GRUBER and J. M. WILLS, Birkhaüser, 1983.
[112] L. EISENHART, *Transformations of Surfaces*, Chelsea, 1962.
[113] W. BLASCHKE, *Vorlesungen über Differentialgeometrie III*, Springer, 1929.
[114] U. PINKALL, *Dupin hypersurfaces*, preprint, Bonn, 1985.
[115] N. KUIPER, Geometry in Total Absolute Curvature Theory, dans *Perspectives in Mathematics*, Anniversary of Oberwolfach, 1984, Birkhaüser, p. 377-392.
[116] G.-H. HALPHEN, *Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications*, t. II, Paris, Gauthier-Villars, 1888.
[117] Y. CHOQUET-BRUHAT, *Géométrie différentielle et systèmes extérieurs*, Paris, Dunod, 1968.
[118] O. KOWALSKI, Additive volume invariants of Riemannian manifolds, *Acta Mathematica*, 145 (1980), p. 205-225.
[119] J. ALIAS, *La voie ferrée*, Paris, Eyrolles, 1984.

[120] Y.-C. WONG, On an explicit characterization of spherical curves, *Proceedings AMS*, 34 (1972), p. 239-242.
[121] T. OZAWA, *On Halpern's conjecture for closed plane curves*, à paraître.
[122] T. OZAWA, *The numbers of triple tangencies of smooth space curves*, à paraître.
[123] W. MASSEY, *Algebraic Topology : an Introduction*, Harcourt, Brace & World, 1967.
[124] W. THURSTON, Three-dimensional manifolds, Kleinean groups and hyperbolic geometry, *Bull. AMS*, 6 (1982), p. 357-381.
[125] S. DONALDSON, An application of gauge-theory to four-dimensional topology, *J. Differential Geometry*, 18 (1983), p. 279-316.
[126] S. KOBAYASHI and K. NOMIZU, *Foundations of Differential Geometry*, vol. II, John Wiley, 1969.
[127] A. BESSE, *Einstein Manifolds*, à paraître.
[128] U. ABRESCH, *Constant mean curvature tori in terms of elliptic functions*, Bonn, 1986.
[129] W. WUNDERLICH, Ueber ein abwickelbares Möbiusband, *Monatshefte Math.*, 66 (1962), p. 276-289.
[130] D. STRUIK, *Lectures on Classical Differential Geometry*, Addison-Wesley, 1961.
[131] J. CHAZY, *Dynamique des systèmes matériels*, Gauthier-Villars, 1953.
[132] HALPERN, WEAVER, Inverting a cylinder through isometric immersions and isometric embeddings, *Trans. AMS*, 230 (1977), p. 41-70.
[133] I. STERLING, *A generalization of a theorem of Delaunay to rotational W-hypersurfaces of σ_e-type in H^{n+1} and S^{n+1}*.
[134] J. LEMAIRE, *Hypocycloïdes et Epicycloïdes*, Paris, Vuibert.
[135] C. ZWIKKER, *The advanced geometry of planes curves and their applications*, Dover.
[136] J. LELONG-FERRAND et J.-M. ARNAUDIES, *Cours de Mathématiques*, t. 3, Paris, Bordas.
[137] R. OSSERMAN, *The four-or-more vertex theorem*, à paraître.
[138] M. BORN and E. WOLF, *Principles of optics*, Pergamon, 1970.
[139] C. CARATHÉODORY, *Geometrische Optik*, Springer, 1937.
[140] J. SYNGE, *Geometrical Optics*, Cambridge Univ. Press, 1937.
[141] E. MACH, *The principles of physical optics*, Dover, 1949.
[142] J. FERRAND, Les géodésiques des structures conformes, *CR Acad. Sc. Paris*, 294 (1982), p. 629-632.
[143] P. VENZI, Geodätische Abbildungen riemannscher Mannigfaltigkeiten, *Tensor*, 33 (1979), p. 313-321.
[144] E. CARTAN, *Leçons sur la théorie des espaces à connexion projective*, Gauthier-Villars, 1937.
[145] L. EISENHART, *Riemannian Geometry*, Princeton Univ. Press, 1949.
[146] H. JACOBOWITZ, Local isometric embeddings, dans *Seminar on Differential Geometry*, edited by S.-T. YAU, *Annals of Mathematical Studies*, n° 102, Princeton University Press, 1982, p. 381-394.
[147] S.-S. CHERN, Deformation of surfaces preserving principal curvatures, *Differential Geometry and Complex Analysis*, Springer, 1985, p. 155-164.
[148] F. APÉRY, à paraître.
[149] J. LELONG-FERRAND, *Les fondements de la géométrie*, Paris, PUF, 1985.
[150] M. GREENBERG, *Euclidean and non-euclidean Geometries*, Freeman, 1974.
[151] C. BAVARD, Inégalité isosystolique pour la bouteille de Klein, *Math. Annalen*, 274 (1986), p. 439-441.
[152] J. HEBDA, Manifolds admitting taut hyperspheres, *Pacific J. Math.*, 97 (1981), p. 119-124.
[153] T. BANCHOFF, The spherical two-piece property and tight surfaces in spheres, *J. Diff. Geometry*, 4 (1970), p. 193-205.

[154] D. Bennequin, dans *Séminaire Bourbaki*, p. 19-56, *Astérisque*, 133-134, Société Mathématique de France, 1986.
[155] E. Calabi, J. Cao, *Simple geodesics on convex surfaces*, à paraître.
[156] C.-S. Lin, The local isometric embedding of two-dimensional Riemannian manifolds with Gaussian curvature changing sign cleanly, *Communic. Pure and Appl. Math.*, 39 (1986), p. 867-887.
[157] A. V. Pogorelov, An example of a two-dimensional Riemannian metric not admitting a local realization in E_3, *Doklady Akad. Nauk USSR*, 198 (1971), p. 42-43.

法中术语对照

Abcisse curviligne 曲线横坐标
Accélération 加速度
Accroissements finis 有限增量
Aire 面积
Aire d'une courbe plane 平面 (闭) 曲线 (围) 的面积
Aire minima 极小面积
Aire minimale 最小面积
ALEXANDROV 亚历山德罗夫
Algèbre extérieure 外代数
Alysséide 庭芥花面 (悬链面)
AMPÈRE(théorème d') 安培定理
Anticommutative 反交换的
Antidérivation 反导子
Antipodes 对径点
Antipodie de S^d S^d 的对径映射
Antipodie de $\widetilde{X}$ $\widetilde{X}$ 的对径映射
Application bémol 降号 (表示的) 映射
~ bilinéaire symétrique 对称双线性映射
~ canonique 典范映射
~ conforme 保形映射
~ dièse 升号 (表示的) 映射
~ différentiabe 可微映射
~ étale 平展映射
~ exponentielle 指数映射
~ de GAUSS 高斯映射
~ géodésique 测地映射
~ k-lipschitzienne k-利普希茨映射
~ localement lipschitzienne 局部利普希茨映射
~ pied 底映射
~ tangente 切映射
~ ~ unitaire 单位切映射
Arc birégulier 双正则弧
~ de courbe 曲线弧
~ géométrique 几何弧
~ ~orienté 定向几何弧
~ paramétré 参数弧
~ ~ birégulier 双正则参数弧
ARCHIMÈDE(théorème d') 阿基米德定理
Arête de rebroussement 脊线
Associate 结合的

Astroïde 星形线
Asymptotique (direction) 渐近方向
Atlas 图册
~ compatible 相容的图册
Axiomes de la dérivée covariante 协变导数公理

Bande de MÖBIUS 默比乌斯带
Base positive 正基底
~ dénombrable 可数基底
BAVARD(inégalité de) 巴瓦德不等式
BELTRAMI 贝尔特拉米
Bémol 降号
BERNOUILLI(lemniscate) 伯努利双纽线
BERNSTEIN(théorème de) 伯恩斯坦定理
BERTRAND(courbes de) 贝特朗曲线
binormal 次法向量
birapport 交比
birégulier 双正则的
BONNESEN(inégalité de) 邦纳森不等式
Bord d'un domaine 区域的边界
~ d'une forme différentielle 恰当微分形式
Boules 球
Bouteille de KLEIN 克莱因瓶
BOY(surface de) 博依曲面
Branche 支
Bulles de savon 肥皂泡

Canal(surface) 管状曲面
Canonique(application) 典范映射
Canonique(champ de vecteurs) 典范向量场
Canonique(champ de vecteurs normal) 典范法向量场
Canonique(densité) 典范密度
Canonique(forme volume) 典范体积
Canonique(isomorphisme) 典范同构
Canonique(projection) 典范投影
Canonique(topologie) 典范拓扑
Caractéristique d'EULER 欧拉示性数
Cardioïde 心脏线
Carte 坐标卡
~ compatible 相容的坐标卡
~ complète 完整坐标卡
~ en x 在 x 的坐标卡
~ centrée en x 中心在 x 的坐标卡
~ positive 正的坐标卡
~ de $P^n(\mathbf{R})$ $P^n(\mathbf{R})$ 的坐标卡
Caténoïde 悬链面
CAUCHY(théorème d') 柯西定理
Caustique 焦散面
Centre de courbure 曲率中心
~ de gravité d'une courbe 曲线的重心
~ ~ d'un domaine 区域的重心
Cercle 圆周
~ osculateur 密切圆
Chaînette 悬链线
Champ de JACOBI 雅可比场
Champ de vecteurs canonique 典范向量场
~ ~ dépendant du temps 依赖时间的向量场
~ ~ normal canonique 典范法向量场
~ ~ rentrant 进入向量场
~ ~ sur un ouvert 开集上的向量场
~ ~ sur les sphères 球面上的向量场
~ ~ sur une variété 流形上的向量场
Champs de vecteurs(crochet) 向量场的括号积
Changement de variables 变量替换
Chemin(plus court) 最短路径
CHRISTOFFEL(problème de) 克里斯托费尔问题

Classe 类
Classification des courbes 曲线的分类
~ des surfaces 曲面的分类
~ des variétés 流形的分类
Codimension 余维数
COHN–VOSSEN 科恩 - 沃森
Cohomologie 上同调
Commutation de coulées 流的交换
Comparaison(théorème de SCHUR) 舒尔比较定理
Compatibles 相容的
Complète(surface) 完备曲面
Composantes intrinsèques de l'accélération 加速度的内蕴分量
Concavité 凹侧
~ vers le pôle 凹侧朝向该极点
Condition initiale 初始条件
Cône 锥面
Conforme(application) 保形映射
Conforme(coordonnées) 保形坐标
Coniques focales 焦点圆锥曲线
Conjecture de RELLICH 雷利希猜想
~ de WILLMORE 威尔莫猜想
Conjugué(point) 共轭点
Connexe(variété) 连通流形
Conoïde de PLÜCKER 普吕克劈锥曲面
Contact 接触
Continuité de l'intégale 积分的连续性
Continûment différentiable 连续可微的
Contractante 压缩的
Convexe 凸的
Convexe(polyèdre) 凸多面体
Convexe(surface) 凸曲面
Convexité locale 局部凸性
~ global 整体凸体
Coordonnées conformes 保形坐标
~ cylindriques 柱坐标
~ géodésiques 测地坐标
~ homogènes 齐次坐标
~ isothermes 等温坐标
~ de LIOUVILLE 刘维尔坐标
~ locales 局部坐标
~ orthogonales 正交坐标
~ polaires 极坐标
~ ~ géodésiques 测地极坐标
~ sphériques 球面坐标
~ de TCHEBYCHEV 切比雪夫坐标
~ terrestres 地理坐标
Cote 高度
Coulée locale 局部流
~ globale 整体流
Coupe 截断
Coupure(valeur) 割值
Courbe fermée 闭曲线
~ fermée orientée 定向闭曲线
~ fermée simple 简单闭曲线
~ intégrale 积分曲线
~ ~ maximale 最大积分曲线
~ d'un ouvert 开集里的曲线
~ sphérique 球面曲线
~ d'une variété 流形上的曲线
Courbes de BERTRAND 贝特朗曲线
Courbes fermées homotopes 同伦闭曲线
Courbure algébrique 代数曲率
~ ~ totale 全代数曲率
~ d'un arc géométrique 几何弧的曲率
~ d'un arc paramétré 参数弧的曲率
~ (centre) 曲率中心
~ d'un cercle 圆周的曲率
~ d'une courbe tracée sur une surface 画在 V 上的曲线的曲率
~ de GAUSS 高斯曲率

~ de GAUSS constante 常高斯曲率
~ géodésique 测地曲率
~ (lignes de) 曲率线
~ de LIPSCHITZ–KILLING 利普希茨 - 基灵曲率
~ de MENGER 门格曲率
~ moyenne 平均曲率
~ ~ constante 常平均曲率
~ normale 法曲率
~ négative 负高斯曲率
~ nulle 零高斯曲率
~ positive 正高斯曲率
~ principale 主曲率
~ ~(rayon de) 主曲率半径
~ (rayon) 曲率半径
~ scalaire 数值曲率
~ ~ totale 全数值曲率
~ sectionnelle 截断曲率
~ (tenseur) 曲率张量
~ totale 全曲率
~ ~ constante 常总曲率
Courbures de WEYL 外尔曲率
Covariante(dérivée) 协变导数
Critique 临界的
~ non-dégénéré 非退化临界的
Crochet 括号积
CROKE(inégalité de) 克罗克不等式
Cut–locus 割迹
Cyclides 四次圆纹曲面
~ de DUPIN 迪潘四次圆纹曲面
Cylindre 柱面
~ elliptique 椭圆柱面
~ hyperbolique 双曲柱面
~ parabolique 抛物柱面

DARBOUX 达布
Défaut isopérimétrique 等周亏损
~ de planéité 平面性的偏离
Déformation 形变
Degré 映射度
~ d'une application 映射的映射度
~ de l'application tangente 切映射的映射度
~ d'une forme différentielle 微分形式的阶
~ ~ extérieure 外型的阶
~ d'un morphisme 态射的映射度
DELAUNAY (surfaces de) 德洛内曲面
Demi–longue droite 半长直线
~ ~ transfinie 超限半直线
Demi–tube 半管形
Densité sur un espace vectoriel 向量空间上的密度
~ ~ un ouvert 开集上的密度
~ ~ une variété 流形上的密度
Densité canonique 典范密度
~ de classe C^p C^p 类密度
~ produit 乘积密度
Déplacement 位移
Dérivation 导子
~ sous le signe d'intégration 在积分号下求导数
Dérivée 导数
~ covariante 共变导数
~ de LIE 李导数
Déterminant 行列式
Deuxième forme fondamentale 第二基本形式
Développable(surface) 可展曲面
Développante 渐伸线
Développée 渐屈线
Diamètre 直径

Dièse 升号
Difféomorphisme 微分同胚
Différentielle 微分
~ (forme) 微分形式
~ extérieure 外微分
~ totale 全微分
Dimension d'une sous-variété 子流形的维数
~ d'une variété 流形的维数
DIQUET(formule de) 狄奎公式
Direction asymptotique 渐近方向
~ principale 主方向
Discrete 离散的
Distance 距离
Divergence 散度
Domaine 区域
~ convexe 凸区域
~ d'une coulée 流的定义域
~ d'une variété 流形的区域
~ de VORONOÏ 沃罗诺伊区域
Double(point) 重点
~(tangente) 重切线
Dual 对偶
DUPIN(cyclides de) 迪潘(四次圆纹曲面)
~ (indicatrice de) 迪潘标线

Egalité de PARSEVAL 帕塞瓦等式
Ellipse 椭圆
Ellipsoïde 椭球面
~de revolution 旋转椭球面
Elliptique(géométrie) 椭圆几何
~ (métrique) 椭圆度量
Endomorphisme de WEINGARTEN 魏因加滕自同态
ENNEPER(surface d') 恩尼珀曲面
Enroulement(nombre) 环绕数
Entrelacées 交织的
Entrelacement 交织
Enveloppe 包络
Epicycloïde 圆外旋轮线
Equation de CODAZZI-MAINARDI 科达齐 - 马依纳尔迪方程
~ différentielle 微分方程
~ dépendant du temps 依赖时间的方程
~ d'EULER 欧拉方程
~ de GAUSS 高斯方程
~ linéaire 线性方程
~ ~ scalaire 数值线性方程
~ d'ordre n n 阶方程
Equations locales 局部方程
Equivalents(arcs paramétrés) 等价的参数弧
~ (atlas) 等价的坐标卡集
Equivalentes(formes volumes) 等价的体积形式
Espace des modules
~ de Hilbert 希尔伯特空间
~ normal 法空间
~ projectif complexe 复射影空间
~ projectif réel 实射影空间
~ tangent à une sous-variété 子流形的切空间
~ ~ une variété 流形的切空间
Etale 平展的
Etoilé星形的
EULER(équation d') 欧拉方程
Extérieur(algèbre) 外代数
~ d'une courbe fermée simple 简单闭曲线的外部
~ (produit) 外积

FABRICIUS-BJERRE-HALPERN 法布里修斯布耶尔 – 哈泊恩公式
Famile à un paramètre de formes différentielles 微分形式的带一个参数的连续族
Fenêtre de VIVIANI 维维亚尼窗
Fermée(forme différentielle) 闭微分形式
Feuillets 层
Fibré des densités 密度丛
~ normal 法丛
~ ~ unitaire 单位法丛
~ tangent 切丛
Fil 棉线
Flexible 柔性的
Foncteur contravariant 反变函子
Fonction(composées) 复合函数
~ (implicites) 隐函数
~ plateau 普拉托函数
Forme multilinéaire alternée 交错重线性型
~ fondamentale(première) 第一基本形式
~ ~ (deuxième,seconde) 第二基本形式
~ ~ (troisième) 第三基本形式
~ volume 体积形式
~ ~ canonique 典范体积形式
~ ~ ~ de S^d S^d 的典范体积形式
~ ~ ~ de T^d T^d 的典范体积形式
~ ~ d'une sous-variété 子流形的典范体积形式
Forme quadratique 二次型
~ bilinéaire symétrique 对称双线性型
Formule
~ d'ALLENDOERFER-WEYL-FENCHEL-GAUSS-BONNET-CHERN 艾伦多弗 – 外尔 – 芬切尔 –高斯 – 博内 – 陈公式
~ du changement de variables 变量替换公式
~ de DIQUET 狄奎公式
~ de FABRICIUS-BJERRE-HALPERN 法布里修斯 – 布耶尔 - 哈泊恩公式
~ de FRENET 弗雷内公式
~ de GAUSS 高斯公式
~ de GAUSS-BONNET 高斯 - 博内公式
~ de GIRARD 吉拉尔公式
~ de HERGLOTZ 赫格洛茨公式
~ de HOPF 霍普夫公式
~ de MINKOWSKI 闵可夫斯基公式
~ de PUISEUX 皮瑟公式
~ de STOKES 斯托克斯公式
~ des trois niveaux 三水平公式
~ de la variation première 一阶变分公式
~ ~ seconde 二阶变分公式
Formules de WEIERSTRASS 魏尔斯特拉斯公式
FRENET(formule de) 弗雷内公式
FRENET(trièdre de) 弗雷内标架
FROBENIUS(théorème de) 弗罗贝尼乌斯定理
FUBINI 富比尼

GAUSS 高斯
GAUSS-BONNET 高斯 – 博内
Génératrices 母线

Générique 通常的
Géodésique 测地线
~(courbure) 测地曲率
~ périodique 周期测地线
~(torsion) 测地挠率
Géodésiques(coordonnées) 测地坐标
~ de GAUSS 高斯坐标
Géométrie bornée 有界几何
~ différentielle projective 射影微分几何
~ riemannienne 黎曼几何
GIRARD(Albert) 阿尔波特 吉拉尔
Globalement convexe 整体凸的
Graduée 分次的
Graphe 图像
Grassmanniennes 格拉斯曼 (流形)
Group de cohomologie 上同调群
~ de LIE 李群
~ linéaire 线性群
~ orthogonal 正交群
~ proprement discontinu 真不连续群
~ de de RHAM 德拉姆群
GULDIN (deuxieme théorème de) 古尔丁第二定理
~ (premier théorème de) 古尔丁第一定理

HAAR(mesure de) 哈尔测度
HADAMAD 阿达马
Hélice 螺旋线
~ circulaire 圆柱螺旋线
~ sphérique 球面螺旋线
Hélicoïde 螺旋面
~ à pas carré 方螺纹螺旋面
HERGLOTZ 赫格洛茨
Hessienne 海色映射
HILBERT 希尔伯特
Homofocales(quadriques) 共焦的二次曲面
Homologues 同调的
Homotopes 同伦的
Homotopie 同伦
HOPF 霍普夫
HOPF–RINOW 霍普夫 - 里诺
Horizontal 水平的
Hyperbolique(plan) 双曲平面
Hyperboloïde à une nappe 单叶双曲面
~ à deux nappes 双叶双曲面
Hyperquadrique 超二次曲面
Hypersurface 超曲面
Hypocycloïde 圆内旋轮线

Image d'un arc géométrique 几何弧的像
~ ~ paramétré 参数弧的像
~ d'un point 点的像
Image réciproque d'une densité 交互图像密度
~ ~ d'une forme différentielle 微分形式的拉回像
Immergée 浸入的
Immersion 浸入
~ de WENTE 温特浸入
Indefiniment differentiable 无穷次可微的
Indice 指标
Indice d'un champ de vecteurs 向量场的指标
~ d'une forme quadratique 二次型的指标
~ d'un point critique 临界点的指标
~ ~ par rapport à un lacet 点对于圈的指标

~ ~ ~ à une courbe 点 m 对于曲线的指标
Inégalité de BAVARD 巴瓦德不等式
~ de BONNESEN 邦纳森不等式
~ de CROKE 克罗克不等式
~ de GROMOV 格罗莫夫不等式
~ isoembolique 等栓不等式
~ isopérimétrique 等周不等式
~ isosystolique 等收缩不等式
~ de LOEWNER 洛纳不等式
~ de MINKOWSKI 闵可夫斯基不等式
~ de PU 普不等式
~ stricte du triangle 严格三角不等式
~ de WIRTINGER 维尔丁格不等式
Inflexion(point) 拐点
Intégrable 可积的
Intégrale 积分
~ à valeurs vectorielles 向量值函数的积分
Intérieur d'une courbe fermée simple 简单闭曲线的内部
~ (produit) 内积
Intervalle maximal 最大开区间
Intrinsèque(métrique) 内蕴度量
Invariance du degré par homotopie 映射度对于同伦的不变性
~ de l'indice par difféomorphisme 指标对于微分同胚的不变性
~ par isométrie 等距不变性
Invariant de HOPF 霍普夫不变量
Inversion 反演
~ locale 局部逆映射
Isoembolique(inégalité) 等栓不等式
Isolé 孤立的
Isométrie 等距映射
Isométriques(variétés riemanniennes) 等距的黎曼流形
Isomorphisme 微分同胚
Isopétrimetres 等周的
Isopérimétrique(défaut) 等周亏损
~ prfoil 等周轮廓
Isosystolique(inégalité) 等周不等式
Isothermes(coordonnées) 等温坐标
Isotope 同痕
Isotopie 同痕的

JACOBI(champ de) 雅可比场
Jacobien 雅可比行列式
Jacobienne(matrice) 雅可比矩阵
JORDAN(théorème de) 若尔当定理

KLEIN(bouteille de) 克莱因瓶

Lacet 圈
Lampion 彩色折纸灯笼
Lanterne vénitienne 威尼斯灯笼
l.a.paramétrisation 弧长参数表示
Largeur constante 常宽度
Latitude 纬度
LEBESGUE 勒贝格
LEGENDRE 勒让得
Lemme de POINCARÉ庞加莱引理
Lemniscate 双纽线
LIE(groupe de) 李群
Ligne de courbure 曲率线
~ de striction 腰线
Limaçon de PASCAL 帕斯卡蜗线
Linèaire(équation différentielle) 线性微分方程

LIOUVILLE(coordonnées de) 刘维尔坐标
~ (théorème de) 刘维尔定理
Lipschitzienne 利普希茨的
LIPSCHITZ–KILLING(courbures de) 利普希茨 – 基灵曲率
Localement connexe(variété) 局部连通的流形
~ compact 局部紧致的
~ fini 局部有限的
~ lipschitzienne 局部利普希茨的
Logarithmique(spirale) 对数螺线
Longitude 经度
Longue droite 长直线
Longueur 长度
Longueur d′un arc géométrique 几何弧的弧长
~ ~ paramétré 参数弧的弧长
~ d′une courbe fermée 闭曲线的长度
~ d′une variété riemannienne 黎曼流形上长度
LOEWNER 洛纳
L–périodique L– 周期的

Majoration a priori 先验放大估计
Matrice jacobienne 雅可比矩阵
MENGER(courbure de) 门格曲率
MERCATOR 梅卡托
Méridienne 经线
Mesure associée à une densité与密度关联的测度
~ canonique d′une variété riemannienne 黎曼流形的典范测度
~ de HAAR 哈尔测度
~ de LEBESGUE 勒贝格测度
~ lebesguienne 勒贝格的测度
~ nulle 零测度
~ produit 乘积测度
~ de RADON 拉东测度
Métacentre 定倾中心
Métrique elliptique 椭圆度量
~ intrinsèque 内蕴度量
~ d′une surface 曲面的度量
Minima(surface) 极小曲面
MINKOWSKI(problème de) 闵可夫斯基问题
Mixte(produit) 混合积
MÖBIUS(bande de) 默比乌斯带
Morphisme 态射
MORSE(théorie de) 莫尔斯理论
MOSER(théorème de) 莫泽定理
Moulure(surface) 默比乌斯带
Multiple(point) 多重点
Multiplicité d′un point 点的重数

Néphroïde 肾脏线
Nombre de BETTI 贝蒂数
~ d′enroulement 回转数
~ d′entrelacement 交错数
~ de feuillets 层数
Non–dégénéré 非退化的
Non-entrelacées 不交错的
Non-orientable 不可定向的
Normal reentrant 进入法向量
~ unitaire 单位法向量
Normale(courbure) 法曲率
Norme 范数

Ombilic 脐点
Ombre 阴影
Ondes(surface) 波曲面
Onglet cylindrique 圆柱楔形
Orbite 轨道
Orientable 可定向的

Orientation d'un arc géométrique 几何弧的定向
~ d'un espace vectoriel 向量空间的定向
~ d'une variété 流形的定向
~ canonique de S^d S^d 的典范定向
~ ~ de T^d T^d 的典范定向 (5.3.10.1)
~ ~ du bord d'un domaine 区域边界的典范定向
~ ~ d'une courbe fermée simple 简单闭曲线的典范定向
~ d'une surface 曲面的定向
Orthogonal(groupe) 正交群
~ (sous-espace) 正交子空间
Orthogonaux(vecteurs) 正交向量
Osculateur(cercle) 密切圆
~ (paraboloïde) 密切抛物圆
~ (plan) 密切平面
Ouvert étoilé 星形开集

Paire de courbes 曲线对
Parabole 抛物线
Paraboles focalss 焦点抛物线
Paraboloïde elliptique 椭圆抛物面
~ hyperbolique 双曲抛物面
~ osculateur 密切抛物面
Paradoxe de la peinture 颜料悖论
Parallèle 纬线
Parallèles(surfaces) 平行曲面
Paramètre de distribution 分布参数
Paramétré(arc) 参数弧
Paramétrisation 参数表示
~ globale 整体弧长参数表示
~ l.a. 整体弧长参数表示
~périodique 周期弧长参数表示
Partition de l'unité 单位分解
PASCAL(limaçon de) 帕斯卡蜗线
Passage du local au global 从局部到整体的过渡
Peinture 颜料
Période 周期
Périodique(L–) L– 周期的
Pied 底
Plan 平面
~ euclidien 欧几里得平面
~ osculateur 密切平面
~ tangent 切平面
Plateau(fonction) 普拉托函数
Plongée 嵌入的
Plongement 嵌入
PLÜCKER(conoïde de) 普吕克劈锥曲面
Plus court chemin 最短路径
Plus petite période 最小周期
Point d'un arc géométrique 几何弧的点
~ d'une courbe fermée 闭曲线的点
~ critique 临界点
~ critique non–dégénéré 非退化临界点
~ double 二重点
~ elliptique 椭圆点
~ hyperbolique 双曲点
~ d'inflexion 拐点
~ isolé 孤立点
~ multiple 重点
~ paraboloïque 抛物点
~ planaire 平点
~ régulier 正则点
Points centraux 中心点
Pôle 极点
Polyèdre convexe 凸多面体
~ flexible 柔性多面体

Position locale d'une courbe 曲线相的局部位置
~ d'une surface par rapport à son plan tangent 曲面相对于其切平面的位置
Positive(base) 正基底
~ (carte) 正坐标卡
~ (forme) 正形式
Première forme fondamentale 第一基本形式
Préservant les orientations 保持定向
Presque-partout 几乎处处
Problème de CHRISTOFFEL 克里斯托费尔问题
~ de MINKOWSKI 闵可夫斯基问题
Problemes mixtes 混合问题
Produit(densité) 乘积密度
~ (mesure) 乘积测度
Produit de deux densités 两个密度的乘积
~ ~ sous-variétés 两个子流形的乘积
~ ~ variétés 两个流形的乘积
Produit extérieur 外积
~ intérieur 内积
~ mixte 混合积
~ scalaire 数量积
~ vectoriel 向量积
~ tensoriel 张量积
Projectif(espace) 射影空间
Projection de MERCATOR 梅卡托投影
Projections canoniques 典范投影
~ stéréographiques 球极投影
Projective(géométrie différentielle) 射影微分几何
Prolongement d'une solution 解的延拓
Proprement discontinu 真不连续的
Propriété $P1$ 性质 $P1$
~ $SP1$ 性质 $SP1$
PLÜFER(surface de) 普吕弗曲面
Pseudo-sphère 伪球面
PU 普
PUISEUX(formule de) 皮瑟公式

Quadriques 二次曲面
~ graphes 二次图像
~ homofocales 共焦二次曲面
~ propres 纯正二次曲面
Quaternions 四元数

Raison de degré
Rayon de courbure 曲率半径
~ d'injectivité 单射半径
Recettes 方法
Réciproque(image) 拉回像
Recouvrement localement fini 局部有限的覆盖
~ subordonné 从属覆盖
Régulier 正则的
Relèvement 提升
RELLICH 雷利希
Rentrant 进入的
Renversant les orientations 反转方向
Restriction d'une forme
différentielle 微分流形的限制
Revêtement 覆叠映射
~ riemannien 黎曼覆叠
Révolution(surface) 旋转曲面
RHAM(groupe de de) 德拉姆群
Riemannienne(géométrie) 黎曼几何
~ (revêtement) 黎曼覆叠
~(structure) 黎曼结构
Rigidité刚性
Rotation de $\pi/2$ 旋转 $\pi/2$

Sans point fixe 无不动点
SARD (théorème de) 萨德定理
SCHERK(surface de) 谢而克曲面
SCHUR(théorème de comparaison de) 舒尔比较定理
SCHWARTZ(théorème de) 施瓦茨定理
Second forme fondamentale 第二基本形式
Segment 线段
Selle de singe 猴鞍面
Séparable 可分的
Séparée(variété) 分离流形
Série de FOURIER 傅里叶级数
Signe de la courbure 曲率的符号
~ de la torsion 挠率的符号
Similitude 相似
Simple 简单的
Simplement connexe(surface) 单连通曲面
~ ~ (variété)
Solénoïde 螺线管
Solution d'une équation différentielle 微分方程的解
Sommet 顶点
Sous–variété de $\mathbf{R}^n$ 子流形
~ d'une variété 流形的子流形
Sphère 球面
~ osculatrice 密切球面
Sphériques(coordonnées) 球面坐标
Spirale logarithmique 对数螺线
Stéréographiques(projections) 球极投影
STOKES (théorème de) 斯托克斯定理
Strictement équivalents 严格等价的
Striction(ligne de) 腰线
Structure riemannienne 黎曼结构
STURM–LIOUVILLE 施图姆 – 刘维尔
Submersion 浸没
Subordonné 从属的
Surface 曲面
~ algébrique 代数曲面
~ de BELTRAMI 贝而特拉米曲面
~ de BOY 博依曲面
~ canal 槽形曲面
~ (classification) 曲面的分类
~ compacte 紧致曲面
~ complète 完备曲面
~ convexe 凸曲面
~ à courbure totale constante 有常总曲率的曲面
~ à courbure moyenne constante 有常平均曲率的曲面
~ de DELAUNAY 德洛内曲面
~ dévelopable 可展曲面
~ d'ENNEPER 恩尼珀曲面
~ envelope 包络曲面
~ focale 焦曲面
~ gauche 扭曲面
~ immergée 浸入曲面
~ minima 极小曲面
~ moulure 槽形曲面
~ non–compacte 非紧致曲面
~ des ondes 波曲面
~ parallèle 平行曲面
~ plongée 嵌入曲面
~ de PRÜFER 普吕弗曲面
~ réglée 直纹面
~ de révolution 旋转曲面
~ de SCHERK 谢而克曲面
~ tétraédrales 四面曲面
~ de translation 平移曲面
~ de VÉRONÈSE 韦罗内塞曲面

~ de WEINGATEN 魏因加滕曲面
Symboles de CHRISTOFFEL 克里斯托费尔符号
Système de coordonnées homogènes 齐次坐标组
~ différentiel 微分方程组
Systole 收缩

Taille 尺寸
Tangent(espace) 切空间
~(fibré) 切丛
~(vecteur) 切向量
Tangente(application)
~ à un arc géométrique 几何弧的切线
~à un arc paramétré 参数弧的切线
~ double 重切线
~ unitaire 单位切向量
Tenseur de courbure
~ de type (p,q) (p,q) 型张量
Terrestres(coordonnées) 地理坐标
Théorème des accroissements finis 有限增量定理
~ d'ALEXANDROV 亚历山德罗夫定理
~ d'AMPÈRE 安培定理
~ des applications contractantes 压缩映射定理
~ d'ARCHIMÈDE 阿基米德定理
~ de BELTRAMI 贝尔特拉米定理
~ de BERNSTEIN 伯恩斯坦定理
~ de BROUWER 布劳威尔定理
~ de CAUCHY 柯西定理
~ de DARBOUX 达布定理
~ d'enroulement de tangente 切线回转定理
~ d'existence d'une coulée locale
~ des fonctions composées
~ ~ implicites 隐函数定理
~ de FROBENIUS 弗罗贝尼乌斯定理
~ de FUBINI 富比尼定理
~ de GAUSS–BONNET 高斯 – 博内定理
~ de GULDIN 古尔丁定理
~ de HADAMARD 阿达马定理
~ de HARTMAN–NIRENBERG 哈特曼 – 尼伦伯格定理
~ de HILBERT 希尔伯特定理
~ de HOPF–RINOW 霍普夫 – 里诺定理
~ d'inversion locale 局部逆映射定理
~ de JORDAN 若尔当定理
~ de LIOUVILLE 刘维尔坐标
~ de MOSER 莫泽定理
~ des quatre sommets 四顶点定理
~ de de RHAM 德拉姆定理
~ de SARD 萨德定理
~ de SCHWARTZ 施瓦茨定理
~ de STOKES 斯托克斯定理
~ de WHITNEY–GRAUENSTEIN 惠特尼 – 格劳恩斯坦定理
Théorème remarquable de Gauss 高斯奇妙定理
Théorie de MORSE 莫尔斯理论
Topologie canonique d'une variété
Tore 圆环面
~ carré 正方环面
~ hexagonal 六边形环面
Torsion d'un arc géométrique 几何弧的挠率

~ ~ paramétré 参数弧的挠率
~ géodésique 测地挠率
Totale(courbure) 总曲率
Tour de taille 腰围
Tourner sa concavité vers le pôle 把其凹侧朝向极点
Tractrice 曳物线
Transfinie(demi-droite) 超限半直线
Translation(surface) 平移曲面
Transitivement 以迁移方式
Transport 转移
~ parallèle 平行移动
Transverse(courbe) 横截曲线
~ (vecteur) 横截向量
Trièdre de FRENET 弗雷内标架.
Troisième forme fondamentale 第三基本形式
Tube 管形
Tubulaire(voisinage) 管形邻域

Unicité 唯一性

Valeur critique 临界值
~ régulière 正则值
Variété流形
~ (classification)
~ connexe 连通的流形
~ différentielle 微分流形
~ localement connexe 局部连通的流形
~ non-orientable 不可定向的
~ orientable 可定向的
~ produit 乘积流形
~ quotient 商流形
~ séparable 可分的流形
~ séparée 分离的流形
~ topologique 拓扑流形
Vecteur binormal 次法向量
~ normal 法向量
~ normal principal 主法向量
~ normal unitaire canonique 典范法向量场
~ rentrant 进入向量
~ sortant 外出向量
~ tangent à une sous-variété子流形的切向量
~ ~ à une variété 流形的切向量
~ ~ unitaire 单位切向量
Vecteurs orthogonaux 正交向量
Vectoriel(produit) 向量积
VÉRONÈSE(surface de) 韦罗内塞曲面
Vertical 竖直的
Vitesse algébrique 代数速度
~ d'une courbe d'un ouvert 开集上的曲线的速度
~ ~ d'une variété流形上的曲线的速度
~ scalaire 数量速度
VIVIANI(fenêtre de) 维维亚尼窗
Voisinage tubulaire 管形邻域
Volume 体积
~ des boules 球的体积
~ des demi-tubes
~ d'une sous-variété d'un espace euclidien 欧几里得空间子流形的体积
~ des sphères 球面的体积
~ des tubes 管形的体积
Voyageur en équilibre 平衡中的旅行者

WEIERSTRASS(formules de) 魏尔斯特拉斯公式
WEINGARTEN(endomorphisme de) 魏因加滕自同态
~ (surface de) 魏因加滕曲面
WENTE 温特
WEYL(courbures de) 外尔曲率
WIRTINGER(inégalité de) 维尔丁格不等式

Zéro isolé d'un champ de vecteur 向量场的孤立零点

索　　引

A

B

C

D

E

F

G

H

J

K

L

M

N

O

P

Q

R

S

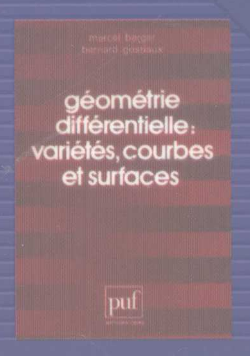
T

W

X

Y

Z



本书主要由法国资深微分几何学家贝尔热在巴黎大学多年讲授微分几何课程讲稿的基础上编纂而成。

本书强调几何与分析的有机结合，始终坚持对于分析，揭露其几何实质，而对于几何，则洞察其分析精髓。本书对于常微分方程、单位分解、临界点、拓扑度和流形上的微积分等研究微分几何的各种工具做了相当充分的讲解。内容重点是曲线的局部和整体理论，对于曲面的局部和整体理论则做了比较全面的概述，而对于其详尽的证明则推荐相关的文献供读者查阅。书中配备了丰富的习题。

本书是基础数学和应用数学系本科生乃至其他理工科学生学习微分流形和微分几何的优秀参考书。



